תירגול 1 – חזרה על אותות אקראיים

מה בתכנית?

- מושגים בסיסיים בהסתברות
- תהליכים אקראיים
- המקרה הגאוסי
- סטציונריות
- ארגודיות
- Runs Test

מה בתכנית?

- מושגים בסיסיים בהסתברות
- תהליכים אקראיים
- המקרה הגאוסי
- סטציונריות
- ארגודיות
- Runs Test

משתנה אקראי

- משתנה המקבל ערכים התלויים ב"פרמטר מזל". מיפוי של תוצאת ניסוי על ציר ממשי.
- משתנה אקראי בדיד – מקבל ערכים בדידים
  - למשל: פואסוני, בינומי...
- משתנה אקראי רציף – מקבל ערכים רציפים על פני תחום אינסופי או מוגבל
  - למשל: גאוסי, יוניפורמי...

פונקציות צפיפות הסתברות, והתפלגות מצטברת

- התפלגות מצטברת

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \qquad F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1$$

- צפיפות הסתברות

$$\frac{\partial F_X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)d\alpha = f_X(x) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)d\alpha = 1$$

- הסתברות להיות בקטע $(a,b]$:

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$$

תוחלת

- מ"א בדיד

$$E\left[X\right]=\sum_x xP\left(X=x\right) \qquad E\left[g\left(X\right)\right]=\sum_x g\left(x\right)P\left(X=x\right)$$

- מ"א רציף

$$E\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X\left(x\right)dx \qquad E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)f_X\left(x\right)dx$$

תכונות:

- לינאריות: $E\left[aX+bY+c\right]=aE\left[X\right]+bE\left[Y\right]+c$
- עבור Y,X בת"ס $E\left[X\cdot Y\right]=E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)$ (ההיפך לא נכון)

שונות

<u>שונות</u>:

$$Var(X)=E\left[\left(X-E\left[X\right]\right)^2\right]=E\left[X^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2$$

תכונות:

1. $Var(X) \geq 0$
2. $Var(X) = 0 \leftrightarrow X = const$
3. לכל a,b מתקיים $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$
4. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
5. עבור $X_1, \dots, X_n$ ב"ת $Var(\Sigma X_i) = \Sigma_i Var(X_i)$

שונות משותפת

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

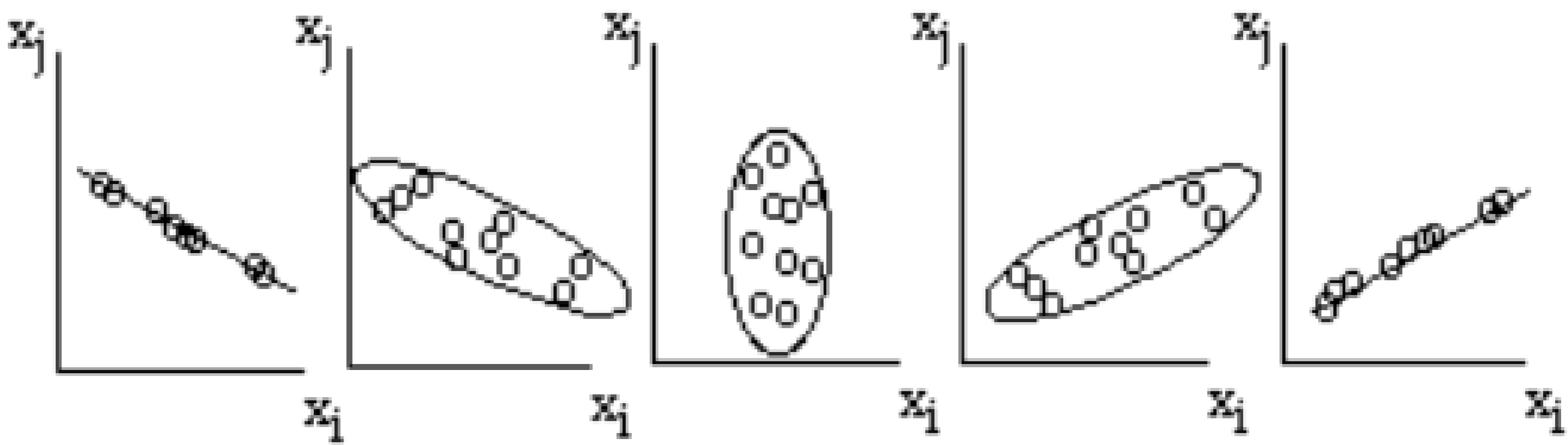
$$= \frac{1}{2}\left(Var(X+Y) - Var(X) - Var(Y)\right)$$

נותן תלות ליניארית.
משתנים בת"ס => בלתי מתואמים, בלתי תלויים לינארית (בת"ל)
ההיפך לא תמיד נכון (מלבד במקרה של וקטור אקראי גאוסי).

- תכונות:

1. $Cov(X,X) = Var(X)$
2. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ (סימטריה)
3. $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X,Y)$
4. $Cov(X, const) = 0$

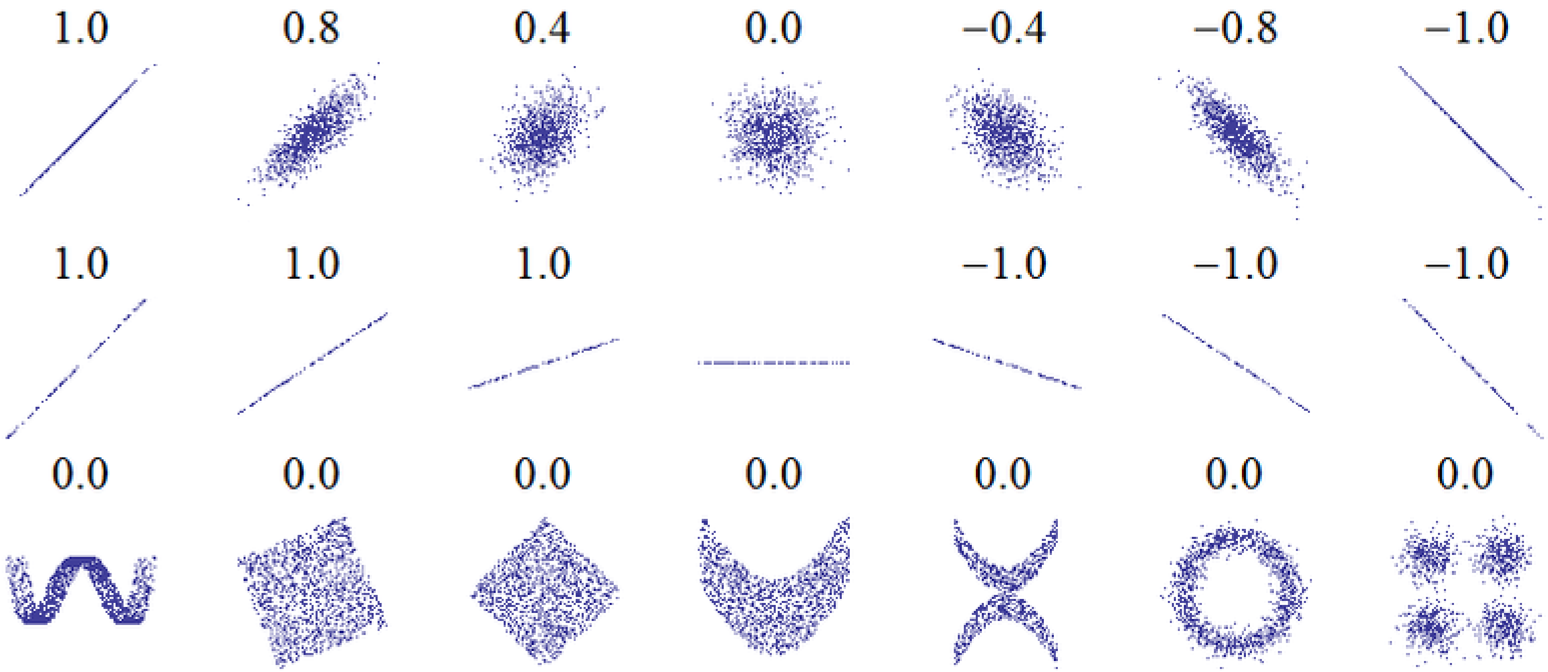
משמעות השונות המשותפת ומקדם הקורלציה של פירסון



$\rho_{X,Y} = -1$ $\quad -1 < \rho_{X,Y} < 0$ $\quad \rho_{X,Y} = 0$ $\quad 0 < \rho_{X,Y} < 1$ $\quad \rho_{X,Y} = 1$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

מקדם קורלציה ותלות לינארית



מקדם הקורילציה לא מספר לנו כלום על תלות לא-ליניארית!

התניות

- הצפיפות המותנית של X בהנתן Y=y:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

- כלל הכפל:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)$$

- נוסחת בייס:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)}{f_X(x)}$$

תוחלת מותנית

- התוחלת המותנית של X בהינתן Y=y

$$E\left[X \mid Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}\left(x \mid y\right) dx$$

- משפט ההחלקה

$$E\left[X\right]=E_Y\left[E\left[X \mid Y\right]\right]$$

- משפט ההחלקה המוכלל

$$E\left[X \mid Y\right]=E\left[E\left[X \mid Y,Z\right] \mid Y\right]$$

וקטור אקראי

- מקובל לסמן כוקטור עמודה: $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$
- תוחלת של וקטור אקראי היא וקטור התוחלות: $E\left[\underline{X}\right] = \begin{bmatrix} EX_1 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix}$
- מטריצת הקוואריאנס:

$$E\left[(\underline{X} - E\left[\underline{X}\right])(\underline{X} - E\left[\underline{X}\right])^T\right] = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}\left[X_1, X_1\right] & \operatorname{cov}\left[X_1, X_2\right] \cdots & \operatorname{cov}\left[X_1, X_n\right] \\ \operatorname{cov}\left[X_2, X_1\right] & & \\ \vdots & \ddots & \\ \operatorname{cov}\left[X_n, X_1\right] & \cdots & \operatorname{cov}\left[X_n, X_n\right] \end{bmatrix}$$

מה בתכנית?

✓ מושגים בסיסיים בהסתברות
- תהליכים אקראיים
- המקרה הגאוסי
- סטציונריות
- ארגודיות
- Runs Test

תהליך אקראי

- תהליך אקראי בזמן בדיד הוא פונקציה ממשית $X(w,t)$ כאשר t הוא הזמן ו w פרמטר המזל.
- קיבוע פרמטר המזל נותן פונקציה דיטרמיניסטית של הזמן – פונקציית מדגם.
- קיבוע הזמן נותן מ"א
- עבור כל "מסרק זמנים" $n_1,n_2..n_k$ ידוע חוק ההסתברות של הוקטור $(X_{n1},X_{n2}\dots X_{nk})$

אוטוקורלציה וקרוסקורלציה

- אוטוקורלציה של תהליך אקראי X:

$$R_{xx}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$

- קרוסקורלציה בין התהליכים האקראיים X ו- Y

$$R_{xy}(t_1,t_2)=E\left(X(t_1)Y(t_2)\right)$$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=E\left(X(t_1)Y(t_2)\right)\neq E\left(Y(t_1)X(t_2)\right)=R_{yx}(t_1,t_2)$$

פו' לא סימטרית!

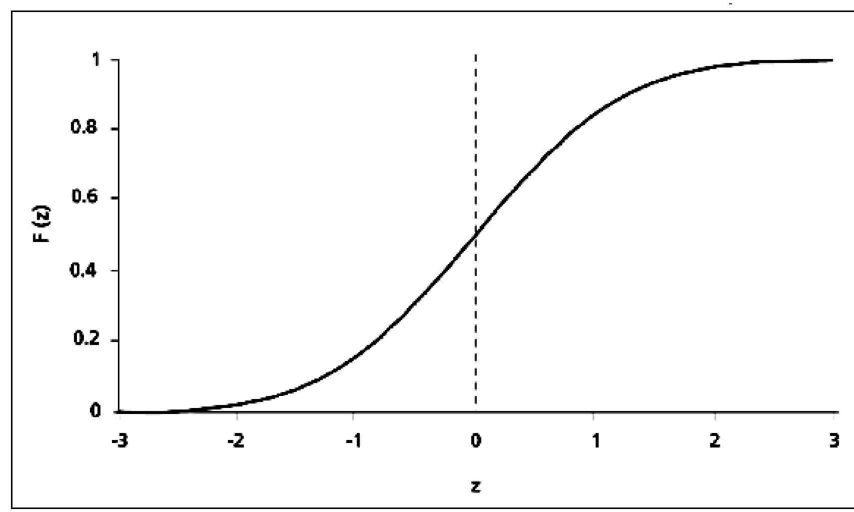
מה בתכנית?

- ✓ מושגים בסיסיים בהסתברות
- ✓ תהליכים אקראיים
- המקרה הגאוסי
- סטציונריות
- ארגודיות
- Runs Test

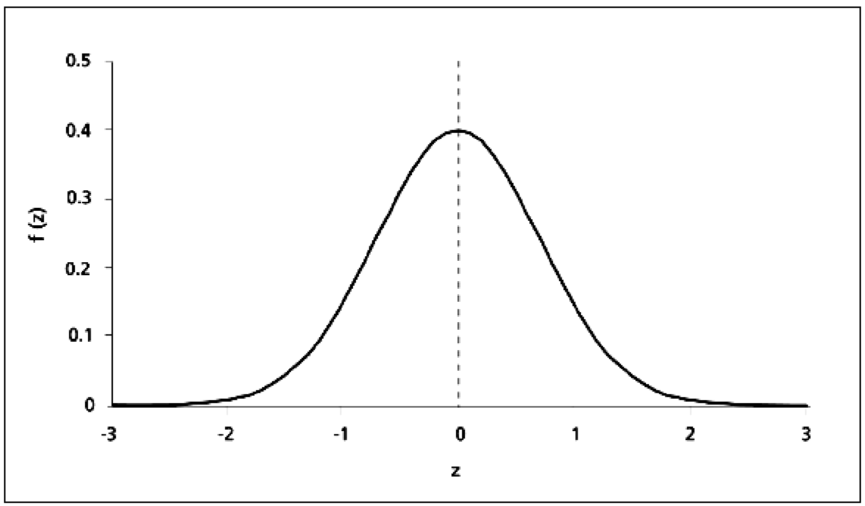
פילוג גאוסי

- הפילוג הגאוסי: $$f_x(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

cdf



pdf



- ב-MATLAB: הפקודה randn מגרילה מ"א מהתפלגות נורמלית סטנדרטית.
מעבר ל- $N\left(\mu,\sigma^2\right)$:

$$\boxed{X=\sigma\cdot Z+\mu}$$

וקטור אקראי גאוסי

- ו"א הוא ו"א גאוסי אם השלכה שלו לכל כיוון נותנת מ"א גאוסי.
  כלומר עבור וקטור $\underline{a}$ דיטרמיניסטי כלשהו אם $\underline{X}$ וא"ג אזי $\underline{a}^T\underline{X}$ הוא מא"ג.

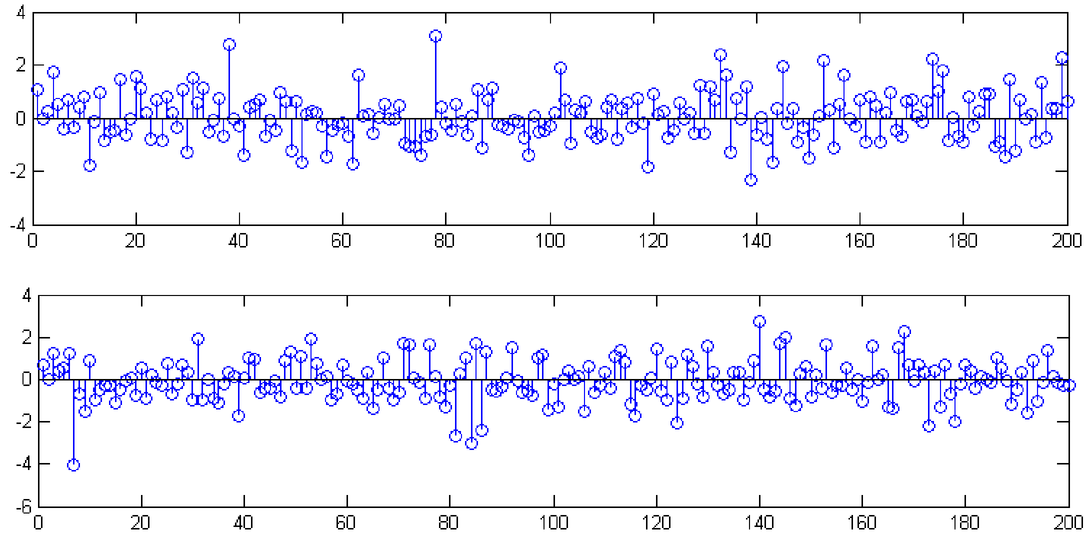
- <u>שאלה:</u> אם $\underline{X}$ וקטור גאוסי, מה לגבי $A\underline{X}+\underline{b}$?

$$\underline{X} \sim N\left(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Lambda}}\right) \xrightarrow[\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\,\underline{X}+\underline{b}]{} \underline{Y} \sim N\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\mu}+\underline{b}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{A}}^T\right)$$

תהליך אקראי גאוסי

- תהליך אקראי גאוסי הוא תהליך שבו עבור כל מסרק זמנים מתקבל וא"ג.

פונקציות מדגם של תהליך גאוסי



מה בתכנית?

- ✓ מושגים בסיסיים בהסתברות
- ✓ תהליכים אקראיים
- ✓ המקרה הגאוסי
- סטציונריות
- ארגודיות
- Runs Test

סטציונריות

סטציונריות במובן הצר – SSS (Strict Sense Stationarity)

לכל מסרק זמנים $[t_1, t_2, ..., t_n]$ ולכל τ לשני הוקטורים $\left[X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}\right]$

ו- $\left[X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, ..., X_{t_n+\tau}\right]$ אותה התפלגות.

או אחרת : $F_{X_{t_1},...,X_{t_n}}\left(\underline{x}\right) = F_{X_{t_1+\tau},...,X_{t_n+\tau}}\left(\underline{x}\right)$

מכאן נובע כי גם המומנטים לא תלויים בזמן (הכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון):

$$E\left[X_{t_1} X_{t_2} \cdots X_{t_k}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t_1\right) x\left(t_2\right) \cdots x\left(t_k\right) f_{X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k}}\left(\underline{x}\right) d\underline{x} \neq g\left(t\right)$$

סטציונריות במובן הרחב

סטציונריות במובן הרחב – WSS (Wide Sense Stationarity)
דרישה של חוסר תלות בזמן רק עבור שני מומנטים ראשונים:

תוחלת: $E\left[X(t)\right]=\mu$ קבועה

פ' האוטוקורלציה: $E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=R\left(\left|t_1-t_2\right|\right)=R(\tau)$

תלויה רק בהפרש הזמנים

הקשר לשונות: $Var\left[X(t)\right]=\sigma^2=R(0)-\mu^2$

SSS→WSS

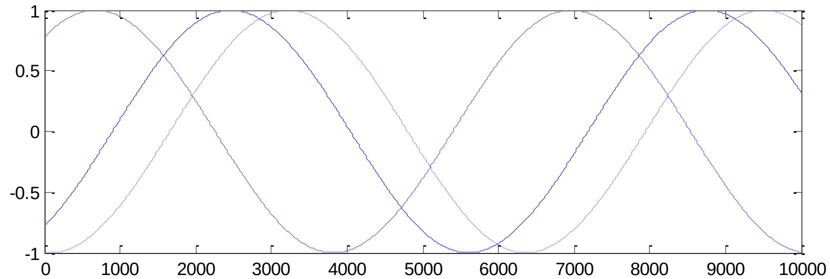
בתהליך גאוסי: WSS⇔SSS

סטציונריות - דוגמא

- תהליך iid (independent identically distributed) הוא SSS
- אם A מ"א: $X(t)=A$ הוא תהליך SSS

נתון תהליך: $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi),\quad \phi\sim U[0,2\pi],\quad A=const$

איך תראה פ' מדגם?



האם WSS ?

נבדוק את שני המומנטים הראשונים :

תוחלת:

$$E\left[x(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\phi)A\cos(\omega_0 t+\phi)d\phi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}A\cos(\omega_0 t+\phi)d\phi=0$$

פ' האוטוקורלציה:

$$E\left[x(t+\tau)x(t)\right]=R_{xx}(t+\tau,t)=E\left[A^2\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)\cos(\omega_0 t+\phi)\right]\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{A^2}{2}\cdot E\left[\cancel{\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\phi)}+\cos(\omega_0\tau)\right]=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)=R_{xx}(\tau)$$

$$(*)\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

מה בתכנית?

- ✓ מושגים בסיסיים בהסתברות
- ✓ תהליכים אקראיים
- ✓ המקרה הגאוסי
- ✓ סטציונריות
- ארגודיות
- Runs Test

ארגודיות

תהליך ארגודי הוא תהליך עבורו פונקצית מדגם אחת שנמדדה לאורך די זמן מספיקה ללמוד על ההתפלגות של התהליך כולו.

קשה לבדוק ארגודיות.
בדרך כלל משתמשים בארגודיות ביחס למאפיין מסויים של התהליך

ארגודיות ביחס לתוחלת:

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_k(t)\,dt \quad \forall k$$

ארגודיות ביחס לאוטו-קורלציה:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_k(t+\tau)\,X_k(t)\,dt \quad \forall k$$

k– משתנה מזל

במלים אחרות: תהליך הוא ארגודי ביחס לפרמטר מסויים אם ניתן לקבל את ערכו של הפרמטר מהתבוננות לאורך זמן בפונקצית מדגם יחידה.

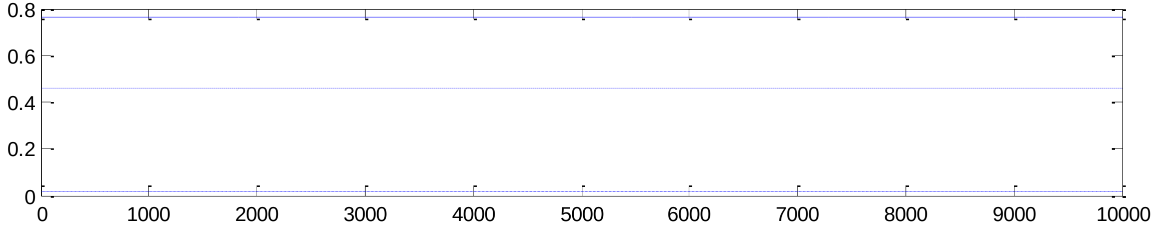
על מנת שתהליך יהיה ארגודי ביחס לפרמטר, הוא חייב להיות...

סטציונרי ביחס לאותו פרמטר!

דוגמה 1: ארגודיות

דוגמה: נסתכל על תהליך $X_k(t) = A$, כאשר A מ"א $A \sim U[0,1]$.
האם התהליך ארגודי ביחס לתוחלת?

פנקציות מדגם:



הממוצע של פונקצית מדגם יחידה אינו שווה לתוחלת:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_k(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A_k\,dt = A_k$$

$$A_k \in [0,1] \neq E\left[X(t)\right] = E[A] = \frac{1}{2}$$

התהליך הנ"ל אינו ארגודי ביחס לתוחלת.

ארגודיות – משפט Slutsky

- תהליך WSS הינו ארגודי במומנט הראשון אמ"מ:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M}r(k)=0$$

כלומר הקורילציה דועכת לאפס.

- אינטואיציה: אם קיימת קורילציה בין כל נקודה לכל נקודה אחרת, מרוחקת ממנה ככל שתהיה, לא נקבל מידע חדש ממדידות חדשות כיוון שקיימת תלות סטטיסטית בין הדגימות.
- לחילופין, אם הקורילציה דועכת אחרי זמן מה, יש לנו מידע סטטיסטי חדש שאפשר לנצל.

דוגמה 2: ארגודיות

דוגמה: נסתכל על התהליך:

$$X\left(t\right)=a\cdot\sin\left(\omega_0 t+\Phi\right)\quad,\quad a=const\quad,\quad \Phi\sim U\left[0,2\pi\right]$$

האם התהליך ארגודי ביחס לתוחלת ולשונות?

- התהליך סטציונרי במובן הרחב – בדומה לתהליך שראינו לפני 3 שקפים.
- הוכחת ארגודיות ביחס לתוחלת:

נגדיר - $T=\frac{2\pi}{\omega_0}\left(n+p\right)\ ,\ n\in N,\ p\in[0,1)$

$$\int_0^T X_k\left(t\right)dt=n\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}a\cdot\sin\left(\omega_0 t+\phi_k\right)dt+\int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}a\cdot\sin\left(\omega_0 t+\phi_k\right)dt=\int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}a\cdot\sin\left(\omega_0 t+\phi_k\right)dt$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_k\left(t\right)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}a\cdot\sin\left(\omega_0 t+\phi_k\right)dt\underset{\substack{\downarrow\\ finite/\infty}}{\to}0\equiv E\left[X\left(t\right)\right]$$

דוגמה 2: ארגודיות

• הוכחת ארגודיות ביחס לשונות:

$$\int_0^T \left(X_k(t)\right)^2 dt = n\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a^2\cdot\sin^2\left(\omega_0 t+\phi_k\right)dt + \int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}} a^2\cdot\sin^2\left(\omega_0 t+\phi_k\right)dt =$$

$$=\frac{n\cdot a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} 1-\cos\left(2\omega_0 t+2\phi_k\right)dt\right)+\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}} 1-\cos\left(2\omega_0 t+2\phi_k\right)dt\right)=$$

$$=\frac{n\cdot a^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{p\cdot 2\pi}{\omega_0}-\int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}\frac{a^2}{2}\cos\left(2\omega_0 t+2\phi_k\right)dt$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(X_k(t)\right)^2 dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{(n+p)\cdot a^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}+\underbrace{\int_0^{p\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}\frac{a^2}{2}\cdot\cos\left(2\omega_0 t+2\phi_k\right)dt}_{finite/\infty}\right]=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_0}(n+p)}\frac{(n+p)\cdot a^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{a^2}{2}\equiv R_{XX}(0)=E\left[\left(X_k(t)\right)^2\right]$$

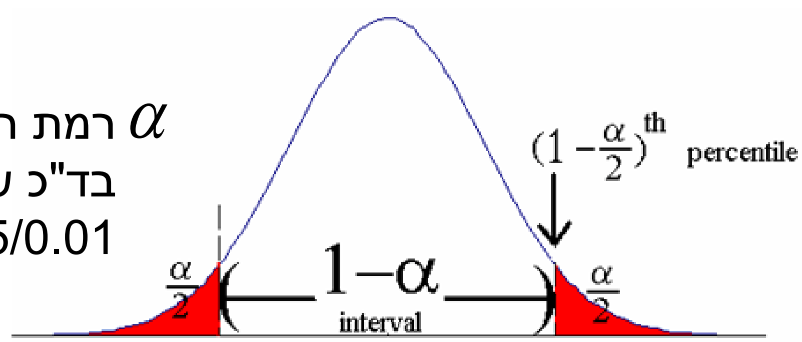
מה בתכנית?

- ✓ מושגים בסיסיים בהסתברות
- ✓ תהליכים אקראיים
- ✓ המקרה הגאוסי
- ✓ סטציונריות
- ✓ ארגודיות
- Runs Test

Confidence Interval – רווח סמך

- רווח סמך – טווח הערכים שכולל במידת ודאות "גדולה" את ערכו האמיתי של המ"א שאנחנו משערכים.

α רמת הביטחון.
בד"כ שווה ל-
.0.05/0.01



- בדרך כלל משמש לבדוק מה רמת הביטחון שלנו בתוצאת המשערך או לבנות תחום ביטחון למ"א\פרמטר שאנו מעוניינים בו.

Confidence Interval – רווח סמך

• הגדרה:

עבור מ"מ X כלשהו, השברון X_α הינו הערך המקיים:

$$P\left(X < X_\alpha\right) = \alpha$$

השברונים $X_{\frac{\alpha}{2}}$, ו- $X_{1-\frac{\alpha}{2}}$ מקיימים:

כלומר תחום הערכים $\left[X_{\frac{\alpha}{2}}, X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
מכיל את המ"מ X
בהסתברות $1-\alpha$

$$P\left(X_{\frac{\alpha}{2}} < X < X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Runs Test

- Run-Test– מבחן סטטיסטי לבדיקת סטציונריות של תהליך אקראי ביחס לפרמטר על פי פונקצית מדגם בודדת. המבחן בודק אם הסדרה היא i.i.d.
- מתכון:
  - מפרקים את האות (פונקצית מדגם) ל-N מקטעים באורך שווה, דואגים שיש **מספיק מקטעים שהם מספיק גדולים.**
  - מחשבים ממוצע ושונות עבור האות כולו ועבור כל מקטע.
  - מסמנים על כל מקטע אם הוא גדול ('+') או קטן ('–') מהערך שחושב עבור כל האות.
  - סופרים את מספר ה-runs – r עבור החלוקה שנקבעה. כל רצף של '+' או '–' נחשב ל-run אחד.
  - קובעים רמת מובהקות α לביצוע המבחן.
  - מחלצים מהטבלה **רווח סמך דו-צדדי** עבור הערך שהתקבל.

Runs Test

- המבחן מסתכל על פילוג מספר ה-runs תחת שתי השערות:
  - השערת האפס: האות סטציונרי.
  - ההשערה החלופית: האות לא סטציונרי.
- הפילוג של מספר ה-runs עבור אות שחולק ל-N מקטעים תחת השערת האפס (כלומר בהנחה שהאות סטציונרי) מותנה במספר המקטעים החיוביים ("+"-ים) ומספר המקטעים השליליים ("-"-ים):

$$r_N \mid N_+, N_- \sim N\left(\mu = 2\frac{N_+ N_-}{N} + 1, \sigma^2 = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{N-1}\right)$$

$$\text{Where} \quad N = N_+ + N_-$$

- אם דוחים את השערת האפס, אזי התהליך הוא....? לא סטציונרי!

Runs Test

- כמה הערות:
  - הטבלה מספקת לנו את השברונים של הפילוג של מספר ה-runs תחת השערת האפס. לכן, ניתן לחלץ ממנה רווח סמך עבור רמת מובהקות נתונה.
  - אם מספר ה-runs שמקבלים לא ברווח סמך שחישבנו אזי האות לא סטציונרי!
  - כיוון שאנחנו בודקים את ההשערה ללא "כיווניות", ההסתברות לטעות תתחלק שווה בשווה בין זנבות הפילוג של מספר ה-runs תחת השערת האפס.
  - גרסה נפוצה של המבחן מתייחסת לחציון של האות כולו במקום לממוצע. אנחנו בקורס נעבוד עם הממוצע.

דוגמה - Runs Test

- נניח עבור חלוקה נתונה של אות מסויים, התקבלה הסדרה הבאה:

$$\boxed{++++}\boxed{---}\boxed{+++}\boxed{--}\boxed{++++++}\boxed{----}$$

- לכמה מקטעים חולק האות? $\longleftarrow N = 22$

- מהו מספר ה-runs? $\longleftarrow r_N = 6$

- נניח ביקשו רמת מובהקות $\alpha = 0.05$ ונפנה לטבלה.

הסתברות לקבוע שהאות לא סטציונרי
למרות שהוא סטציונרי – שגיאה מסוג 1.

דוגמה - Runs Test

$N = 22$

Table A.6

Percentage Points of Run Distribution

Values of $r_{n;\alpha}$ such that Prob $[r_n > r_{n;\alpha}] = \alpha$, where $n = N_1 = N_2 = N/2$

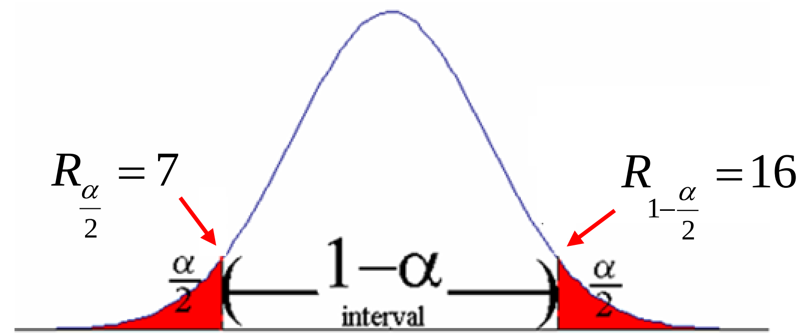
	α					
$n = N/2$	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
5	2	2	3	8	9	9
6	2	3	3	10	10	11
7	3	3	4	11	12	12
8	4	4	5	12	13	13
9	4	5	6	13	14	15
10	5	6	6	15	15	16
$\boxed{11}$	6	$\boxed{7}$	7	16	$\boxed{16}$	17
12	7	7	8	17	18	18
13	7	8	9	18	19	20
14	8	9	10	19	20	21
15	9	10	11	20	21	22
16	10	11	11	22	22	23
18	11	12	13	24	25	26
20	13	14	15	26	27	28
25	17	18	19	32	33	34
30	21	22	24	37	39	40
35	25	27	28	43	44	46
40	30	31	33	48	50	51
45	34	36	37	54	55	57
50	38	40	42	59	61	63
55	43	45	46	65	66	68
60	47	49	51	70	72	74
65	52	54	56	75	77	79
70	56	58	60	81	83	85
75	61	63	65	86	88	90
80	65	68	70	91	93	96
85	70	72	74	97	99	101
90	74	77	79	102	104	107
95	79	82	84	107	109	112
100	84	86	88	113	115	117

הסתברות
שגיאה מסוג
1 כוללת

$\alpha = 0.05$

הסתברות
שגיאה מסוג 1
בכל זנב

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

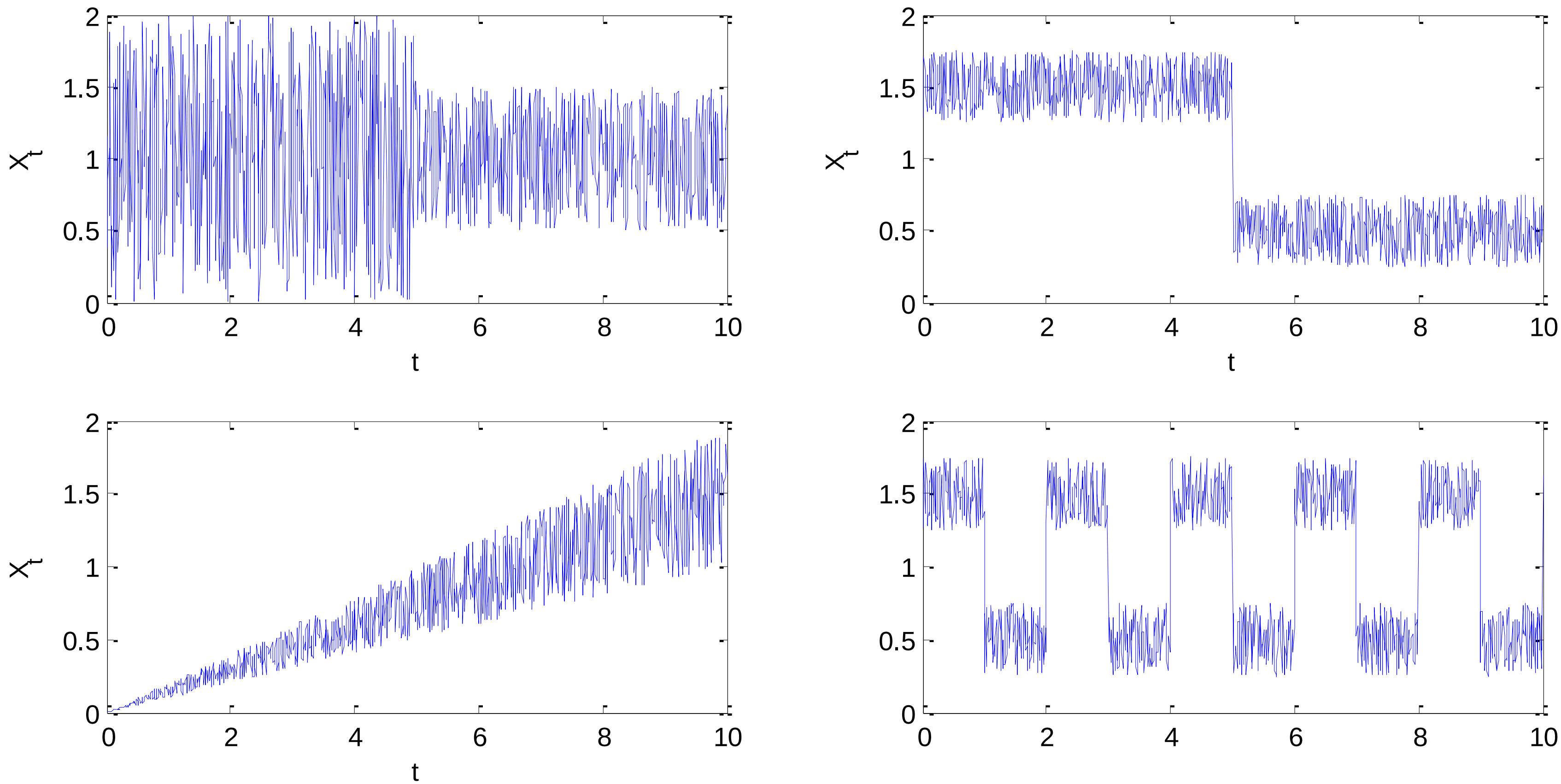


אם האות סטציונרי, מספר ה-runs שהתקבל נמצא בתחום [7,16] בהסתברות 95%.

בדוגמה קיבלנו שמספר ה-runs הוא 6, ולכן האות לא סטציונרי עבור רמת המובהקות הנתונה.

דוגמאות - Runs Test

האם האותות הבאים יהיו סטציונריים לפי Runs test?



Runs Test - תשובות

ייכשל במבחן עבור הממוצע,
אלא אם נבחר מעט מדי מקטעים

ייכשל במבחן עבור השונות,
אלא אם נבחר מעט מדי מקטעים

תלוי מאד בחלוקה למקטעים:
אם אורך המקטע מכיל חצי מחזור למשל,
האות ייכשל במבחן,
ואם לא – עלול לעבור

ייכשל גם במבחן עבור הממוצע
וגם במבחן עבור השונות,
אלא אם נבחר מעט מדי מקטעים

דוגמה למימוש Runs Test

- נניח נתון התהליך הבא:

$$X(t) = A \cdot t + B$$

- כאשר A ו-B מ"א המתפלגים בצורה הבאה:

$$A \sim N(0,1)$$
$$B \sim U\left[-1,1\right]$$

- שאלה: האם התהליך X הוא סטציונרי במובן הצר/הרחב?

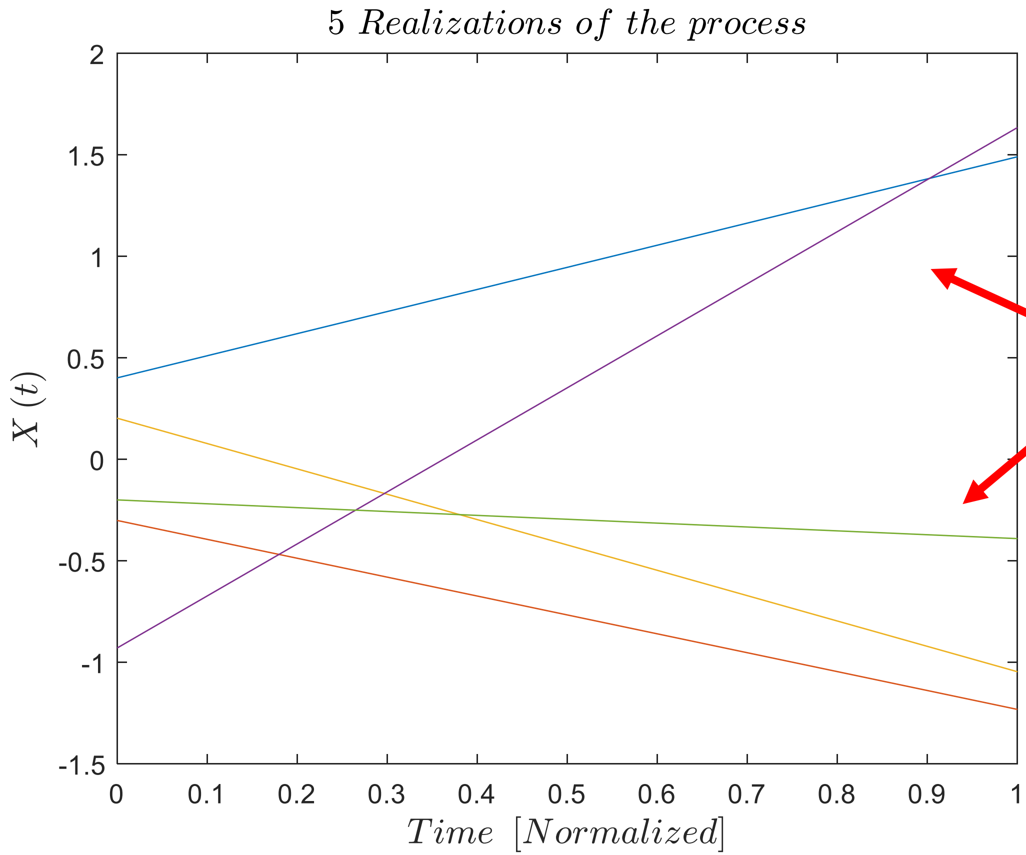
דוגמה למימוש Runs Test

- דוגמה לחישוב פונקציות מדגם:

```
%% Runs Test
%% demo example for Tutorial 1
% Elias Nehme, 19/03/2019

% start with a clean slate
close all; clear all; clc;

% normalized time axis
t = linspace(0,1,1000);

% number of realizations
numR = 5;

% numR realizations X(t)
for i=1:numR

    % N(0,1)
    A = randn(1);

    % U[-1,1] = 2*(U[0,1]-0.5)
    B = 2*(rand(1)-0.5);

    % X(t) = A*t + B
    Xt = A.*t + B*ones(size(t));

    % plot current time sample
    figure(100);
    plot(t,Xt);
    hx = xlabel('$Time \ \left[Normalized\right]$');
    hy = ylabel('$X\left(t\right)$');
    ht = title(['$' num2str(numR) ' \ Realizations \ of \ the \ process$']);
    hold on;
    set([hx,hy,ht],'interpreter','latex','FontSize',13);
    drawnow;
end

```

דוגמה למימוש Runs Test

- נסתכל על כמה פונקציות מדגם של התהליך X:



סטציונרי במובן הצר?

לא!

דוגמה למימוש Runs Test

• דוגמה לחישוב ה-"runs":

```
%% Runs Test on the last sample function

% E[X(t)] of the full signal
EX = mean(Xt);

% Var(X(t)) of the full signal
VarX = var(Xt);

% choose number of segments
Nsegments = 20;

% segment length for X(t)
Lx = length(Xt)/Nsegments;

% prepare indicator matrix
Indicator = zeros(2,Nsegments);

% run the test
for i=1:Nsegments
    Xseg = Xt((i-1)*Lx+1:i*Lx);
    EXseg = mean(Xseg);
    Indicator(1,i) = 2*(EXseg > EX)-1;
    VarXseg = var(Xseg);
    Indicator(2,i) = 2*(VarXseg > VarX)-1;
end

% count the runs
EXruns = sum(diff(Indicator(1,:)) ~= 0) + 1;
VarXruns = sum(diff(Indicator(2,:)) ~= 0) + 1;

% final decision based on the provided table in the tutorial and
% statistical significance (e.g. alpha=0.05)
```

תוחלת ושונות
האות כולו

מספר המקטעים

תוחלת ושונות כל מקטע
+ הסימן המתאים

מספר ה-runs

דוגמה למימוש Runs Test

Table A.6

Percentage Points of Run Distribution

Values of $r_{n;\alpha}$ such that Prob $[r_n > r_{n;\alpha}] = \alpha$, where $n = N_1 = N_2 = N/2$

	α					
$n = N/2$	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
5	2	2	3	8	9	9
6	2	3	3	10	10	11
7	3	3	4	11	12	12
8	4	4	5	12	13	13
9	4	5	6	13	14	15
$\boxed{10}$	5	$\boxed{6}$	6	15	$\boxed{15}$	16
11	6	7	7	16	16	17
12	7	7	8	17	18	18
13	7	8	9	18	19	20
14	8	9	10	19	20	21
15	9	10	11	20	21	22
16	10	11	11	22	22	23
18	11	12	13	24	25	26
20	13	14	15	26	27	28
25	17	18	19	32	33	34
30	21	22	24	37	39	40
35	25	27	28	43	44	46
40	30	31	33	48	50	51
45	34	36	37	54	55	57
50	38	40	42	59	61	63
55	43	45	46	65	66	68
60	47	49	51	70	72	74
65	52	54	56	75	77	79
70	56	58	60	81	83	85
75	61	63	65	86	88	90
80	65	68	70	91	93	96
85	70	72	74	97	99	101
90	74	77	79	102	104	107
95	79	82	84	107	109	112
100	84	86	88	113	115	117

- עבור הריאליזציה האחרונה אם בוחרים את מספר המקטעים להיות N=20 מקבלים:
  - שני runs עבור התוחלת
  - run יחיד עבור השונות
- עבור רמת מובהקות של 0.05 מקבלים את שני השברונים 6 ו-15, כלומר אם האות סטציונרי, מספר ה-runs שהתקבל נמצא בתחום [6,15] בהסתברות 95%.
- בדוגמה קיבלנו שמספר ה-runs הוא 1/2, ולכן כצפוי האות לא סטציונרי עבור רמת המובהקות הנתונה.

מה היה לנו היום?

- ✓ מושגים בסיסיים בהסתברות
- ✓ תהליכים אקראיים
- ✓ המקרה הגאוסי
- ✓ סטציונריות
- ✓ ארגודיות
- ✓ Runs Test

תרגול 2 – חזרה על עיבוד אותות ספרתי

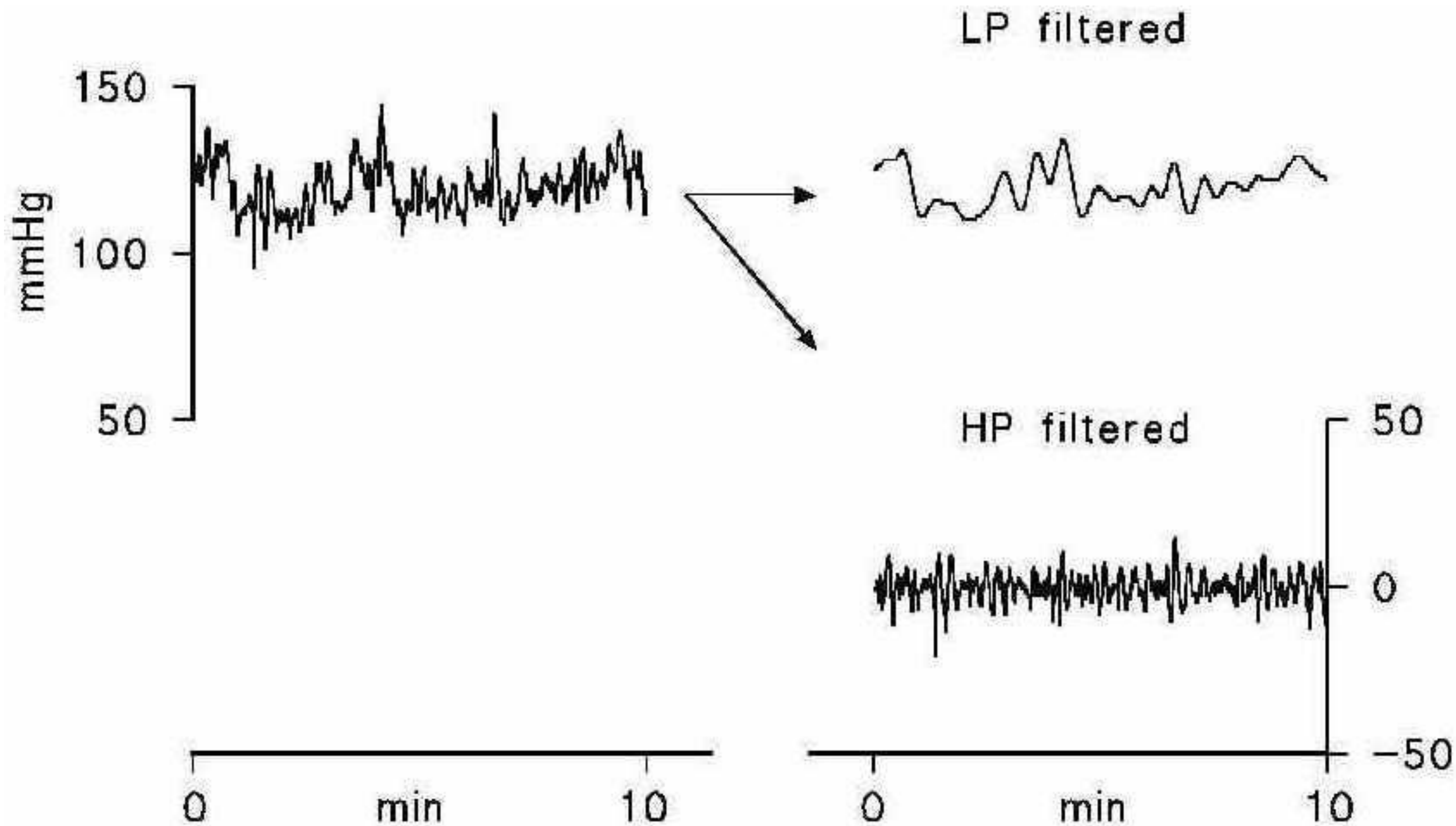
בתכנית

- קצת אותות ומערכות
- התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- התמרת Z
- מערכות FIR ו- IIR
- מסננים
- הפקודה filtfilt

בתכנית

- קצת אותות ומערכות
- התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- התמרת Z
- מערכות FIR ו- IIR
- מסננים
- הפקודה filtfilt

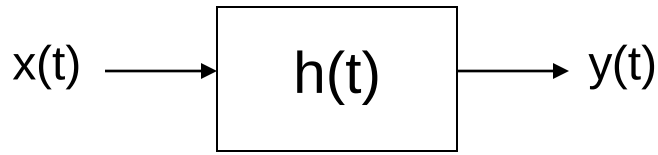
מוטיבציה



Decomposition of systolic blood pressure series in two components containing fluctuations with period greater and lower than 40 seconds by using low-pass (LP) and high-pass (HP) filters.

אותות ומערכות

- מערכת: קופסה שחורה המקשרת בין כניסה למוצא.



- מאפיינים:
  - ליניאריות: $x_3(t)=a\cdot x_1(t)+b\cdot x_2(t) \;\Rightarrow\; y_3(t)=a\cdot y_1(t)+b\cdot y_2(t)$
  - קביעות בזמן: $x_2(t)=x_1(t-T) \;\Rightarrow\; y_2(t)=y_1(t-T)$
  - סיבתיות: $y(t_0)=f\left(x\left(t\le t_0\right)\right)$
  - חוסר זיכרון: $y(t_0)=f\left(x(t_0)\right)$

מערכת LTI

- המקרה הפשוט: מערכת ליניארית קבועה בזמן – Linear Time Invariant (LTI).

$$y(t)=\{x*h\}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

קונבולוציה

- $h(t)$ נקראת תגובת המערכת להלם.

$$x(t)=\delta(t)\longrightarrow\boxed{\text{h(t)}}\longrightarrow y(t)=h(t)$$

בתכנית

- ✓ קצת אותות ומערכות
- התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- התמרת Z
- מערכות FIR ו- IIR
- מסננים
- הפקודה filtfilt

התמרת פורייה CTFT

- התמרה ישירה:

$$X^F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \ ; \ t,\omega\in\mathbb{R}$$

- התמרה הפוכה:

$$x(t)=\boxed{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- התמרות ידועות:

$$x(t)=\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X^F(\omega)=1$$

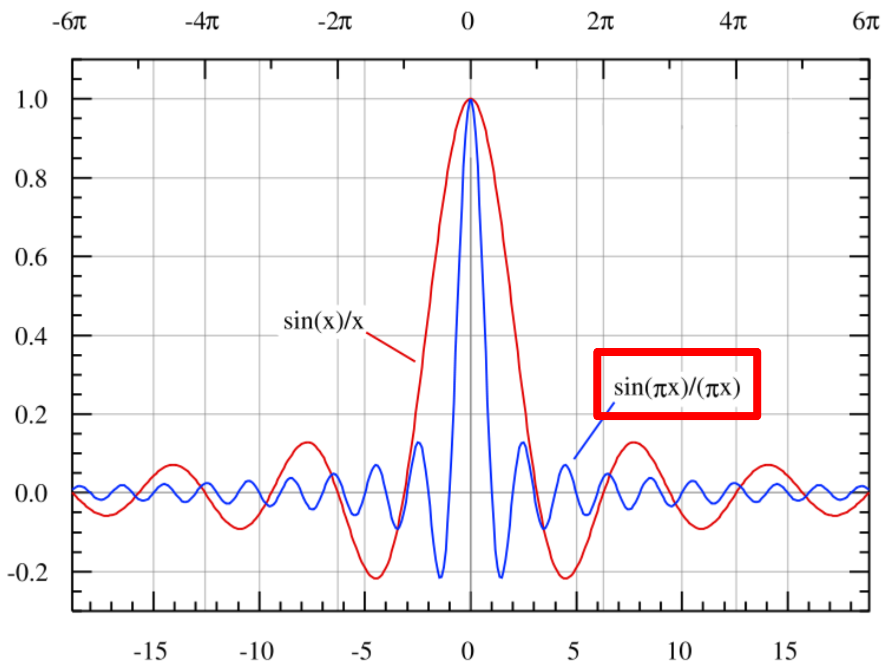
$$x(t)=1 \quad \Leftrightarrow \quad X^F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$x(t)=\cos(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad X^F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$x(t)=\sin(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad X^F(\omega)=j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

התמרת חלון

$$x(t)=rect\left(\frac{t}{2\pi}\right)=\begin{cases}1, & |t|<\pi\\ 0.5, & |t|=\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases} \Leftrightarrow X^{F}(\omega)=2\pi\cdot sinc(\omega)=\begin{cases}2\pi\cdot\dfrac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}, & t\neq 0\\ 2\pi, & t=0\end{cases}$$



תכונות התמרת פורייה

- ליניאריות: $z(t)=a\cdot x(t)+b\cdot y(t)\Leftrightarrow Z^F(\omega)=a\cdot X^F(\omega)+b\cdot Y^F(\omega)$
- הזזה בזמן: $y(t)=x(t-a)\Leftrightarrow Y^F(\omega)=e^{-ja\omega}\cdot X^F(\omega)$
- מודולציה: $y(t)=e^{ja\omega}x(t)\Leftrightarrow Y^F(\omega)=X^F(\omega-a)$
- :Scaling $y(t)=x(a\cdot t)\Leftrightarrow Y^F(\omega)=\frac{1}{|a|}X^F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- אות ממשי ← התמרה סימטרית
- אות סימטרי ← התמרה ממשית
- שימור אנרגיה: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$
- משפט הקונבולוציה: $\boxed{y(t)=\{x*h\}(t)\Rightarrow Y^F(\omega)=X^F(\omega)\cdot H^F(\omega)}$

$$\boxed{y(t)=x(t)\cdot h(t)\Rightarrow Y^F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{X^F*H^F\}(\omega)}$$

H^F תגובת התדר
של המערכת

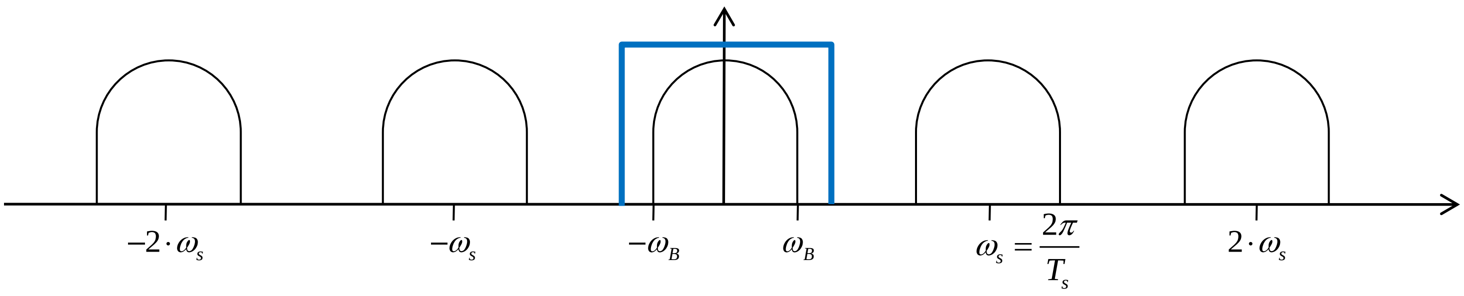
השלכות הדגימה על ציר התדר

- בדגימה במרווח T_s , מתקבל תדר דגימה $f_s = \frac{1}{T_s}$
- כיצד נראה הדבר בציר התדר?
- האות הדגום – אות רציף המוכפל ברכבת הלמים

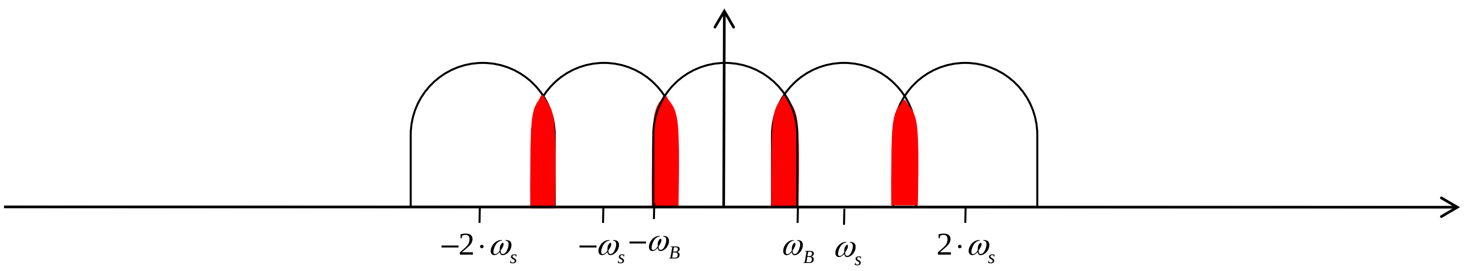
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s) \Rightarrow G^F(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right)$$

- לפי משפט הקונבולוציה: שקול לקונבולוציה בין התמרת האות להתמרת רכבת ההלמים..מה קיבלנו? שכפולים מוזזים של התמרת האות!

דגימה = שכפולים בציר התדר

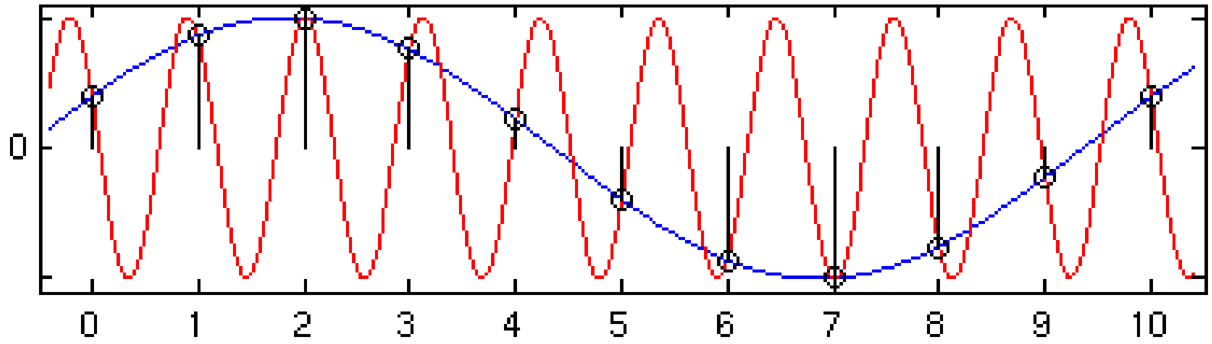


- חפיפה בין השכפולים = aliasing



- באיזורי החפיפה – לא ניתן לשחזר את האות ללא מידע נוסף.

Aliasing - ("קיפול") התחזות



- מכאן: משפט Nyquist - ע"מ לשחזר אות בעל תדר מקסימלי של f_B, יש לדגום אותו בתדר כפול לכל הפחות.

$$\boxed{f_s > 2 \cdot f_B}$$

ייצוג דיגיטלי

- לא ניתן לייצג אות בזמן רציף באופן דיגיטלי (במחשב)

צריך לדגום!

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

- נהוג להציגה במשתנה $\theta = \omega \cdot T_s = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$ שבו היא מחזורית במחזור 2π

$$X^f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n} \qquad \theta \in [-\pi, \pi)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^f(\theta) e^{+j\theta n} d\theta \qquad n \in Z$$

- בד"כ מציגים רק מחזור אחד בתחום $[-\pi, \pi)$.

- עדיין לא אות שאפשר לייצג במחשב.

דיסקריטיזציה בזמן

דגימה

אות בזמן רציף x(t) ⟵ אות בזמן בדיד x[n]

CTFT ↓   DTFT ↓

שכפולים והזזות

התמרת פוריה $X^F(\omega)$ ⟵ התמרת DTFT $X^f(\theta)$

ייצוג דיגיטלי

- לא ניתן לייצג אות בזמן רציף באופן דיגיטלי (במחשב)

צריך לדגום!

- לא ניתן לייצג אות בעל תמך אינסופי במחשב (צריך נפח אחסון אינסופי...)

האות חייב להיות בעל תמך סופי!

- לכן, כל אות שמיוצג במחשב יהיה דגום ובעל תמך סופי.

Discrete Fourier Transform (DFT)

- מתאימה לאות בדיד בעל תמך (אורך) סופי.
- בהינתן אות $x[n]$ בדיד בעל N דגימות, ה-DFT יוגדר כ-

$$X^d[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad 0\le k\le N-1$$

כמו ב-MATLAB!

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^d[k]e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad 0\le n\le N-1$$

- קשר ל- DTFT: $X^d[k]=X^f(\theta[k]),\quad \theta[k]=\frac{2\pi}{N}k,\ 0\le k\le N-1$
- זוהי דגימה של ה-DTFT בציר התדר!

Discrete Fourier Transform (DFT)

- דגימה בתדר ← שכפולים בזמן.
- משמעות: אות בעל תמך סופי N שקול לאות מחזורי ב- N.

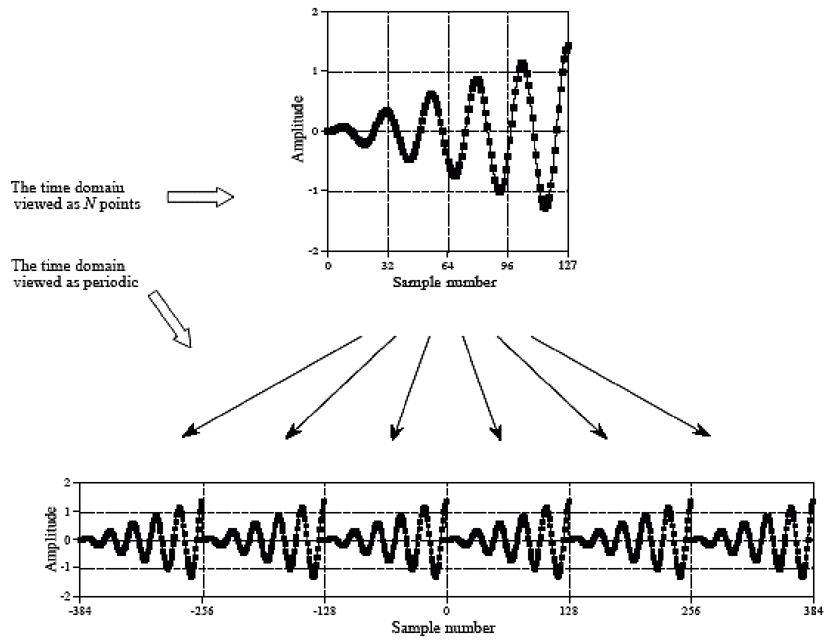


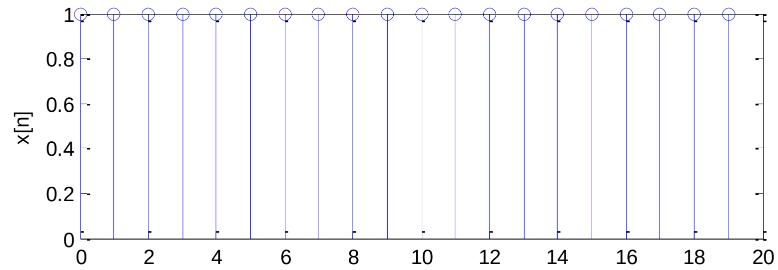
FIGURE 10-8
Periodicity of the DFT's time domain signal. The time domain can be viewed as N samples in length, shown in the upper figure, or as an infinitely long periodic signal, shown in the lower figure.

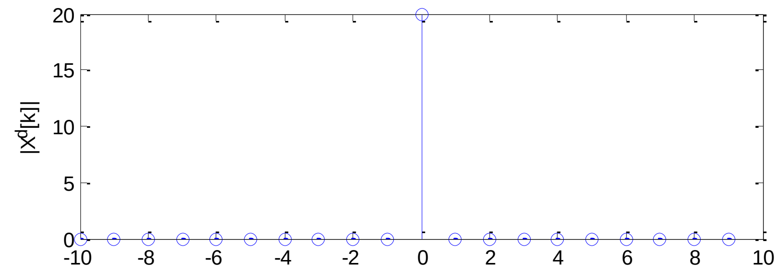
DFT - דוגמא

- נסתכל על אות קבוע $x[n]=1,\ n=0,1,\ldots,N-1$

```
>>   x = ones(1,N);
>>   X = fft(x);
>>   stem(abs(fftshift(X)));
```

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & o.w.\end{cases}$$





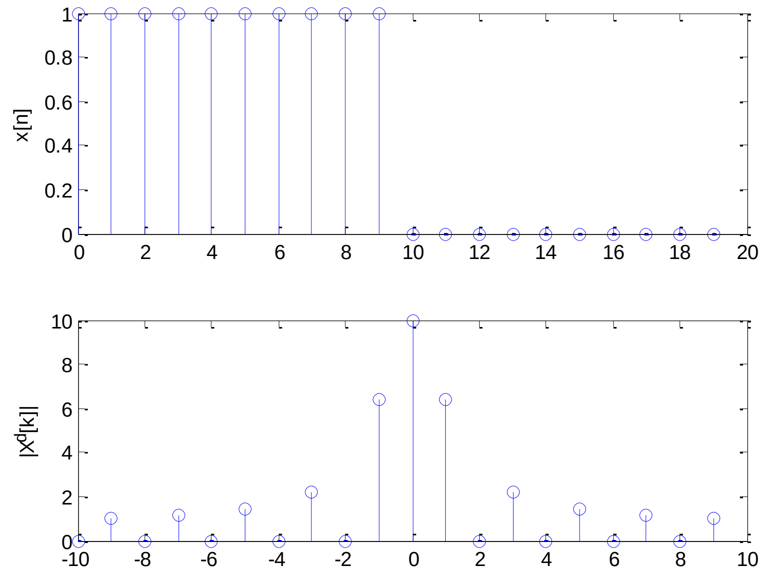
- קיבלנו דלתא מאחר וההרחבה המחזורית שווה בדיוק ל-1 לכל n

DFT - דוגמא

- כעת, נסתכל על חלון מלבני

$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0,\ldots,N-1\\ 0 & n=N,\ldots,2\cdot N-1\end{cases}$$

```
>>   x = [ones(1,N), zeros(1,N)];
>>   X = fft(x);
>>   stem(abs(fftshift(X)));
```



- קיבלנו Dirichlet, פונקציה דמוית sinc: בדגימה של אות חלון, ה-sinc בתדר משתכפל ומסתכם.

התמרות פוריה

- **CTFT** - אות בזמן רציף, תמך אינסופי - תדר רציף, אינסופי

$$x(t) \;;\; t \in R$$

$$X^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \;;\; \omega \in R$$

- **DTFT** - אות בזמן בדיד, תמך אינסופי - תדר רציף, סופי

$$x[n] \;;\; \mathrm{n} \in N$$

$$X^f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n} \;;\; \theta \in [-\pi, \pi)$$

$$\theta = \pi \Rightarrow f_{\max} = \frac{f_s}{2}$$

f_s תדר דגימה

- **טור פורייה** - אות בזמן רציף, תמך סופי / אות מחזורי בזמן רציף - תדר בדיד, אינסופי

$$x(t) \;;\; t \in [a, b)$$

$$X^D[k] = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) e^{-j\frac{2\pi}{b-a} \cdot k \cdot t} dt$$

- **DFT** - אות בזמן בדיד, תמך סופי / אות מחזורי בזמן בדיד - תדר בדיד, סופי

$$x[n] \;;\; n \in N \;,\; 0 \le n \le N-1$$

$$X^d[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \;;\; 0 \le k \le N-1$$

רזולוציה בתדר - $\Delta f = \dfrac{1}{N \cdot T_s} = \dfrac{f_s}{N}$

N מספר דגימות

הגדרת ציר התדר ב-MATLAB

- ערך מקסימלי בציר התדר ← לפי תנאי נייקוויסט

- רזולוציה בתדר:

מהקשר בין DTFT ל-DFT:

$$\theta[k]=\frac{2\pi}{N}\cdot k \rightarrow \Delta\theta=\frac{2\pi}{N}$$

מהקשר בין DTFT לפורייה רציף:

$$\omega=\frac{\theta}{T_s} \rightarrow \Delta\omega=\frac{\Delta\theta}{T_s}$$

$$\Delta f=\frac{\Delta\omega}{2\pi} \rightarrow \boxed{\Delta f=\frac{1}{N\cdot T_s}=\frac{1}{T_{total}}}$$

בתכנית

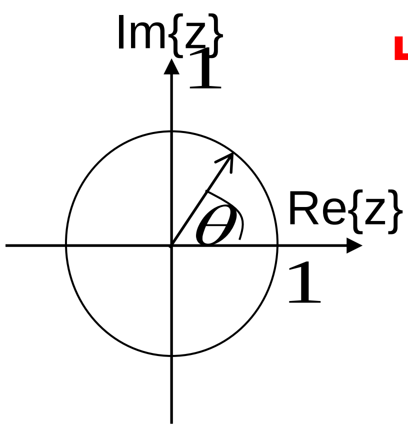
- ✓ קצת אותות ומערכות
- ✓ התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- התמרת Z
- מערכות FIR ו- IIR
- מסננים
- הפקודה filtfilt

התמרת Z

- הגדרה: $X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$

- כאשר $z = e^{j\theta}$ מקבלים את התמרת ה-DTFT:

$$X\left(z = e^{j\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \left(e^{j\theta}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\theta n} = X^{f}\left(e^{j\theta}\right)$$



- DTFT = ערכי התמרת Z על מעגל היחידה במישור המרוכב!

התמרת Z

- תכונות חשובות:
  - ליניאריות
  - הזזה "בזמן":

$$w[n]=x[n-m] \quad \Rightarrow \quad W(z)=Z\{w[n]\}=z^{-m}\cdot X(z)$$

  - משפט הקונבולוציה:

$$y[n]=\{x*h\}[n] \quad \Rightarrow \quad Y(z)=Z\{y[n]\}=X(z)\cdot H(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

פונקצית התמסורת
של המערכת H

בתכנית

- ✓ קצת אותות ומערכות
- ✓ התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- ✓ התמרת Z
- מערכות FIR ו- IIR
- מסננים
- הפקודה filtfilt

מערכות FIR ו- IIR

- מערכת LTI **סיבתית** כללית ניתנת לתיאור ע"י:

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{p}a_k y[n-k]+\sum_{l=0}^{q}b_l x[n-l]$$

- נבחין בין שני מקרים:
  - $a_k=0,\ \forall k$, היציאה תלויה במספר סופי של ערכי כניסה. תגובת ההלם סופית, FIR – Finite Impulse Response.
  - $\exists k,\ a_k\neq 0$, היציאה תלויה בערכי עבר של היציאה, כלומר באינסוף ערכי כניסה. תגובת ההלם אינסופית, IIR – Infinite Impulse Response.

מערכות FIR ו- IIR במישור Z

- לאחר התמרת Z נקבל עבור מע' LTI סיבתית:

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot z^{-k} Y(z) + \sum_{l=0}^{q} b_l \cdot z^{-l} X(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q} b_l \cdot z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot z^{-k}}$$

- נהוג לסמן: $B\left(z^{-1}\right) = \sum_{l=0}^{q} b_l \cdot z^{-l} \quad , \quad A\left(z^{-1}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot z^{-k}$

$$\boxed{H(z) = \frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)}}$$

- עבור מערכת FIR נקבל: $H(z) = \sum_{l=0}^{q} b_l \cdot z^{-l}$

אפסים וקטבים

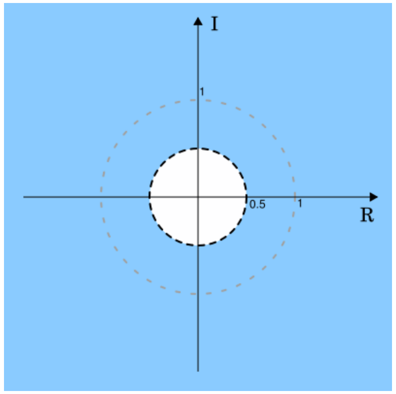
- האפסים של פונקציית התמסורת הם ערכי z עבורם $H(z)=0$. אלו הם האפסים של הפולינום B.
- הקטבים של פונקציית התמסורת הם ערכי z עבורם המכנה של H מתאפס. אלו הם האפסים של הפולינום A.
- ניתן לאפיין מערכת LTI בזמן בדיד מתוך האפסים והקטבים שלה.
- למערכת FIR אין קטבים.
- אפסים נהוג לסמן ב- o וקטבים ב- x.
- תחום ההתכנסות של התמרת Z.

תחום התכנסות התמרת Z

- תחום ההתכנסות של ההתמרה הוא קבוצת הנקודות במישור המרוכב בהן ההתמרה סופית:

$$ROC = \left\{ z : \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right| < \infty \right\}$$

- מקרה פרטי שיעניין אותנו הוא התמרת Z עבור מערכות סיבתיות:



$$h[n] = (0.5)^n , \ \ \forall n \geq 0$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

- יציבה?

כן!

מערכות FIR

- תיאור סכמאטי:

$$y[n]=\sum_{l=0}^{q} b_l x[n-l]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{b_n} \longrightarrow y[n]$$

- במישור Z:

$$Y(z)=\sum_{l=0}^{q} b_l z^{-l} \cdot X(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z)=X(z)\sum_{l=0}^{q} b_l z^{-l}$$

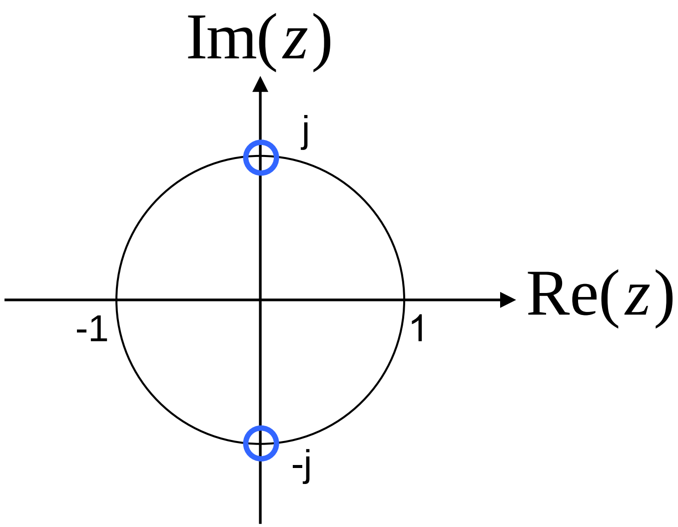
$$\Leftrightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{l=0}^{q} b_l z^{-l}$$

דוגמאות למערכות FIR

- נניח מערכת FIR כזו: $h[0]=\frac{1}{2},\ h[1]=0,\ h[2]=\frac{1}{2}$
  – מהי היציאה במונחים של הכניסה?
- התמרת Z של תגובת ההלם:

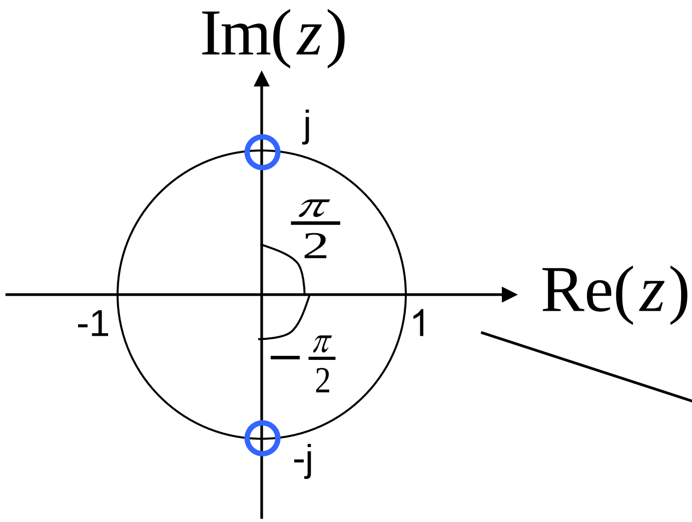
$$H(z)=\frac{1}{2}\cdot z^{0}+0\cdot z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}=\frac{1}{2}\left(z^{-2}+1\right)=\frac{z^{-2}}{2}(z-j)(z+j)$$

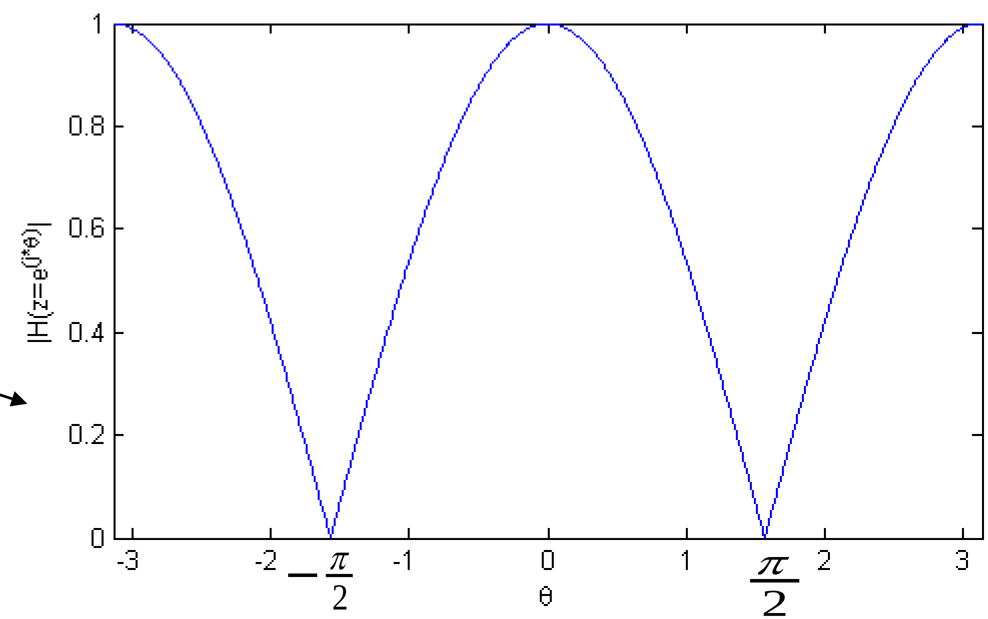
- למערכת שני אפסים ב- $z=\pm j$
- נצייר אותם על גבי מישור קומפלקסי:



דוגמאות למערכות FIR

- אפסים על מעגל היחידה מתורגמים לאפסים ממש בתגובת התדר – קובעים כיצד תיראה תגובת התדר!



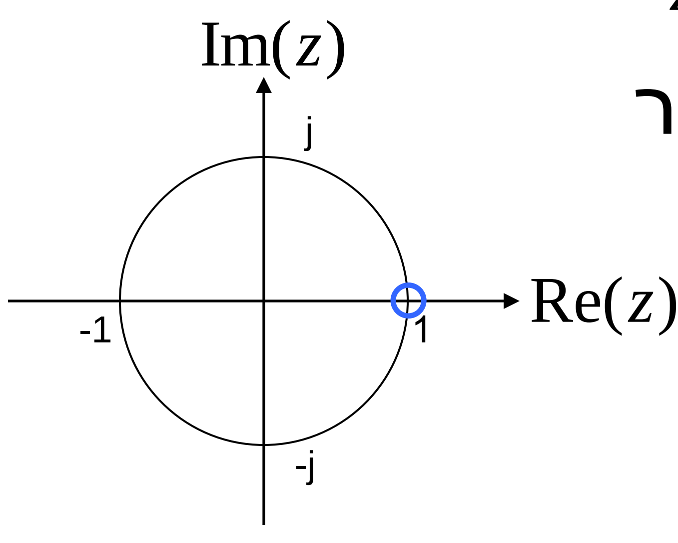


- מה סוג המסנן?

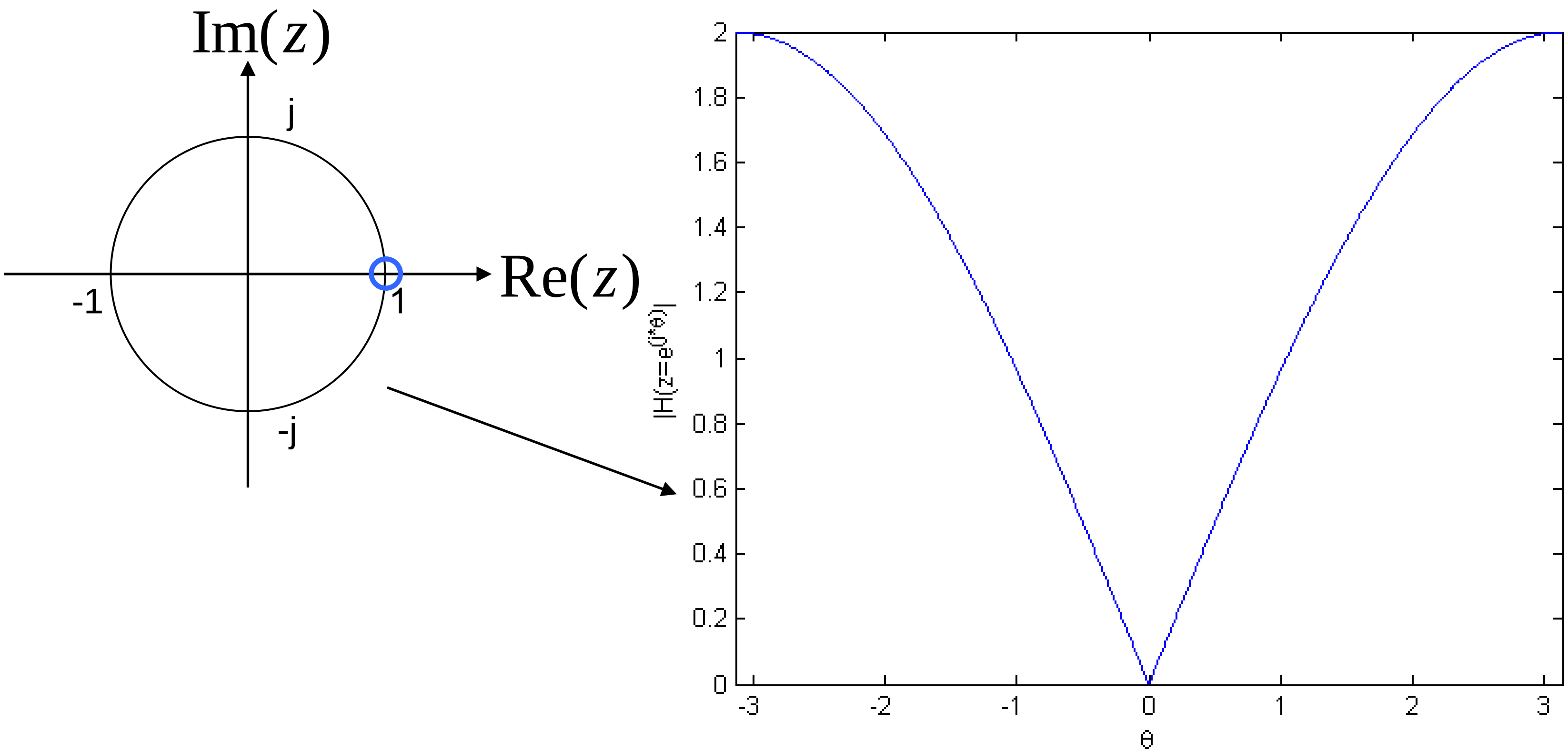
המסנן מנחית תדרי ביניים – Band Stop (BS) Filter

דוגמאות למערכות FIR

- נניח מערכת FIR כזו: $h[0]=-1,\ h[1]=1$
  - מהי היציאה במונחים של הכניסה?
- התמרת Z של תגובת ההלם: $H(z)=-1\cdot z^{0}+1\cdot z^{-1}=$
  $=z^{-1}-1$
- למערכת אפס אחד $z=1$
- נצייר אותו על גבי מישור קומפלקסי:



דוגמאות למערכות FIR



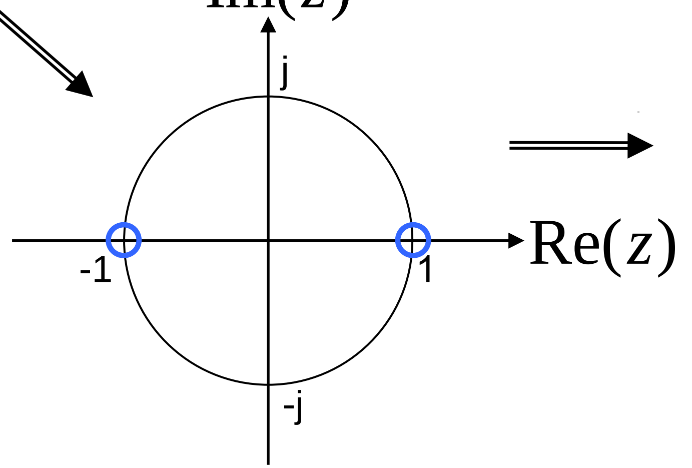
- מה סוג המסנן? המסנן מעביר תדרים גבוהים ומנחית נמוכים: High Pass Filter (HP)

נגזרת (או הפרש) שקולה למסנן מעביר גבוהים!

תכנון מערכת FIR

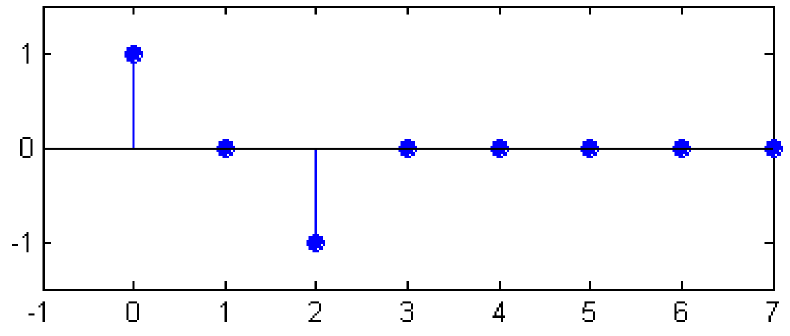
- נניח שאנו רוצים לתכנן מערכת Band Pass Filter (BP) – מסנן מעביר פס.
- נקבע אפס אחד לתדרים הנמוכים ואפס אחד לתדרים הגבוהים:

$z = \pm 1$



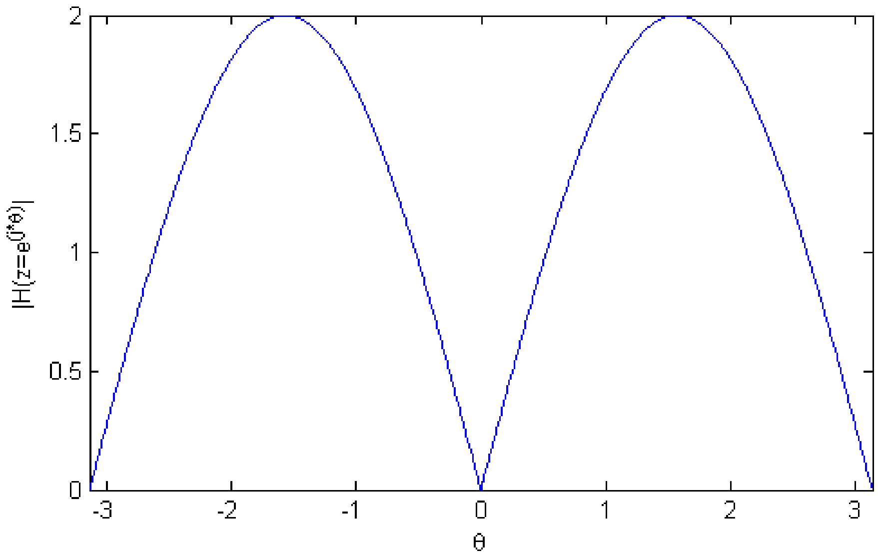
$$H(z) = z^{-2}(z-1)(z+1) = 1 - z^{-2}$$

$$\Rightarrow\ h[0] = 1,\ h[1] = 0,\ h[2] = -1$$



תכנון מערכת FIR

- קיבלנו את תגובת התדר הבאה:



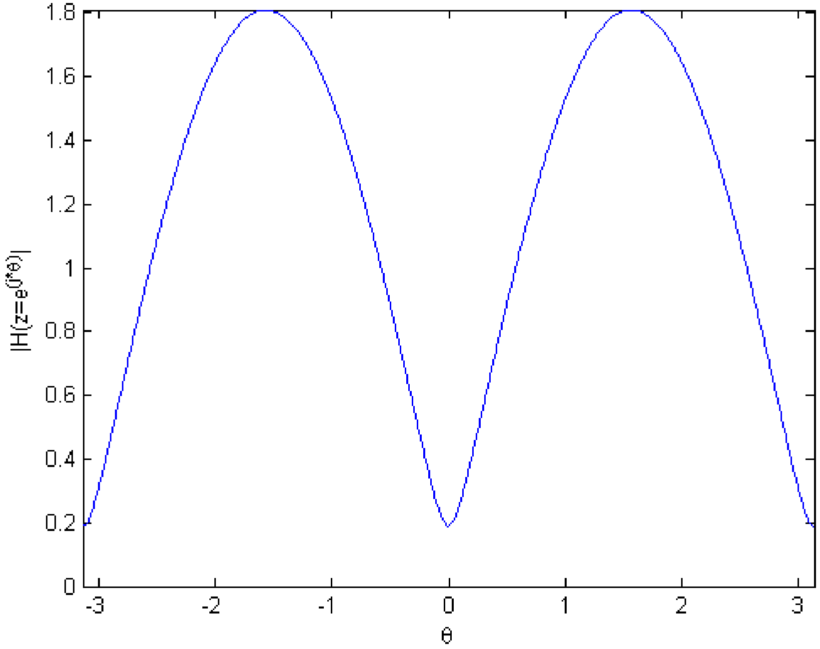
- כיצד תשתנה התגובה אם האפסים לא ישבו בדיוק על מעגל היחידה?

$$H\left(z\right)=z^{-2}\left(z-0.9\right)\left(z+0.9\right)=1-0.81z^{2}$$

$$\Rightarrow\ h\left[0\right]=1,\ h\left[1\right]=0,\ h\left[2\right]=-0.81$$

תכנון מערכת FIR

כיצד תשתנה התגובה אם האפסים לא ישבו בדיוק על מעגל היחידה?



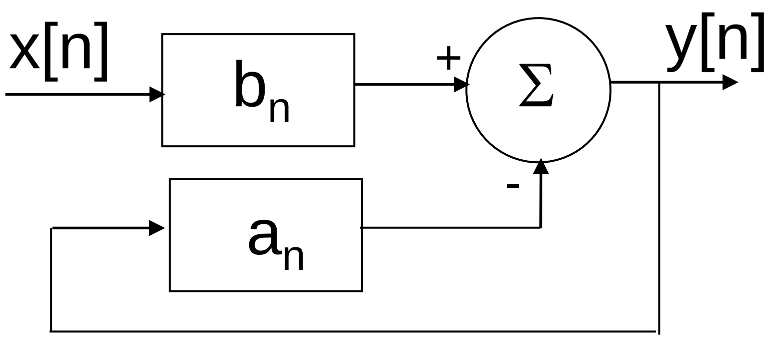
<u>מסקנה</u>: אפסים שלא על המעגל **עדיין** תורמים לעיצוב התגובה להלם דרך קרבתם למעגל.

מערכות IIR

$$H(z)=\frac{\sum_{l=0}^{q} b_l \cdot z^{-l}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot z^{-k}}$$

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{p} a_k y[n-k]+\sum_{l=0}^{q} b_l x[n-l]$$

- תיאור סכמאטי:

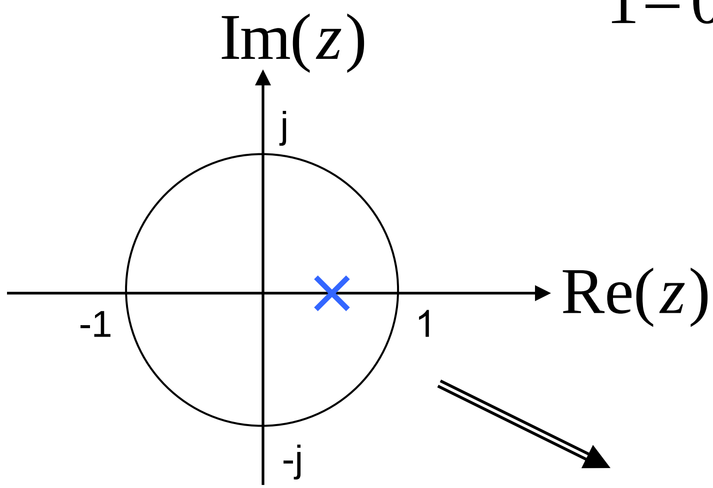


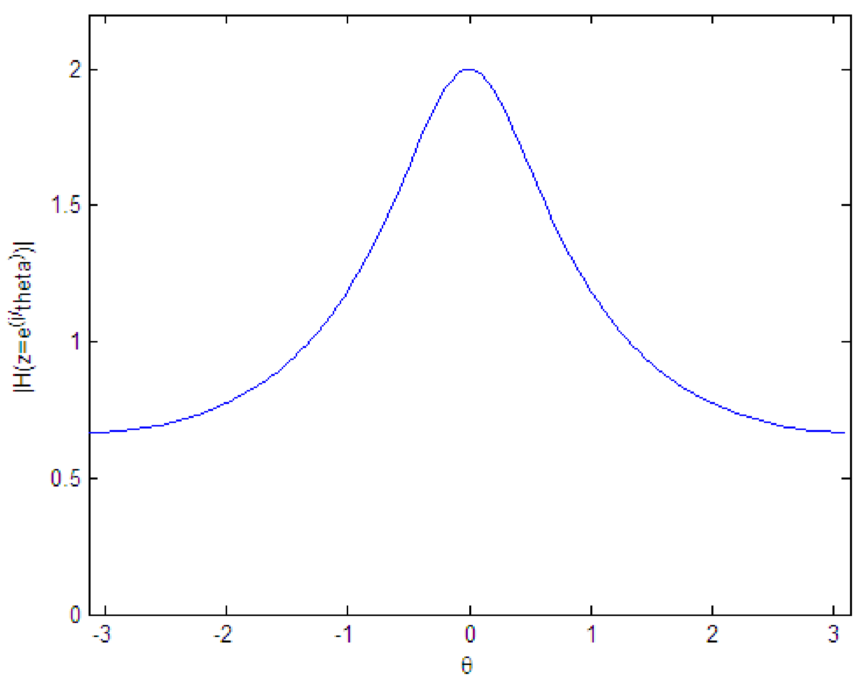
- למערכת IIR יש קטבים
- אילוץ: ע"מ שמערכת סיבתית תהיה יציבה, קטבי המערכת חייבים להיות **בתוך** מעגל היחידה.

דוגמא למערכת IIR

- נסתכל על מערכת שיש לה קוטב ב- $z = 0.5$:

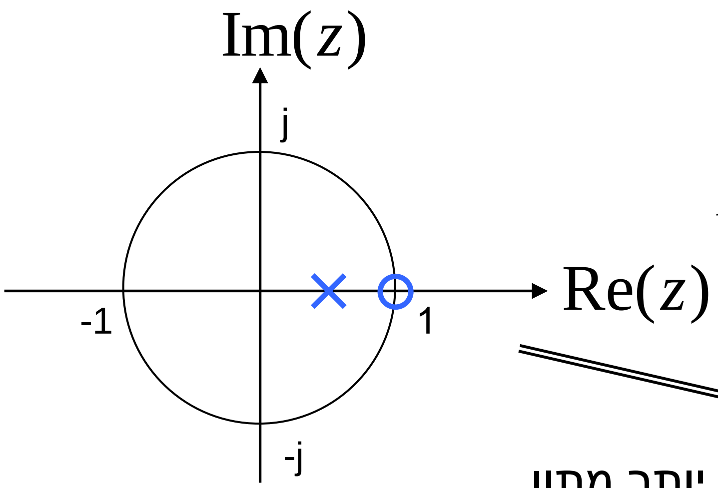
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ a_1 = -0.5 \end{cases}$$



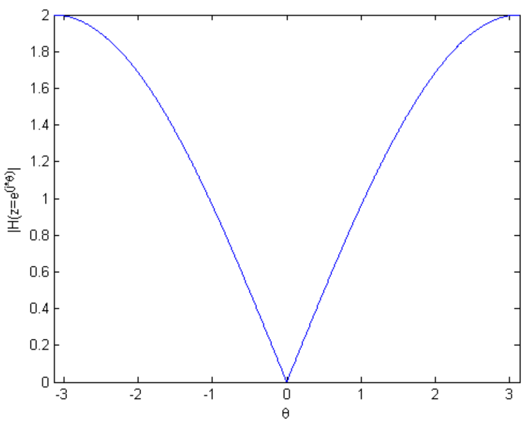


דוגמא למערכת IIR

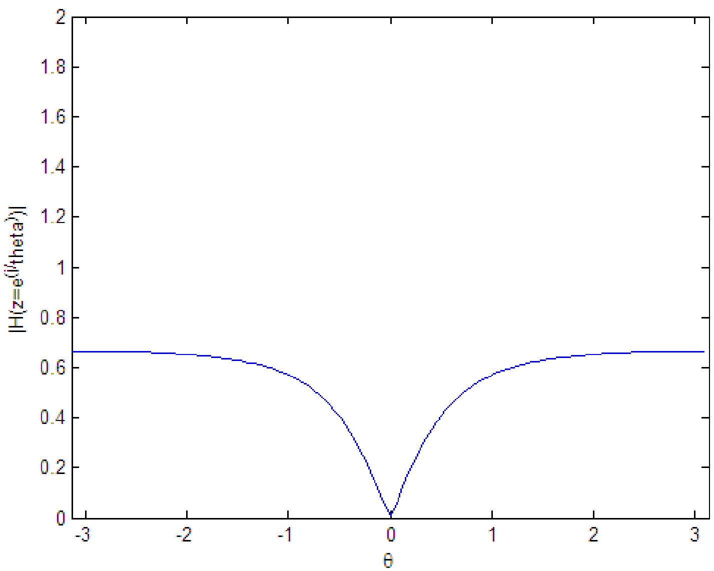
• נסתכל על מערכת שיש לה אפס ב- $z=1$, וקוטב ב- $z=0.5$:



$$H(z)=\frac{0.5\cdot\left(1-z^{-1}\right)}{1-0.5\cdot z^{-1}}\Rightarrow\begin{cases}b_0=0.5,\ b_1=-0.5\\ a_1=-0.5\end{cases}$$



הרבה יותר מתון
ממה שקיבלנו
ללא הקוטב



FIR לעומת IIR

- למה FIR טוב?
  - אין מגבלות יציבות
  - תגובת הלם סופית
  - פאזה לינארית

- למה IIR טוב?
  - פחות מקדמים – מקטין השהיה ועומס חישובי

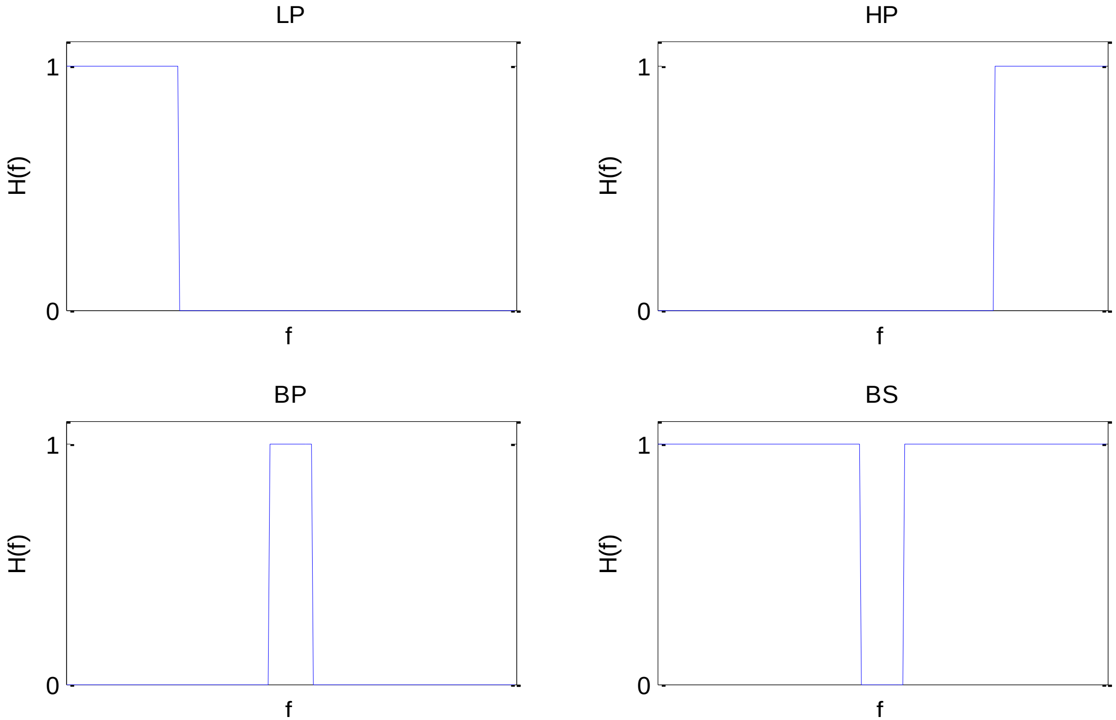
בתכנית

- ✓ קצת אותות ומערכות
- ✓ התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- ✓ התמרת Z
- ✓ מערכות FIR ו- IIR
- מסננים
- הפקודה filtfilt

מסננים

מסננים מאופיינים ע"י:

- pass band – תחום תדרים שבו האות מועבר עם Gain=1.
- stop band – תחום תדרים שהאות מונחת עם gain קרוב לאפס.
- transition band – תחום מעבר בין שני התחומים הנ"ל שבו נמצא גם cut-off frequency (חצי מהאנרגיה של האות מועברת).



דוגמאות לשימוש:

LP – הורדת רעשים בתדר גבוה, כאשר האות עצמו בתדר נמוך

HP – הורדת drift מהאות

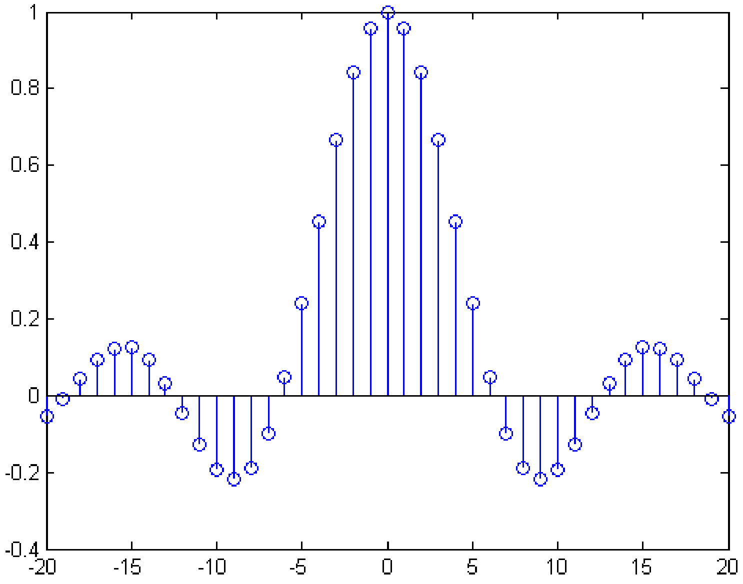
BP – תקשורת, העברה של מספר אותות דרך אותו ערוץ

BS – סינון של 50 הרץ – למה?

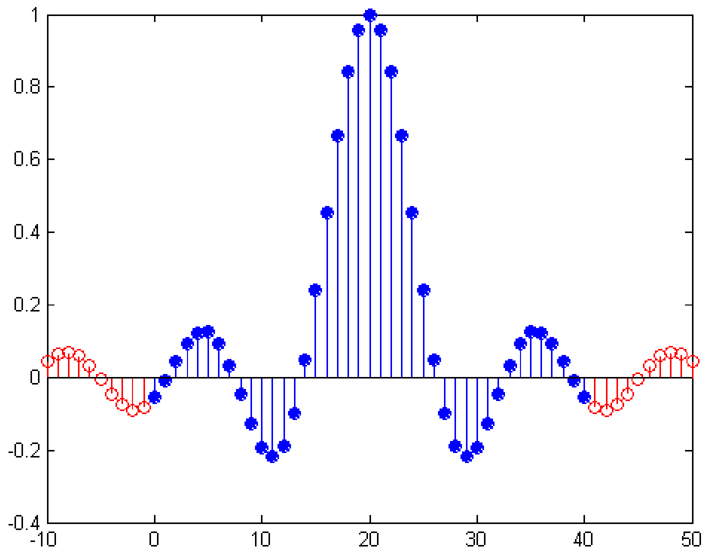
תדר הרשת!

מסנן אידיאלי?

- מסנן אידיאלי בתחום התדר הינו מסנן של חלון או חלונות בתדרים שרוצים להעביר.
- בעיה – מסנן כזה שווה ערך לפונקצית sinc בזמן; לא סיבתי.
- פתרון אפשרי: "לחכות" לתוצאה זמן מה (delay), ולחתוך איברים בעלי תרומה מועטה.



מסנן מעשי (FIR)



- מלבד השהייה, פתרון זה מכניס גם רעשים:

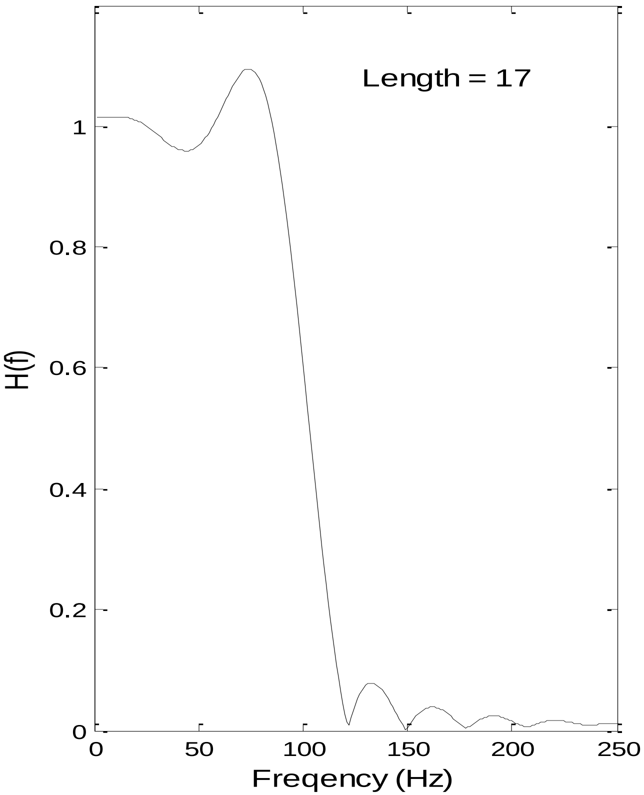
$$\tilde{h}[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n]$$

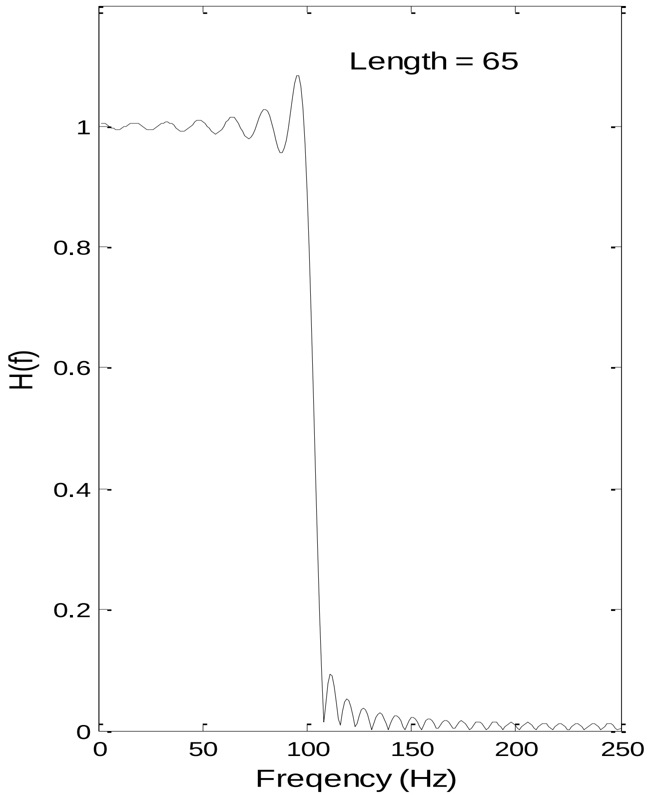
- מכפלה בחלון בזמן = קונבולוציה עם sinc בתדר

$$\tilde{H}^f(\theta) = H^f_{ideal}(\theta) * W^f(\theta)$$

- גורם להרחבת תחום המעבר ויצירת ripples באיזורי ההעברה/הסינון.

מסנן מעשי





מעט מקדמים גורמים למעט גליות, אך תחום מעבר רחב

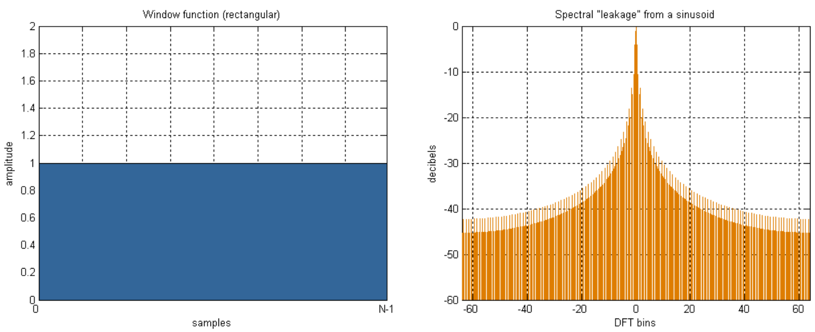
המון מקדמים גורמים לגליות רבה אך תחום המעבר חד

Tradeoff!

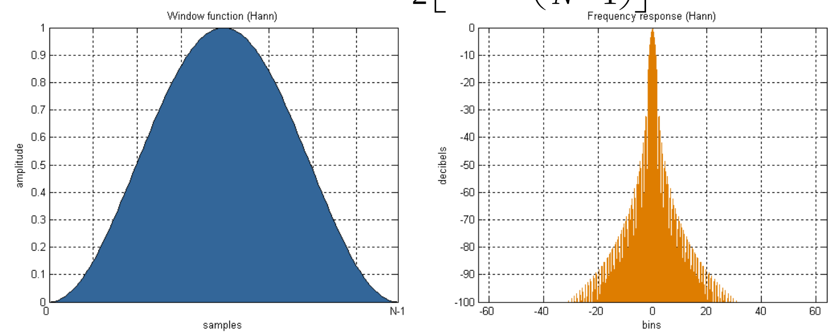
מסנן מעשי

- למרות זאת, נמצאו דרכים לשפר: ע"י שימוש בחלונות "מוזרים" לקטימה במקום בחלון מלבני.

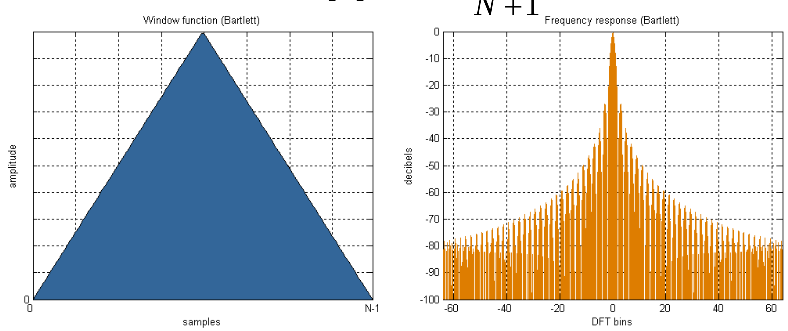
rectangular $w_r[n]=1\ ,\ 0\le n\le N-1$



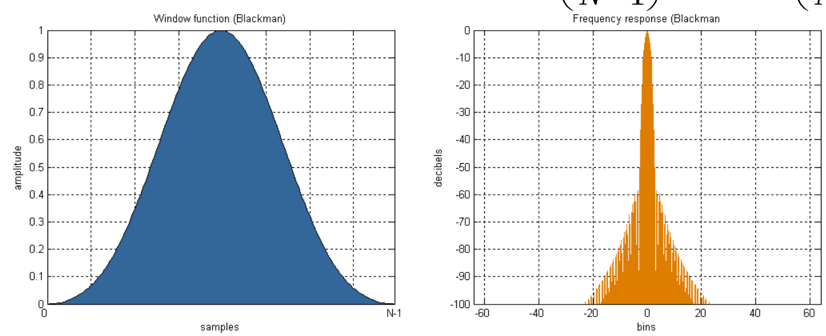
Hann $w_{hn}[n]=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\ ,\ 0\le n\le N-1$



bartlett $w_t[n]=1-\frac{|2n-N+1|}{N+1}\ ,\ 0\le n\le N-1$



Blackman $w_b[n]=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$



מימוש ב-MATLAB

- בהינתן וקטורים a,b של המקדמים, $y=\text{filter}\left(b,a,x\right)$ תיתן את פעולת הקונבולוציה של הכניסה x עם המערכת עם המקדמים המתאימים.
- ניתן לתכנן פילטר FIR בקלות ע"י:

$$b=\text{fir1}\left(n,wn,'\text{ftype}',\text{window}\right)$$

- n – סדר המסנן, wn – וקטור תדרי המעבר
  ‘ftype’ – סוג המסנן; ‘high’, ‘stop’...
  window – סוג החלון בו רוצים להשתמש (וקטור). אפשר ליצור בעזרת הפונקציות: blackman(L), hann(L), rectwin(L) וכו'.
- מהו a במקרה הזה? $a=1$!

מימוש ב-MATLAB

- ניתן לתכנן מסנן IIR מסוג Butterworth בקלות בעזרת הפונקציה:

$$y=\text{butter}\left(n,wn,'ftype'\right)$$

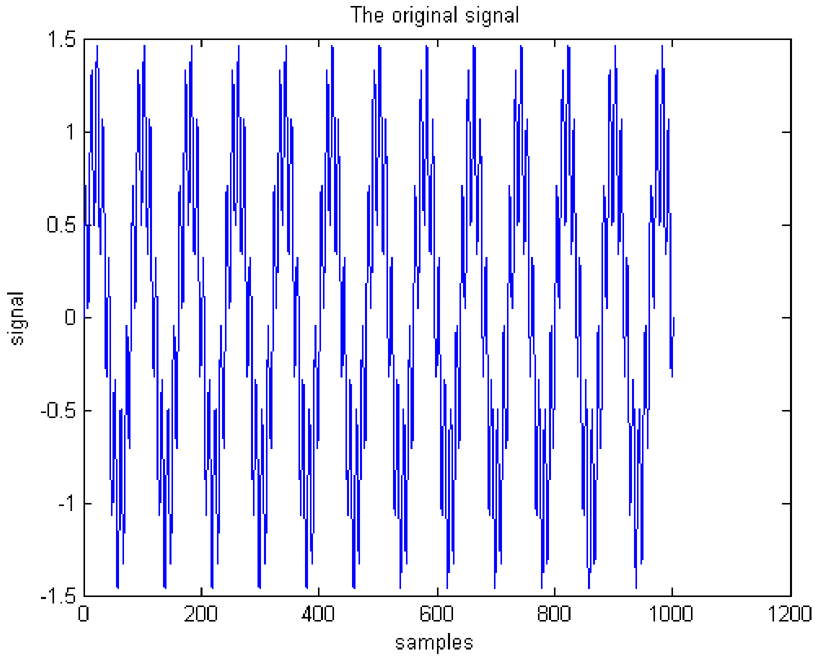
- ניתן גם להשתמש בפונקציות cheby1, cheby2 היוצרות מסננים מסוג Chebyshev.
- בעיקרון מסננים "אופטימלים" בימינו מתוכננים ע"י פתרון בעיות אופטימיזציה ותלויים באפליקציה.

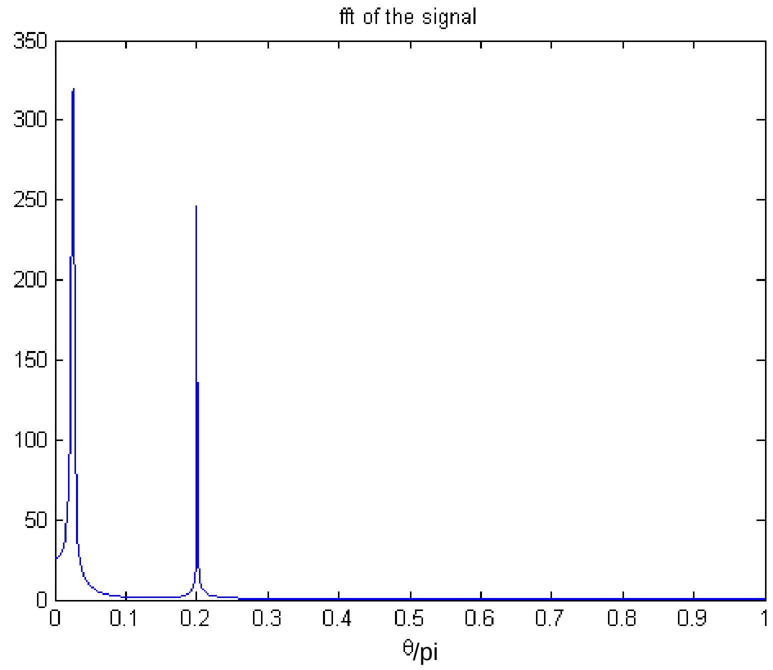
בתכנית

- ✓ קצת אותות ומערכות
- ✓ התמרות פורייה, דגימה ו- aliasing
- ✓ התמרת Z
- ✓ מערכות FIR ו- IIR
- ✓ מסננים
- הפקודה filtfilt

הפקודה filtfilt

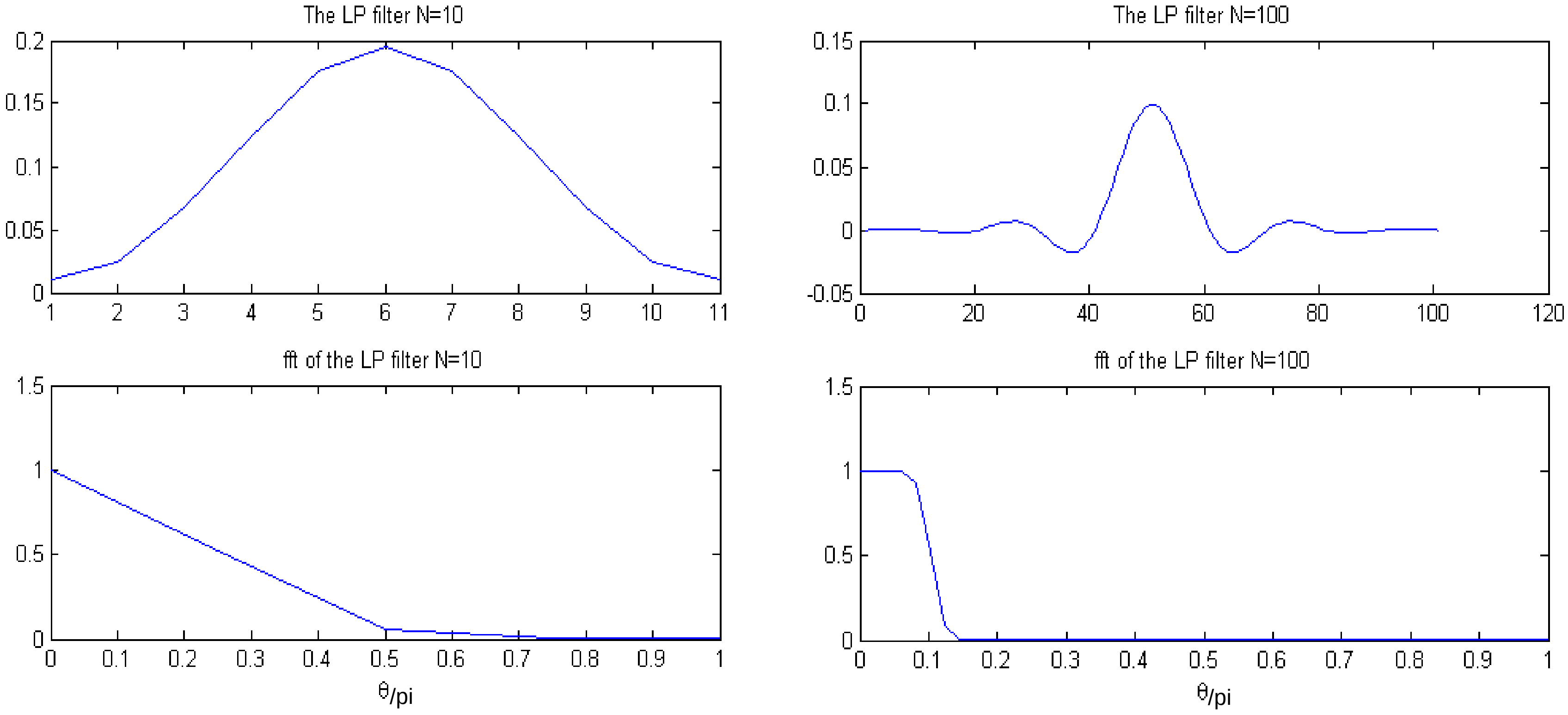
נתבונן באות הבא:





הפקודה filtfilt

- נסנן עם פילטר מסדר נמוך ופילטר מסדר גבוה:

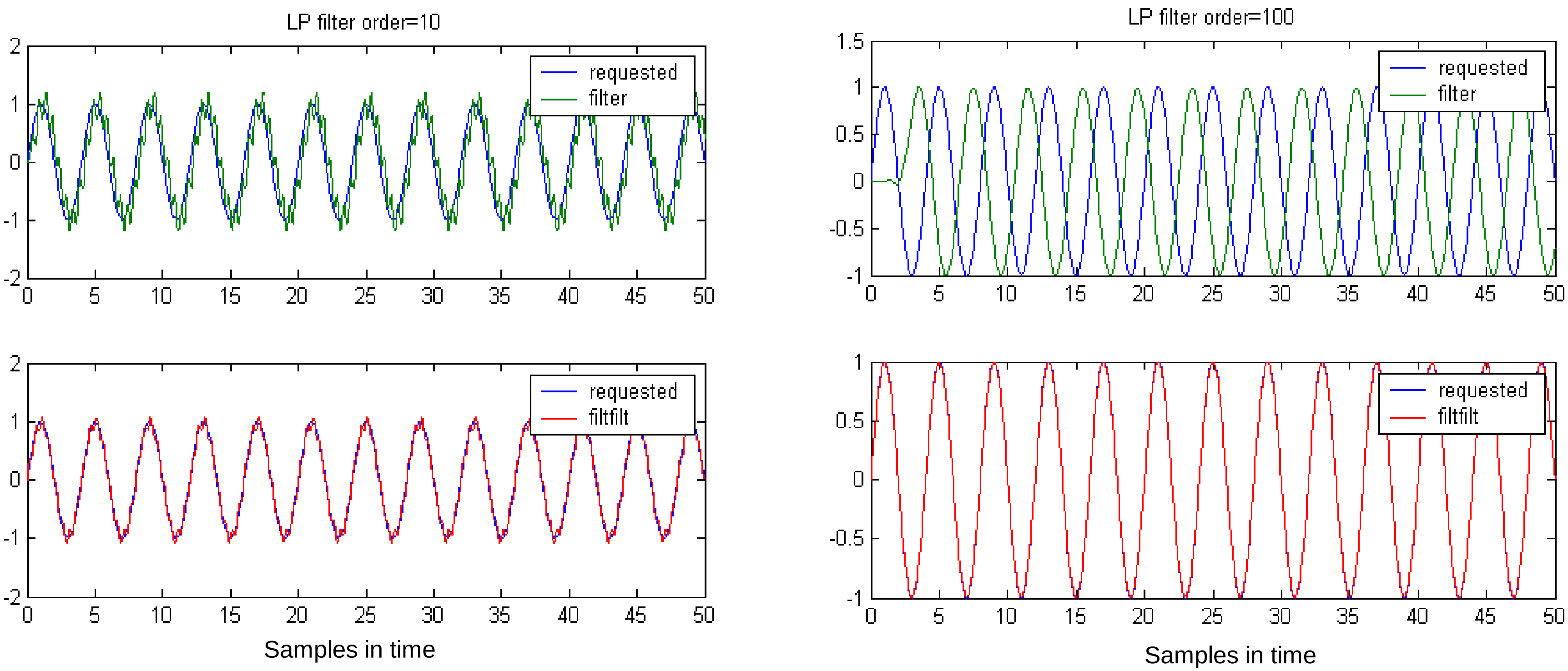


filter=fir1(10,0.1);

filter=fir1(100,0.1);

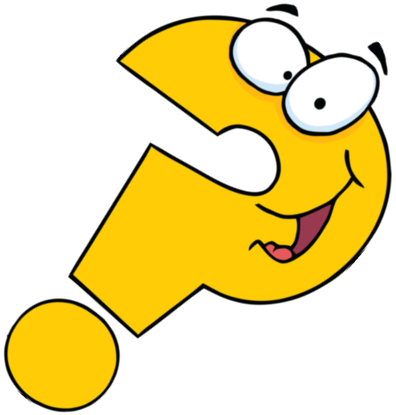
הפקודה filtfilt

- נקבל השהייה שגדלה עם סדר הפילטר.



הפקודה filtfilt

- קיבלנו השהייה שגדלה עם סדר הפילטר.
- ניתן לבטל את ההשהייה בעזרת הפקודה filtfilt במטלב, שמסננת בעזרת הפילטר שהוגדר, הופכת את סדר האיברים ומסננת שוב.
- סינון מסוג זה נקרא Zero-Phase Filtering, ונהוג להשתמש בו לפילטור IIR כשרוצים להימנע מעיוות פאזה.
- **חשוב לזכור:** זהו <u>סינון לא סיבתי</u>, <u>והפילטר השקול שונה</u> מהפילטר שהוזן.



שאלות

תרגיל בית 1 ...

תירגול 3 – תורת השערוך על קצה המזלג

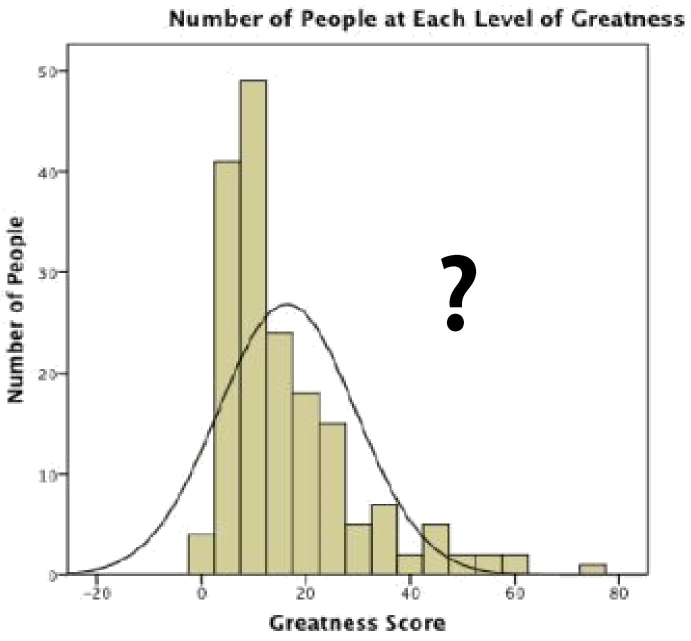
נושאים עיקריים

- בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- משערך בשיטת המומנטים - MoM
- משערך נראות מירבית - ML
- משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  - קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

נושאים עיקריים

- בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- משערך בשיטת המומנטים - MoM
- משערך נראות מירבית - ML
- משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  - קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

שערוך



- אנו מעוניינים ללמוד על ההתפלגות של X מתוך המדידות שלו
- **הנחה:** ההתפלגות של X שייכת למשפחת התפלגויות ידועה ותלויה בפרמטר θ.

- **הבעיה:** θ לא ידוע. נרצה לשערכו מתוך N מדידות של X.
  - θ – פרמטר שאינו ידוע ומגדיר באופן מסויים את הפילוג

- **הכללה:** θ יכול להיות סקלרי או וקטורי

...לגביי מודלים

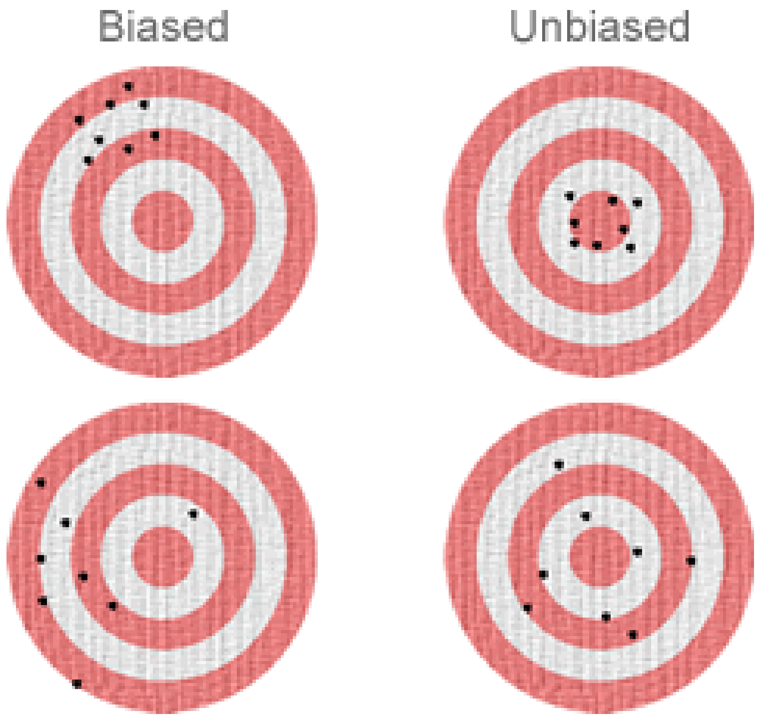
"All models are wrong but some are useful"

George Edward Pelham Box (18 October 1919 – 28 March 2013)

שערוך – סימונים

- θ - הפרמטר אותו נרצה לשערך.
  - θ יכול להיות דטרמיניסטי או אקראי. בד"כ מקובל להשתמש בסימון זה עבור פרמטר דטרמיניסטי.
- $\hat{\theta}$ - המשערך לפרמטר הלא ידוע θ.
  - $\hat{\theta}$ הוא בד"כ פונקציה כלשהי של המדידות X, ומתייחסים אליו כאל משתנה אקראי.
- שאלה: במקרה ש-θ הוא דטרמיניסטי, מאיפה מגיעה האקראיות של $\hat{\theta}$? **מהרעש במדידות!**

שערוך – מושגי יסוד



- הטיה (bias) – $b=E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$

משערך בלתי מוטה 🡸 $b=0$

- חוסר הטיה אסימפטוטי - $\lim_{N\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

- קונסיסטנטיות - $\lim_{N\to\infty} E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=0$

קריטריון טיב

- קשה מאד למצוא "משערך אידיאלי"
  - במקרים רבים הוא אפילו לא קיים
- לכן אנו צריכים לבדוק תכונה של המשערך שמעניינת אותנו, ולבחור לפיה.
- **קריטריון טיב** – תכונה לפיה נבחר את המשערך "הטוב ביותר".
  - בד"כ פונקציה אותה נרצה להביא למינימום

קריטריוני טיב נפוצים

- שגיאה ריבועית ממוצעת MSE – $E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=Var(\hat{\theta})+b^2(\hat{\theta})$
- מינימום ערך מוחלט ממוצע – $E\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right|\right]$
- שגיאה אחידה $E\left(L\right)$, כאשר – $L=\begin{cases}0 & \left|\hat{\theta}-\theta\right|\le\varepsilon \\ 1 & \left|\hat{\theta}-\theta\right|>\varepsilon\end{cases}$
- וכו'..איך נבחר? **לפי האפליקציה!**

תזכורת – נוסחאת בייס

- עבור מ"א וו"א בדידים:

$$P_{\Theta|\underline{X}}\left(\theta\,|\,\underline{x}\right)=\frac{P_{\underline{X}|\Theta}\left(\underline{x}\,|\,\theta\right)P_{\Theta}\left(\theta\right)}{P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)}$$

- עבור מ"א וו"א רציפים:

$$f_{\Theta|\underline{X}}\left(\theta\,|\,\underline{x}\right)=\frac{f_{\underline{X}|\Theta}\left(\underline{x}\,|\,\theta\right)f_{\Theta}\left(\theta\right)}{f_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)}$$

- שמות נפוצים לפונקציות:

$$posterior=\frac{likelihood\bullet prior}{evidence}$$

שערוך בייסיאני / לא בייסיאני

הנחת יסוד: ההתפלגות של המדידות X שייכת
למשפחת התפלגויות ידועה ותלויה בפרמטר θ.

שערוך לא בייסיאני

- אין לנו ידע מקדים על הפרמטר ולכן מתייחסים אליו כאל דטרמיניסטי.
- מתמטית זה אומר שאנחנו מניחים שנתון לנו רק $f(X\,|\,\theta)$, בלי שום הנחות הסתברותיות נוספות.
- נדון בשלושה משערכים הנובעים מהגישה הלא-בייסיאנית – MoM, ML ו- LS.

שערוך בייסיאני

- מניחים שהפרמטר מ"א המגיע מהתפלגות ידועה $f(\theta)$. משימוש בחוק בייס מקבלים:

$$f(\theta\,|\,X)=\frac{f(X\,|\,\theta)\,f(\theta)}{\cancel{f(X)}}$$

- מתמטית מניחים שנתון לנו $f(X,\theta)$.
- נדון בשני משערכים הנובעים מהגישה הבייסיאנית – MAP ו- MMSE.

נושאים עיקריים

✓ בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית

- משערך בשיטת המומנטים - MoM
- משערך נראות מירבית - ML
- משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  – רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  – קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

Method of Moments משערך

- נניח כי ברצוננו לשערך את θ ומתקיים:

$$\theta = g\left(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\right), \qquad \mu_k = E\left(X^k\right)$$

פונקציה ידועה

- אזי המשערך בשיטת המומנטים עבור θ נתון ע"י:

$$\hat{\theta}_{MoM} = g\left(M_1, M_2, ..., M_n\right), \qquad M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

- במילים פשוטות: החלפנו כל מומנט תיאורטי במומנט המדגמי.

משערך MoM - דוגמא

- X הוא תהליך i.i.d גאוסי.
- נרצה למצוא משערך MoM לשונות של X, על סמך N מדידות.
- נבטא את הפרמטר בעזרת המומנטים התיאורטיים:

$$\theta = Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2\left(X\right) = \boxed{\mu_2 - \mu_1^2 = g\left(\mu_1, \mu_2\right)}$$

- לקבלת המשערך נחליף למומנטים המדגמיים:

$$\hat{\theta}_{MoM} = g(M_1, M_2) = M_2 - M_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

משערך MoM - תכונות

- אם הפונקציה g ליניארית במומנטים התיאורטיים, המשערך המתקבל הינו חסר הטיה.
- אם הפונקציה g רציפה (למשל פולינום בדוגמא), המשערך קונסיסטנטי.
- במקרים מסויימים יכול לתת תוצאות לא כל כך הגיוניות. (למשל שערוך של קצה הקטע במקרה של מדגם i.i.d המפולג $U[0,\theta]$)
- בד"כ משתמשים בו כניחוש ראשוני לחישוב נומרי של משערך ML.

נושאים עיקריים

- ✓ בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓ משערך בשיטת המומנטים - MoM
- משערך נראות מירבית - ML
- משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  - קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

משערך Maximum Likelihood (ML)

- המשערך: $$\hat{\theta}(\underline{x}) = \arg\max_{\theta}\left\{P(\underline{x}|\theta)\right\}$$

פונקציית הסבירות/הנראות - likelihood

- משמעות – היוריסטיקה שמציעה לנו לבחור את הפרמטר שימקסם את ההסתברות לקבלת המדידות שבידינו.
- לפעמים יותר נוח למקסם את $\log\left(P(\underline{x}|\theta)\right)$.
- למה זה שקול? **כי log פונקציה מונוטונית!**
- לרוב התוצאות מתיישבות עם האינטואיציה (במקרים שיש כזו).

תכונות משערך ML

- חסר הטיה אסימפטוטית $\lim_{N\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$
- עקבי / קונסיסטנטי $\lim_{N\to\infty} E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=0$
- תהי $\eta=g\left(\theta\right)$ פונקציה של הפרמטר המשוערך θ. אזי משערך ML של η נתון ע"י $\hat{\eta}_{ML}=g\left(\hat{\theta}_{ML}\right)$.

משערך ML – דוגמא 1

- X הוא תהליך i.i.d גאוסי.
- נרצה למצוא משערך ML לתוחלת של X, על סמך N מדידות.
- ראשית, נמצא את פונקצית הנראות:

$$L = f\left(\underline{x} \mid \mu, \sigma^2\right) \underset{\text{i.i.d}}{=} \prod_{i=1}^{N} f\left(x_i \mid \mu, \sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ML – דוגמא 1

- רוצים למצוא את המקסימום של פונקצית ה-Likelihood.

$$L=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- יותר נוח לעשות זאת עבור הצורה הלוגריתמית:

$$\ln\left(L\right)=\ln\left(\left(\cancel{2\pi\sigma^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\mu\right)^2$$

ML – דוגמא 1

- נחפש $\hat{\mu}$ עבורו L מקבלת מקסימום:

$$\left.\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

- נבדוק הטייה:

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu = \mu$$

- קיבלנו משערך חסר הטיה!

ML – דוגמא 1

- נחשב את שונות המשערך:

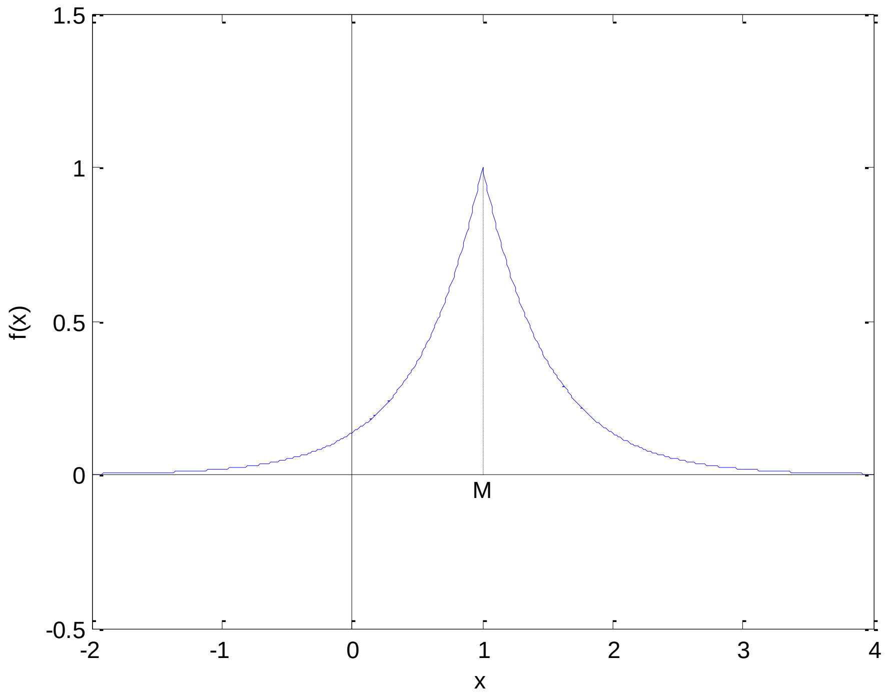
$$Var(\hat{\mu}) = E\left[(\hat{\mu}-\mu)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \mu\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

- קיבלנו גם שהמשערך קונסיסטנטי!

ML – דוגמא 2

- נתונה סדרה i.i.d של התפלגות אקספוננציאלית מהצורה:



$$f\left(\lambda, M\right) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-M|}$$

- מהו משערך ML של הפרמטר M מתוך N מדידות?

ML – דוגמא 2

$$L = f\left(\underline{x} \mid \lambda, M\right) = \prod_{i=1}^{N} f\left(x_i \mid \lambda, M\right) = \cancel{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{N}} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{N} |x_i - M|}$$

i.i.d

$$\hat{M}_{ML} = \arg\max_{M}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{N} | x_i - M |\right)\right] = \arg\min_{M}\left(\sum_{i=1}^{N} | x_i - M |\right) = median\left(x_i\right)$$

-Log()

משום ש:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} | x_i - M |}{\partial M} = -\sum_{i=1}^{N} sign\left(x_i - M\right) = 0$$

שערוך ML – תכונות אסימפטוטיות

על הלוח.

נושאים עיקריים

- ✓ בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓ משערך בשיטת המומנטים - MoM
- ✓ משערך נראות מירבית - ML
- משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  - קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

משערך Maximum A-Posteriori

- המשערך:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta} \left\{ P(\theta \mid \underline{x}) \right\}$$

פונקציית הפילוג בדיעבד- posterior

- המשמעות - השיטה מציעה לבחור את הערך הסביר ביותר עבור θ שממקסם את הפילוג בדיעבד (בהינתן ערכי X שנדגמו).
- נשים לב שמשערך זה לוקח בחשבון את ההתפלגות הידועה של θ:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta} \left\{ P(\theta \mid \underline{x}) \right\} \underset{\text{בייס}}{=} \arg\max_{\theta} \left\{ \frac{P(\underline{x} \mid \theta) P(\theta)}{\underbrace{\cancel{P(\underline{x})}}_{\text{לא תלוי בפרמטר}}} \right\} = \arg\max_{\theta} \left\{ \underbrace{P(\underline{x} \mid \theta)}_{\text{likelihood}} \cdot \underbrace{\boxed{P(\theta)}}_{\text{Prior}} \right\}$$

שערוך ML לעומת MAP

על הלוח.

שערוך MAP – דוגמא מנוונת

- עבור פרמטר המפולג יוניפורמית $\Theta \sim U[a,b]$ מקבלים את המשערך הבא:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta}\left\{P\left(\underline{x}\,|\,\theta\right)P\left(\theta\right)\right\} = \arg\max_{\theta\in[a,b]}\left\{P\left(\underline{x}\,|\,\theta\right)\cdot\cancel{\left(\frac{1}{b-a}\right)}\right\}$$

לא תלוי בפרמטר

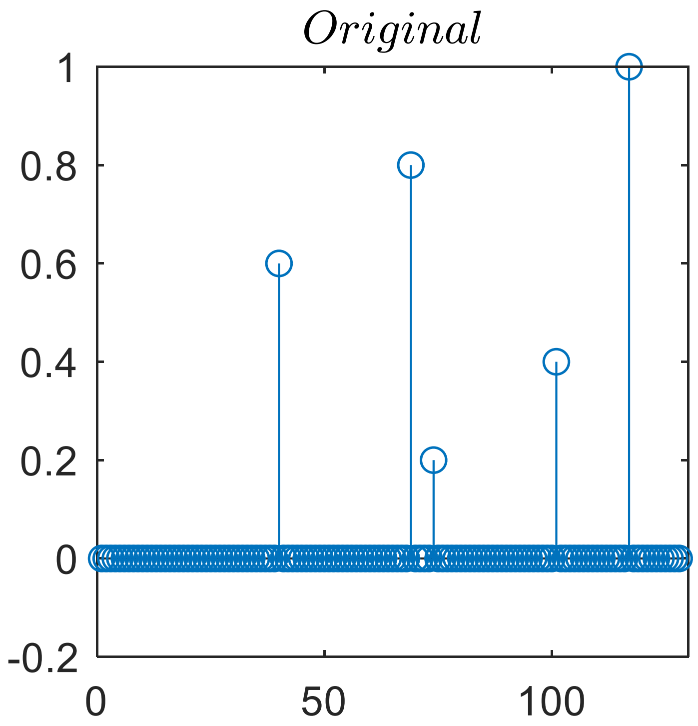
$$= \arg\max_{\theta\in[a,b]}\left\{P\left(\underline{x}\,|\,\theta\right)\right\} = \hat{\theta}_{ML}$$

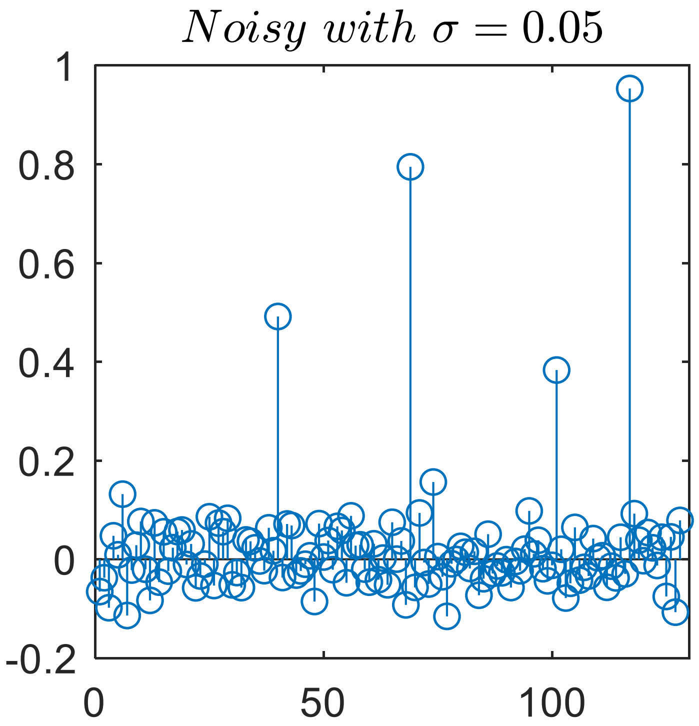
- במה מותנית השקילות לעיל? בטווח הערכים האפשריים של θ!
- אם בשערוך ML לא הגבלנו את תחום הערכים של הפרמטר, יכול להיות שהמקסימום של פונקצית הנראות יתקבל מחוץ לתחום.

שיערוך MAP – דוגמא 3

• נניח שנתונה לנו מדידה של סיגנל "דליל" עם מעט מאוד איברים שונים מאפס בתוספת רעש לבן גאוסי:

```
>> theta = [[1:5]/5 zeros(1,128-5)];
>> theta = theta(randperm(128));
>> x = theta + 0.05*randn(1,128)
```





שיערוך MAP – דוגמא 3

- משערך ML במקרה הזה לא יעזור לנו כיוון שיש לנו מדידה (וקטורית) בודדת!
- נחשב משערך MAP תחת ההנחה שוקטור הפרמטרים מפולג גאוסית $\underline{\Theta} \sim N\left(\underline{0}, \sigma_\theta^2 \cdot \underline{\underline{I}}\right)$:

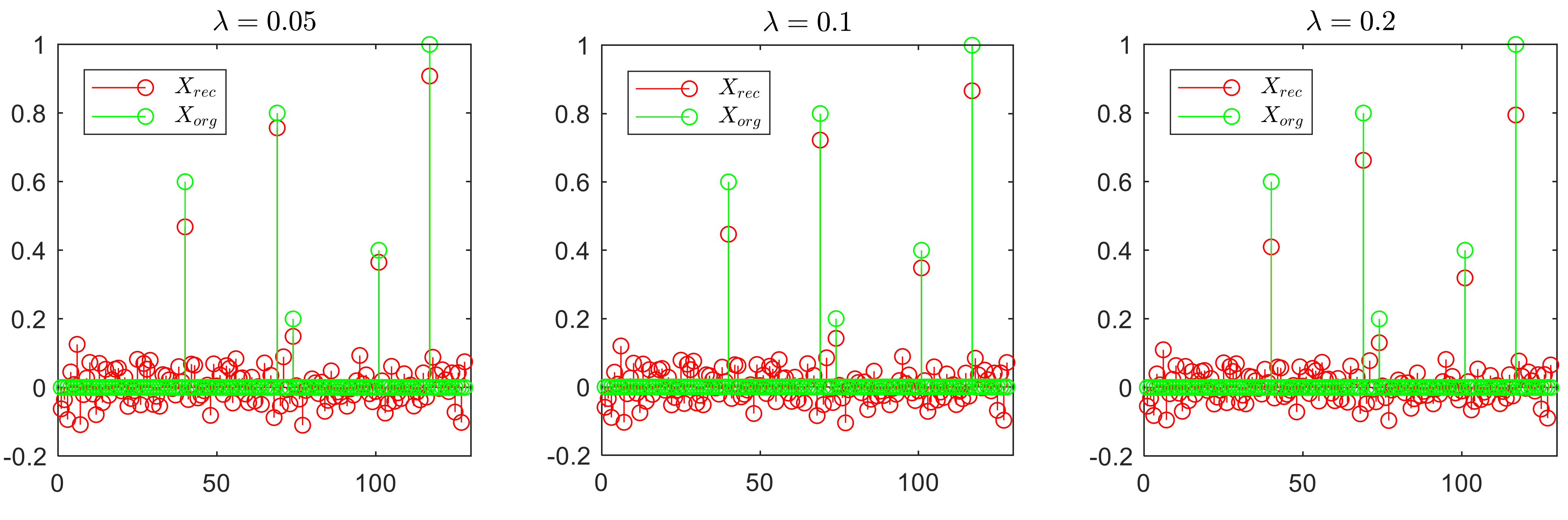
$$\hat{\underline{\theta}}_{MAP} = \arg\max_{\underline{\theta}} \left\{ P\left(\underline{x} | \underline{\theta}\right) P\left(\underline{\theta}\right) \right\} = \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ -\log\left(P\left(\underline{x} | \underline{\theta}\right)\right) - \log\left(P\left(\underline{\theta}\right)\right) \right\} =$$

$$= \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \theta_i\right)^2 + \frac{1}{2\sigma_\theta^2} \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \right\} = \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \theta_i\right)^2 + \boxed{\lambda \cdot} \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \right\}$$

- ניתן לקבוע את היחס $\lambda = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2}$ בצורה אמפירית.

שיערוך MAP – דוגמא 3

- על ידי גזירה והשוואה לאפס מקבלים נוסחה סגורה של הפתרון כתלות ביחס השונויות: $\underline{\hat{\theta}}^{1}_{MAP} = \frac{1}{1+\lambda} \cdot \underline{x}$
- מה קורה עבור $\lambda = 0$? מקבלים את משערך ML!



שיערוך MAP – דוגמא 3

- נחשב משערך MAP תחת ההנחה שוקטור הפרמטרים מפולג i.i.d לפלס: $\underline{\Theta} \sim Laplace\left(\underline{0}, \underline{\underline{B}} = 2\sigma_{\theta}^{2} \cdot \underline{\underline{I}}\right)$:

תזכורת:

$$X \sim Laplace(\mu, b)$$

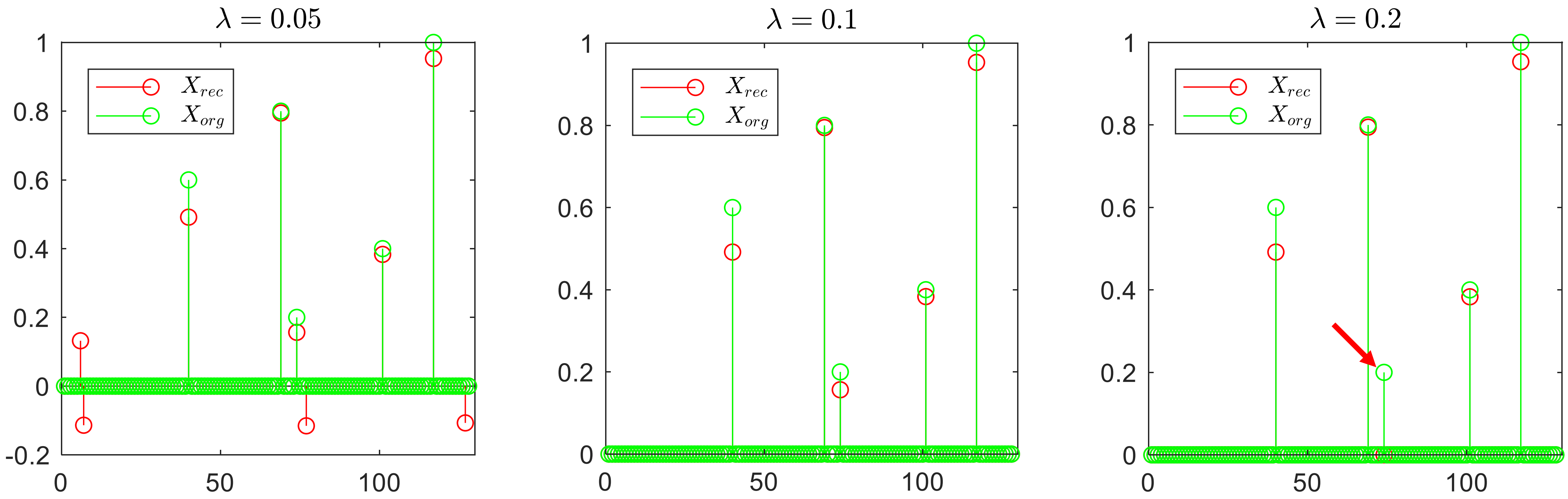
$$f(x \mid \mu, b) = \frac{1}{2b}\exp\left(\frac{-|x-\mu|}{b}\right)$$

$$\hat{\underline{\theta}}_{MAP} = \arg\max_{\underline{\theta}}\left\{P(\underline{x} \mid \underline{\theta})P(\underline{\theta})\right\} = \arg\min_{\underline{\theta}}\left\{-\log\left(P(\underline{x} \mid \underline{\theta})\right) - \log\left(P(\underline{\theta})\right)\right\} =$$

$$= \arg\min_{\underline{\theta}}\left\{\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \theta_i)^2 + \frac{1}{2\sigma_\theta^2}\sum_{i=1}^{N}|\theta_i|\right\} = \arg\min_{\underline{\theta}}\left\{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \theta_i)^2 \boxed{+\lambda \cdot}\sum_{i=1}^{N}|\theta_i|\right\}$$

- את היחס $\lambda = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2}$ נקבע אמפירית.

שיערוך MAP – דוגמא 3



- למה אנחנו מאבדים סיגנל ככל שהיחס גדל? כי ה-SNR יורד!

נושאים עיקריים

- ✓ בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓ משערך בשיטת המומנטים - MoM
- ✓ משערך נראות מירבית - ML
- ✓ משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  – רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  – קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

רגולריזציה כידע מקדים

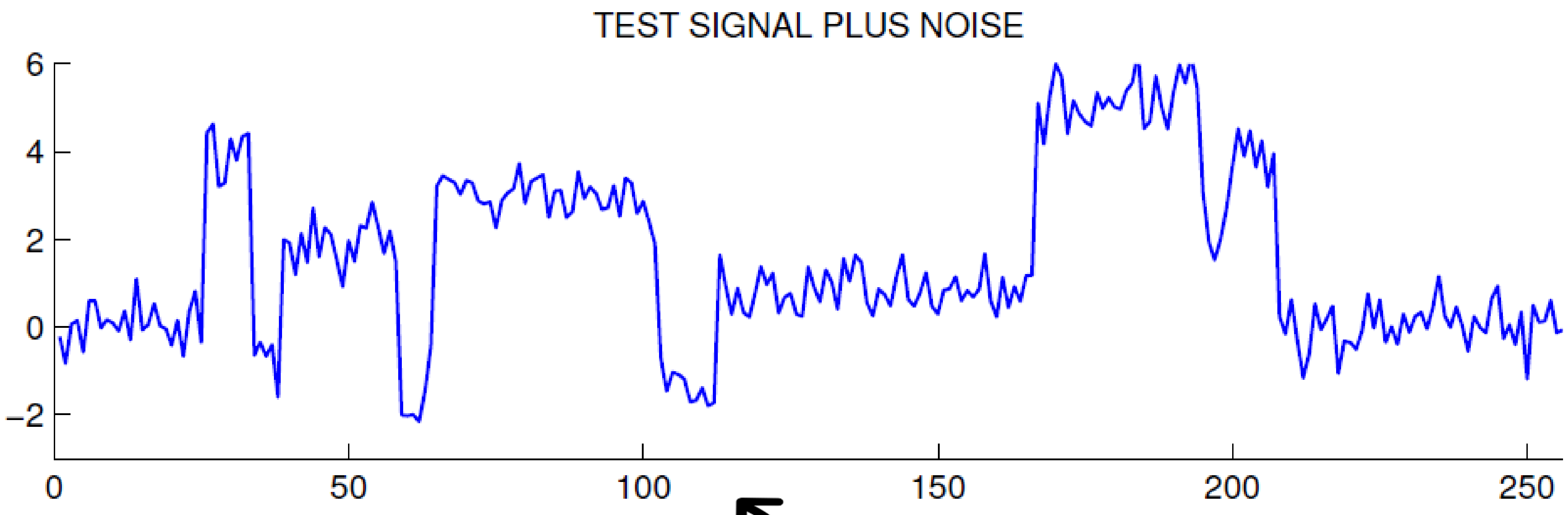
- בחלק מהמקרים יש לנו ידע מקדים על הסיגנל אך הוא לא נתון בצורת פונקציית הסתברות.
- בהנחה של מודל מדידה אדיטיבי עם רעש לבן גאוסי, נהוג לפתור בעיית אופטימיזציה מהצורה הבאה:

$$\hat{\underline{\theta}} = \underset{\underline{\theta}}{\arg\min}\left\{\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\theta_i\right)^2}_{\text{נראות המדידות}} + \underbrace{\lambda}_{\text{פרמטר הרגולריזציה}}\cdot \underbrace{R\left(\underline{\theta}\right)}_{\text{איבר הרגולריזציה}}\right\}$$

- פרמטר הרגולריזציה מווסת את החשיבות של המדידות לעומת הידע המקדים.

רגולריזציה - דוגמא

- נניח שהסיגנל הרצוי הוא סיגנל מדרגות מהצורה הבאה:



- איך נשתמש בידע המקדים?

מתווסף רעש
מדידה גאוסי לבן

רגולריזציה - דוגמא

- נציע איבר רגולריזציה מהצורה הבאה:

$$R(\underline{\theta})=\sum_{i=1}^{N-1}\left|\theta_{i+1}-\theta_{i}\right|$$

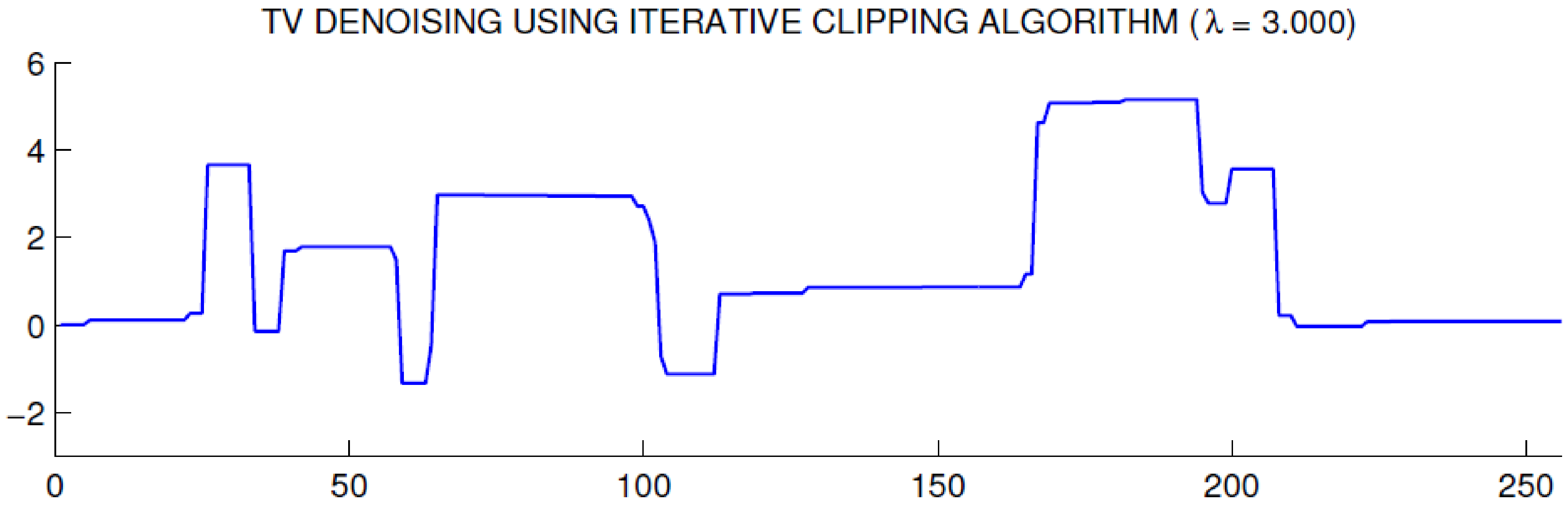
נגזרת רגעית

- משמעות – אנו מצפים שיהיו מעט מאוד קפיצות בסיגנל המשוחזר, ולכן אנחנו מנסים למזער את סכום הערכים המוחלטים של הנגזרות הרגעיות.
- זהו סוג נפוץ של רגולריציה הנקרא Total Variation או בקיצור TV.

רגולריזציה - דוגמא

- פתרון בעיית האופטימיזציה:

$$\underline{\hat{\theta}} = \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \theta_i \right)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \left| \theta_{i+1} - \theta_i \right| \right\}$$



נושאים עיקריים

- ✓ בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓ משערך בשיטת המומנטים - MoM
- ✓ משערך נראות מירבית - ML
- ✓ משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - ←רגולריזציה כידע מקדים
- משערך ריבועים פחותים – LS
  - – קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

משערך Least Squares (LS) – דוגמא 1

נניח מודל ליניארי פשוט שבו:

$$y = a \cdot x + b$$

בפועל:

$$y = a \cdot x + b + \boxed{\varepsilon}$$

כאשר:

x – המשתנה הבלתי תלוי

y – המשתנה התלוי

a – השיפוע

b – ה intercept

ε – שגיאה בעלת ממוצע אפס

משערך LS – דוגמא 1

- נתונות לנו n אובזרבציות שהן זוגות של x ו-y:

$$\left\{\left(x_i, y_i\right)\right\}_{i=1}^{n} = \left\{\left(x_1, y_1\right), \dots, \left(x_n, y_n\right)\right\}$$

- נרצה למצוא את פרמטרי המודל הליניארי המתאימים להם ואת מידת התאמתם למודל הליניארי (R^2).
- זה מעניין אותנו כי?
  – אנחנו רוצים ללמוד על הקשר בין X ו- Y
  – את Y קשה יותר למדוד מאשר את X. לכן, בעתיד נרצה למדוד את X ולשערך מהו Y.

משערך LS – דוגמא 1

- למשל נניח ש-X הוא לחץ הדם של נבדק ו- Y הוא רמת הסיכון ללקות בהתקף לב:
  - נרצה לחקור את השפעת לחץ הדם על הסיכון להתקף לב, לצורך הבנת התופעה. בעתיד, נוכל למדוד את לחץ הדם של נבדק ולהסיק על הסיכוי שלו ללקות בהתקף לב.
- מאיפה מגיע הרעש?

$$y = a \cdot x + b + \boxed{\varepsilon}$$

  - יש רעשי מדידה של הסנסורים
  - ייתכנו משתנים נוספים המשפיעים על התופעה, אותם איננו מודדים
    - בדוגמת לחץ הדם: גיל, משקל, גנטיקה, כולסטרול...
  - התופעה עצמה יכולה להיות אקראית

משערך LS – דוגמא 1

השיטה: מציאת הפרמטרים שיביאו למינימום את סכום השגיאות הריבועיות:

$$\left(\hat{a},\hat{b}\right)=\arg\min_{a,b}\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2\right\}=\arg\min_{a,b}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a\cdot x_i+b\right)\right)^2\right\}$$

- כאשר:

$\hat{a},\ \hat{b}$ - הפרמטרים המשוערכים

$\hat{y}_i=\hat{a}\cdot x_i+\hat{b}$ - שערוך Y על סמך X בהינתן הפרמטרים.

$\left(x_i,y_i\right)_{i=1}^{n}$ - התצפיות הנתונות

משערך LS – דוגמא 1

למציאת מינימום נדרוש:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_i (\hat{y}_i - y_i)^2\right)\Bigg|_{\substack{a=\hat{a}\\ b=\hat{b}}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_i (\hat{y}_i - y_i)^2\right)\Bigg|_{\substack{a=\hat{a}\\ b=\hat{b}}} = 0$$

נקבל 2 משוואות בשני נעלמים:

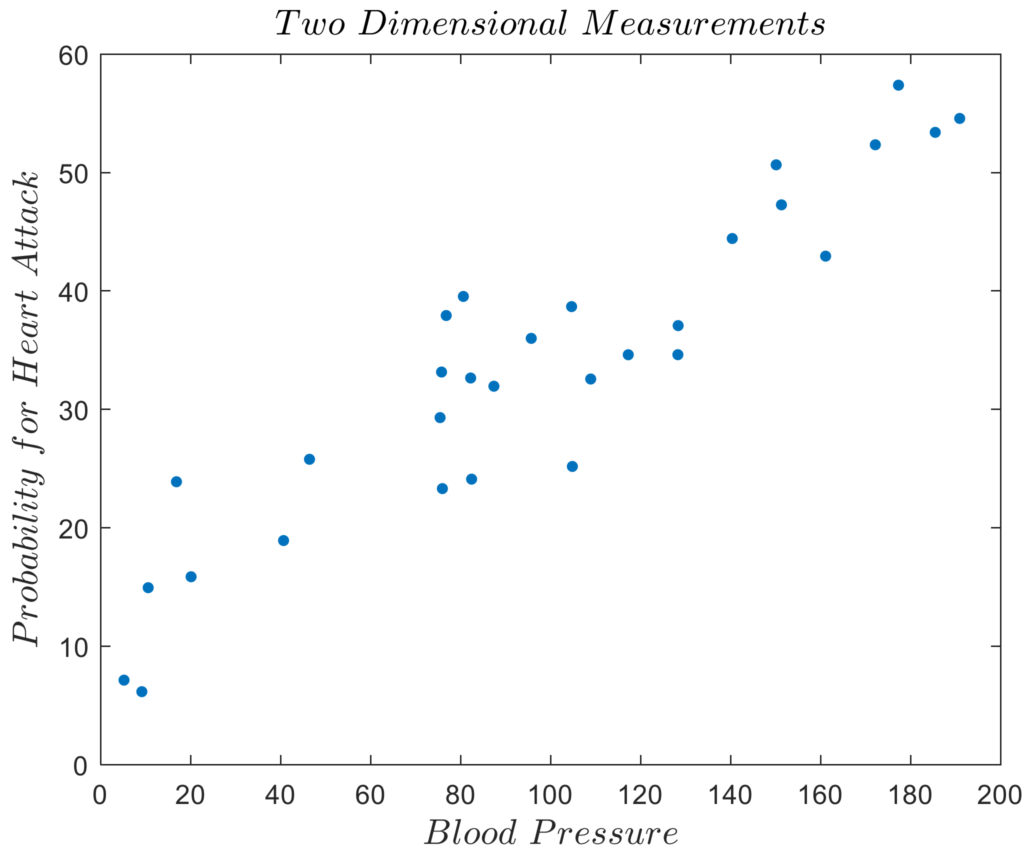
$$\hat{a}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{b}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i = 0$$

$$\hat{a}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + n\cdot\hat{b} - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \hat{a} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\cdot\bar{x} \end{array}}$$

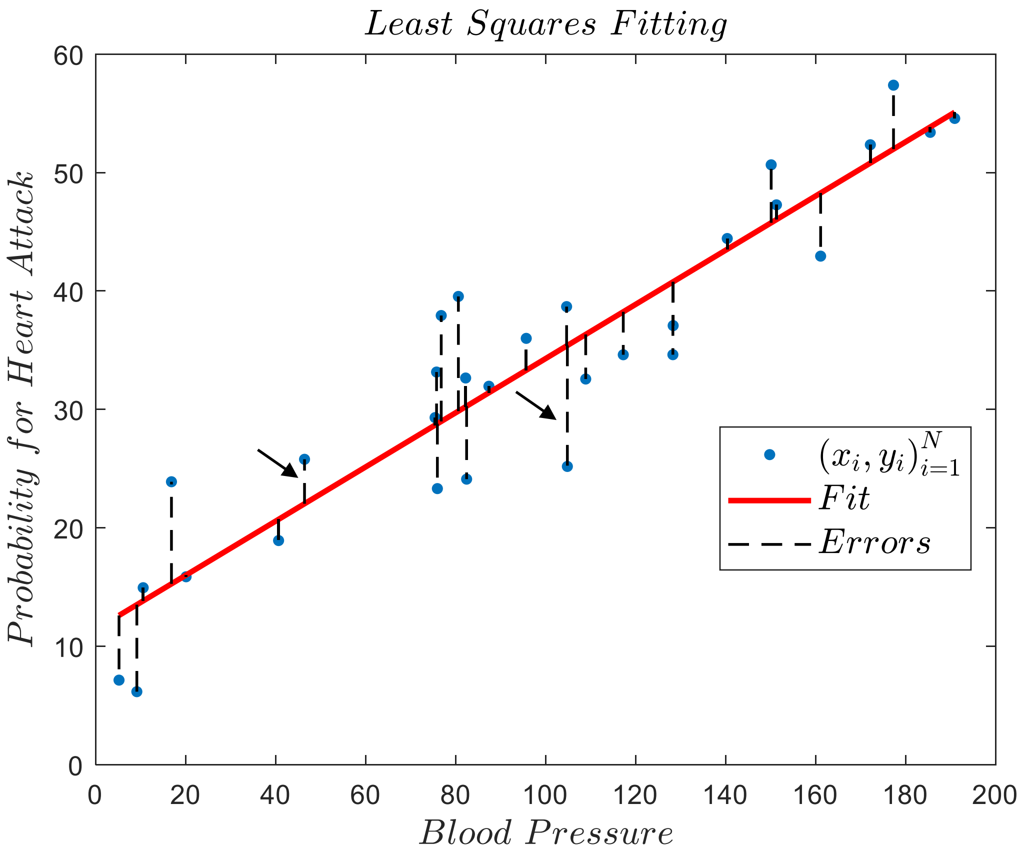
משערך LS – דוגמא 1

- <u>שאלה:</u> למה הכוונה רעש?



משערך LS – דוגמא 1

- <u>שאלה:</u> למה הכוונה רעש?



משערך LS – דוגמא 1

<u>פרופורציית השונות המוסברת (R^2)</u>

מתארת את החלק מתוך שונות המשתנה התלוי, המוסבר ע"י המשוואה הליניארית המותאמת:

$$R^2 = \frac{Explained\ Variation}{Total\ Variation} = \frac{Var(\hat{y})}{Var(y)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

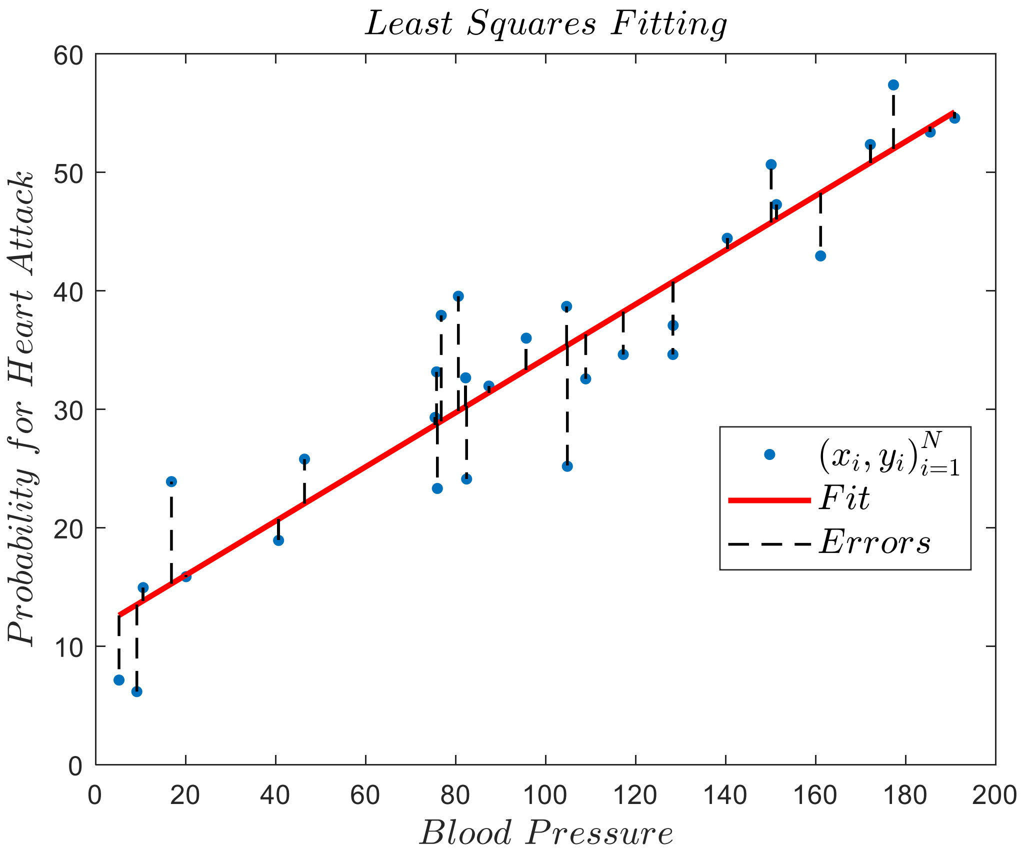
$$\boxed{0 \le R^2 \le 1}$$

ככל ש-R^2 גדול יותר, כך ההתאמה הליניארית טובה יותר

משערך LS – דוגמא 1

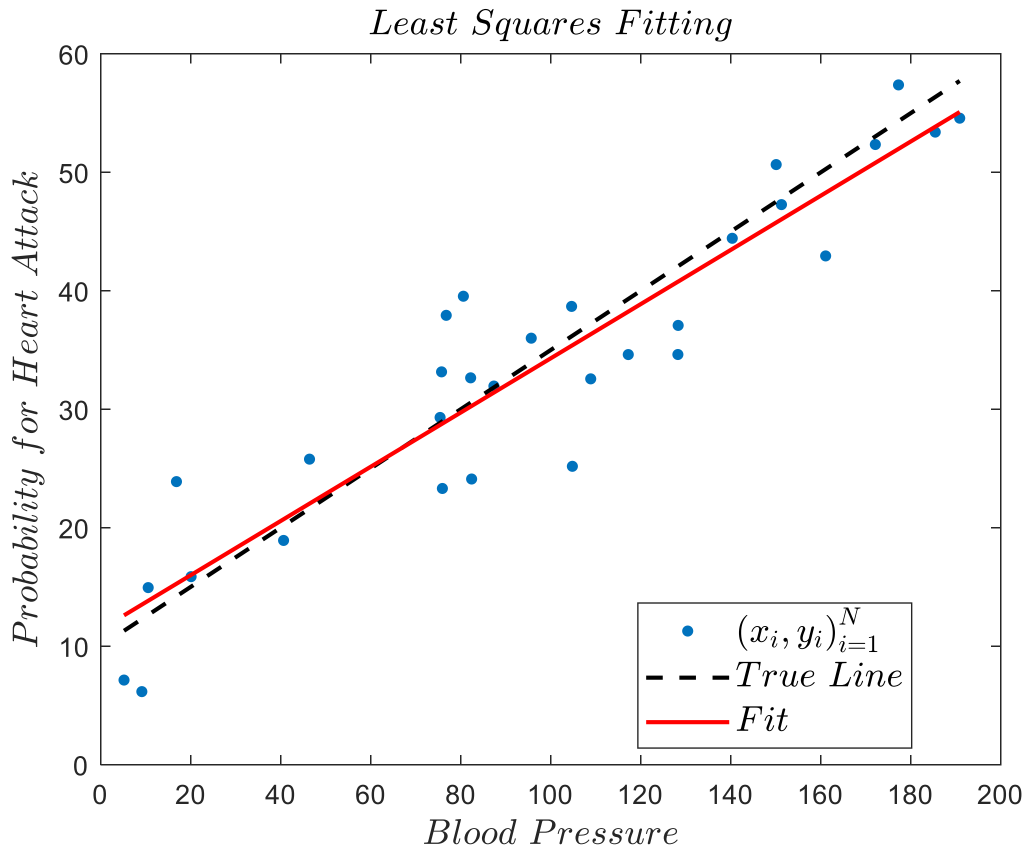
- למשל עבור הדוגמה הקודמת:

$$\hat{y} = 0.23 * x + 11.41$$
$$R^2 = 0.862$$



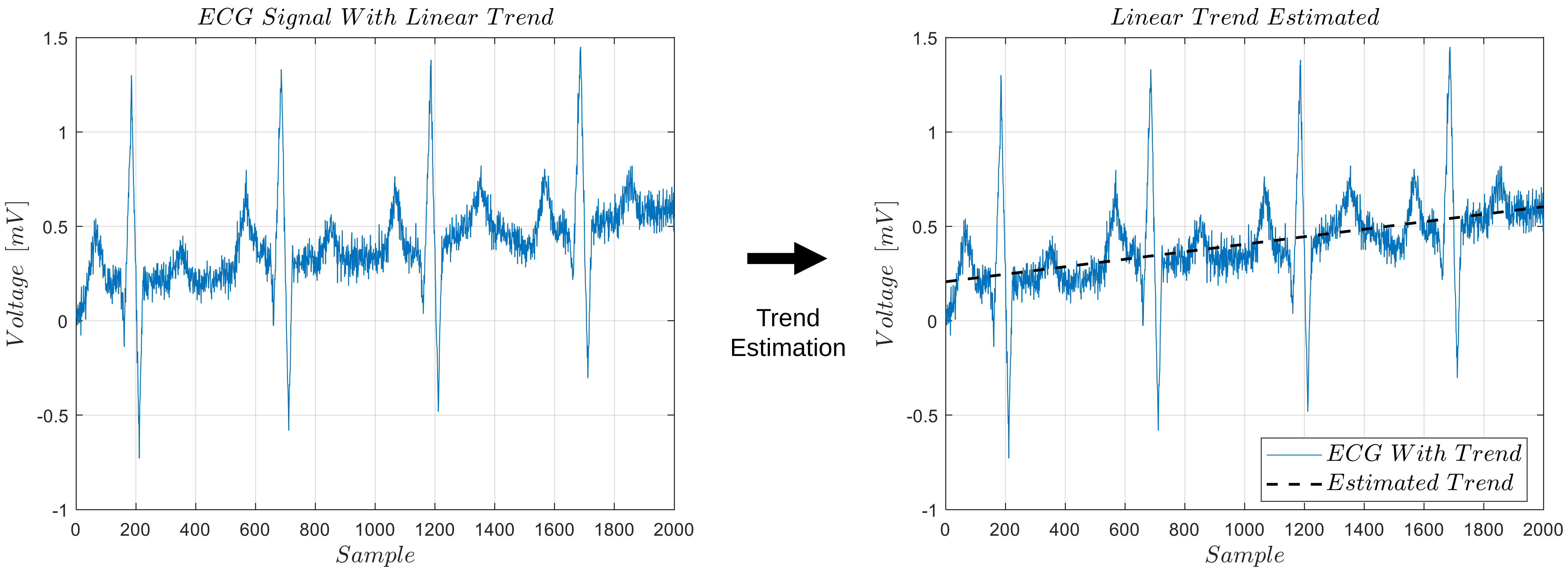
משערך LS – דוגמא 1

- השוואה עם הקו האמיתי (במקרה הזה ידוע כי זאת סימולציה):



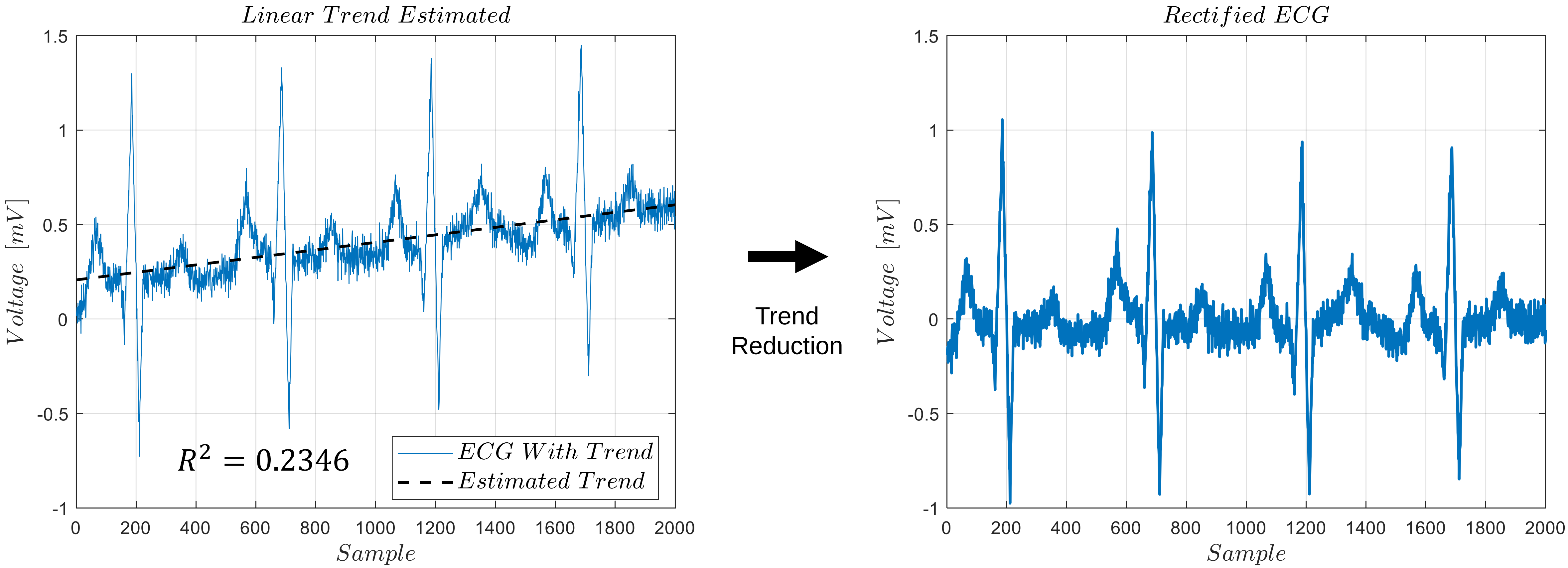
מידת התאמה למודל ליניארי

- שאלה: האם בהכרח מודל עם התאמה נמוכה הוא לא שימושי?



מידת התאמה למודל ליניארי

- <u>שאלה:</u> האם בהכרח מודל עם התאמה נמוכה הוא לא שימושי?



משערך LS – המקרה הוקטורי

עתה נניח כי יש לנו משתנה בלתי תלוי אחד או יותר:

$$y_i = \theta_1 \cdot \phi_1\left(\underline{x}_i\right) + \theta_2 \cdot \phi_2\left(\underline{x}_i\right) \ldots + \theta_m \cdot \phi_m\left(\underline{x}_i\right) + \varepsilon_i$$

מאפיינים של הקלט

עבור n אובזרווציות נקבל בכתיבה מטריצית:

$$\underline{y} = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \phi_1\left(\underline{x}_1\right) & \phi_2\left(\underline{x}_1\right) \cdots \phi_m\left(\underline{x}_1\right) \\ \phi_1\left(\underline{x}_2\right) & \phi_2\left(\underline{x}_2\right) \cdots \phi_m\left(\underline{x}_2\right) \\ \vdots & \ddots \\ \phi_1\left(\underline{x}_n\right) & \phi_2\left(\underline{x}_n\right) \cdots \phi_m\left(\underline{x}_n\right) \end{bmatrix} \qquad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}$$

משערך LS – המקרה הוקטורי

הפתרון נתון ע"י מינימיזציה של:

$$\underline{\hat{\theta}}_{LS} = \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ \left\| \underline{y} - \underline{\hat{y}} \right\|_2^2 \right\} = \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ \left\| \underline{y} - \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\theta} \right\|_2^2 \right\}$$

ע"י השוואת הגרדיאנט לפי $\underline{\theta}$ לאפס:

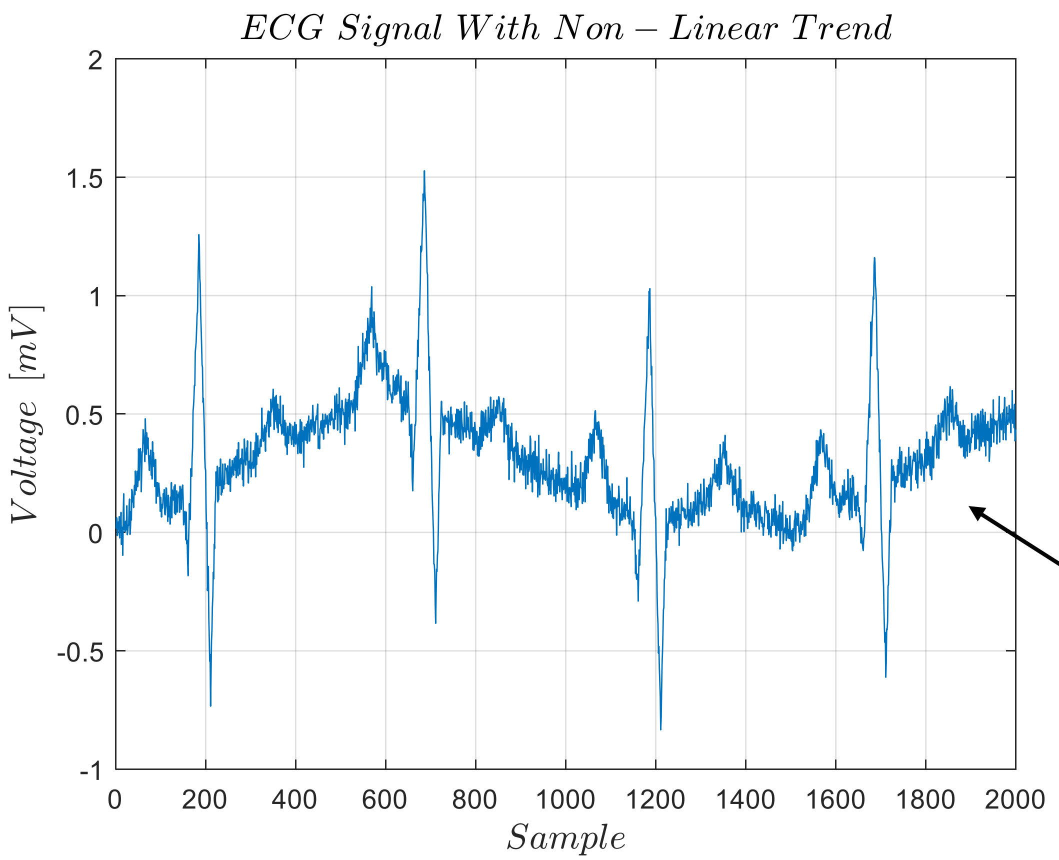
$$\nabla_{\underline{\theta}} \left\{ \left\| \underline{y} - \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\theta} \right\|_2^2 \right\} = 2 \cdot (-\underline{\underline{\Phi}}^T) \cdot (\underline{y} - \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\theta}) = 0$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{y} = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\theta}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{\hat{\theta}}_{LS} = (\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{\Phi}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{y}}$$

משערך LS – המקרה הוקטורי

- דוגמה של היסט פולינומיאלי מסדר 6:



<u>שאלה:</u> מה אפשר לעשות במקרה כזה?

משערך LS – המקרה הוקטורי

- דוגמה של היסט פולינומיאלי מסדר 6:

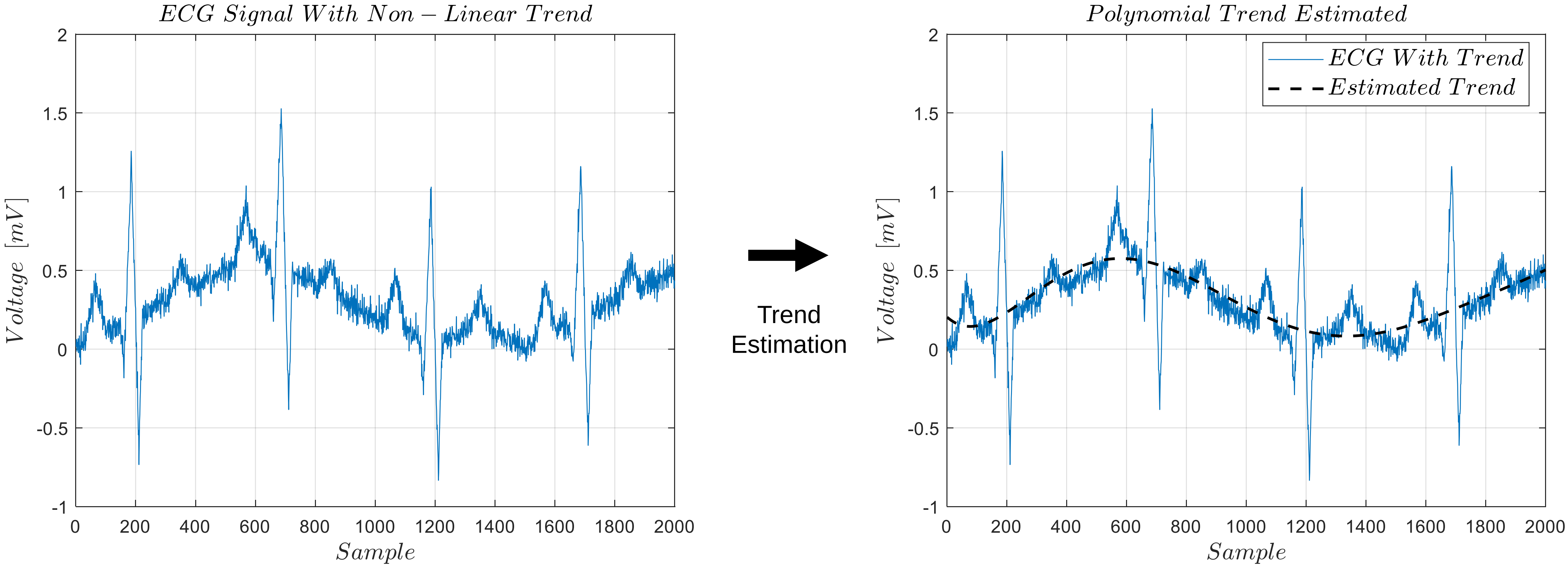
$$y_i = \theta_1 + \theta_2 x_i + \theta_3 x_i^2 + \theta_4 x_i^3 + \theta_5 x_i^4 + \theta_6 x_i^5 + \theta_7 x_i^6$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_i) \\ \phi_2(x_i) \\ \phi_3(x_i) \\ \phi_5(x_i) \\ \phi_6(x_i) \\ \phi_7(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \\ x_i^2 \\ x_i^4 \\ x_i^5 \\ x_i^6 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \cdots \phi_7(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) \cdots \phi_7(x_2) \\ \vdots & \ddots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) \cdots \phi_7(x_n) \end{bmatrix} \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_7 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\hat{\theta}}_{LS} = (\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{\Phi}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{y}}$$

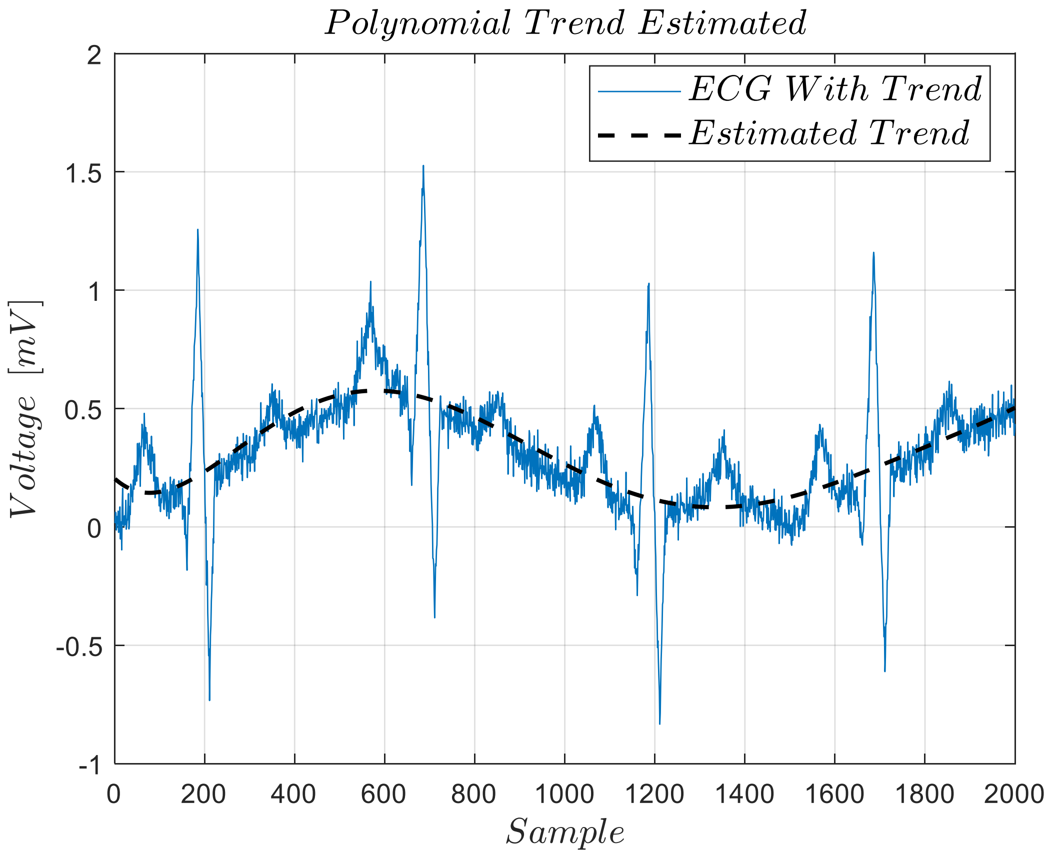
משערך LS – המקרה הוקטורי

- <u>שאלה:</u> האם בהכרח מודל עם התאמה נמוכה הוא לא שימושי?

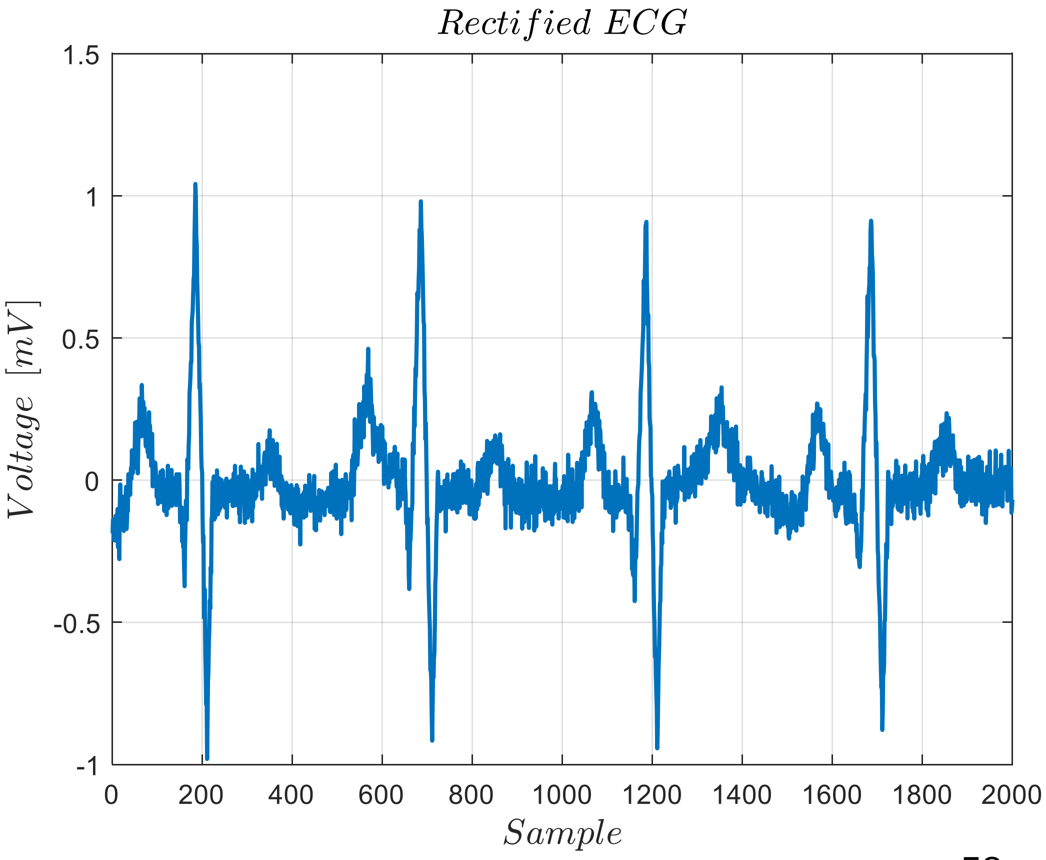


משערך LS – המקרה הוקטורי

- שאלה: האם בהכרח מודל עם התאמה נמוכה הוא לא שימושי?



Trend Reduction



משערך LS – מקרה לא ליניארי

- עד כה הסתכלנו על מודלים **ליניארים** בפרמטרים.
- דוגמאות:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$y = a \cdot x_1 + b \cdot x_2^2$$

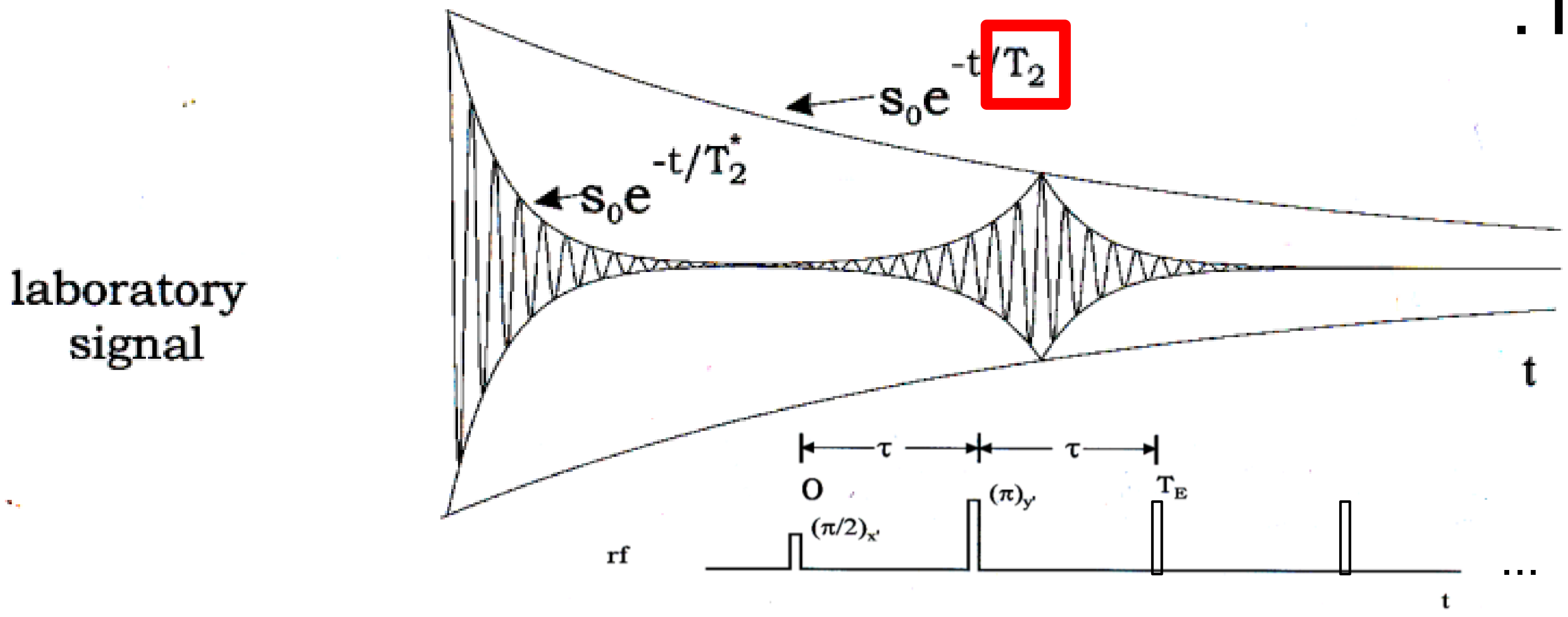
- באופן כללי – ניתן להשתמש בשיערוך LS עבור כל מודל שמתאר את התלות בין X ו- Y כפונקציה פרמטרית כלשהי.
- דוגמאות:

$$y = c \cdot e^{-a \cdot x}$$

$$y = c \cdot x^a$$

דוגמא: שערוך קבוע דעיכה T_2 MRI

- בסריקות MRI מודדים דעיכה של סיגנל NMR מרקמות שונות.
- לפי קבוע הדעיכה ניתן להבחין בין הרקמות.
- נסתכל על סריקה מסוג Spin Echo ונרצה לשערך את קבוע הדעיכה T_2:



דוגמא: שערוך קבוע דעיכה MRI T_2

- דרושות רק 2 נקודות לשיערוך T_2.

$$s(t)=s_0e^{-t/T_2}\Rightarrow T_{2,estimated}=(t_2-t_1)/\ln\left[s(t_1)/s(t_2)\right]$$

- איזה שתי נקודות הייתם לוקחים?

t_1,t_2 - זמני שני השיאים הראשונים במעטפת האות.

- אך בפועל האות רועש ושגיאה באחד מהזמנים הללו תגרום לשגיאה מאוד גדולה בקבוע הדעיכה. מה נעשה?

דוגמא: שערוך קבוע דעיכה MRI T_2

- פתרון: נמדוד את הזמנים של מספר שיאי מעטפת (מספר "Echos") ונשתמש בקירוב ריבועים פחותים:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ln\left(s\left(t_1\right)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(s\left(t_n\right)\right) \end{pmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -t_n \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\Phi}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ln\left(s_0\right) \\ \dfrac{1}{T_2} \end{pmatrix}}_{\underline{\theta}}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{\theta}}_{LS} = \left(\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{\Phi}}\right)^{-1} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{y}$$

דוגמא: שערוך קבוע דעיכה MRI T_2

- מה נעשה במקרה שקשה לרשום את הפתרון האנליטי? נפתור נומרית!
- דוגמא למימוש LS במטלב בעזרת fminsearch:

t – וקטור זמני שיא, signal - הסיגנל בנקודות השיא

```
>>Myfunc=@(x)sum((signal-x(1)*exp(-t/x(2))).^2);
>>x=fminsearch(myfunc,[0,0.001]);
>>s0=x(1);
>>T2=x(2);
```

סכום השגיאות הריבועיות

פתרון בעיות LS

- פונקציות שימושיות ב - MATLAB:

help, doc

polyfit, regress, fminsearch, pinv,
Lsqcurvefit, lsqr, lsqnonlin…

נושאים עיקריים

- ✓בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓משערך בשיטת המומנטים - MoM
- ✓משערך נראות מירבית - ML
- ✓משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - ←רגולריזציה כידע מקדים
- ✓משערך ריבועים פחותים – LS
  - – קשר בין LS ל-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

קשר בין LS ל-ML

- נניח כי נתון לנו המודל הבא:

$$\underline{x} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon} \sim N\left(\underline{0}, \sigma^2 \underline{\underline{I}}\right)$$

- משערך ה-LS מתלכד עם משערך ה-ML:

$$\underline{\hat{\theta}}_{LS} = \underline{\hat{\theta}}_{ML} = \left(\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}\right)^{-1} \underline{\underline{H}}^T \underline{x} = \underline{\underline{H}}^{\dagger} \underline{x}$$

- מודל זה נקרא המודל הליניארי הגאוסי והוא נפוץ במיוחד בבעיות עיבוד תמונה, כגון: דה-קונבולוציה, סופר-רזולוציה וכו'. המודל שימושי גם במקרים בהן הרעש לא גאוסי (Anscombe..).

קשר בין LS ל-ML

- כעת נניח שדגימות הרעש מכילות קורילציה:

$$\underline{x} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon} \sim N\left(\underline{0}, \underline{\underline{C}}\right)$$

- איך ישתנה המשערך?

$$\underline{\hat{\theta}}_{ML} = \arg\min_{\underline{\theta}} \left\{ \left(\underline{x} - \underline{\underline{H}}\,\underline{\theta}\right)^T \underline{\underline{C}}^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\underline{H}}\,\underline{\theta}\right) \right\} = \left(\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{H}}\right)^{-1} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{x}$$

- משערך זה נקרא גם משערך Weighted LS (WLS) והוא שימושי במיוחד במקרה של רעש עם קורילציה או עם שונות משתנה.

נושאים עיקריים

- ✓בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓משערך בשיטת המומנטים - MoM
- ✓משערך נראות מירבית - ML
- ✓משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - ←רגולריזציה כידע מקדים
- ✓משערך ריבועים פחותים – LS
  - ←קשר בין LS ו-ML
- משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE

משערך אופטימלי במובן MMSE

- המשערך: $$\hat{\theta}_{opt} = \arg\min_{\hat{\theta}} \left\{ E\left[\left\| \hat{\theta} - \theta \right\|_2^2 \right] \right\}$$

שגיאה ריבועית ממוצעת

- התוחלת מחושבת לפי הפילוג המשותף!
- האם המשערך זהה לפתרון בעיית LS? **לא! כאן הפרמטר מ"א!**
- הפתרון האופטימלי נתון ע"י הנוסחה "הסגורה": $\hat{\theta}_{opt} = E\left(\theta \mid \underline{x}\right)$.
- האם המשערך מוטה? **לא! (משפט ההחלקה)**
- בד"כ התוחלת קשה לחישוב פרט למקרים מיוחדים (גאוסי).

משערך אופטימלי במובן MMSE

- מה עושים אם בכל זאת רוצים להשתמש בו?
  – מגבילים את עצמנו למשפחת משערכים אשר עבורה נוח לחשב את התוחלת המותנית. למשל: משערכים ליניארים אופטימלים Linear MMSE או בקיצור LMMSE:

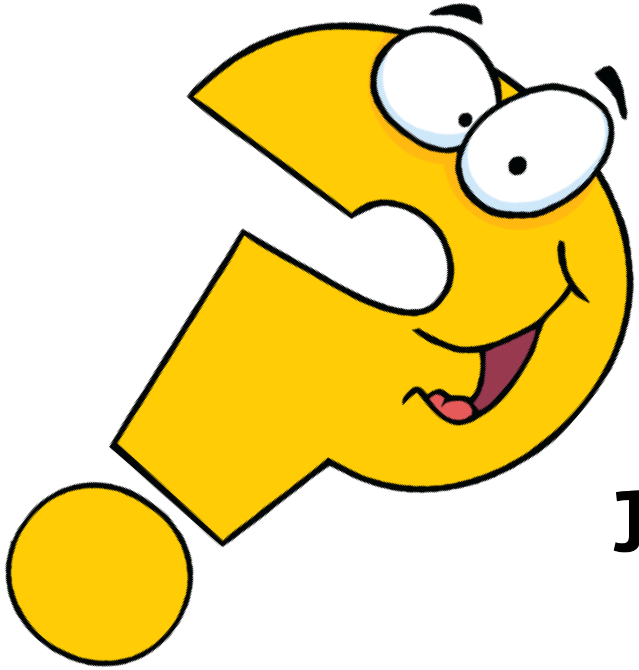
$$\underline{\hat{\theta}}_{LMMSE} = \arg\min_{\underline{\hat{\theta}}} \left\{ E\left[\left\| \underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta} \right\|_2^2 \right] \right\}$$

$$subject\ \ to: \underline{\hat{\theta}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}$$

- הבסיס לכל מני משערכים נפוצים כמו Kalman Filter. אם בנוסף מניחים סטציונריות מקבלים את Wiener Filter וכו'.

נושאים עיקריים

- ✓בעיית השערוך – סימונים וגישה כללית
- ✓משערך בשיטת המומנטים - MoM
- ✓משערך נראות מירבית - ML
- ✓משערך הערך הסביר ביותר - MAP
  - ←רגולריזציה כידע מקדים
- ✓משערך ריבועים פחותים – LS
  - ←קשר בין LS ו-ML
- ✓משערך מינימום שגיאה ריבועית ממוצעת – MMSE



שאלות

תרגול 4 – מודל AR

בתוכנית:

- קורלציות וספקטרות
- השפעת מערכת LTI על הקורלציה
- שערוך מודל AR
- דוגמת מטלב

בתוכנית:

- קורלציות וספקטרות
- השפעת מערכת LTI על הקורלציה
- שערוך מודל AR
- דוגמת מטלב

קורלציות וספקטרות - תזכורת

עבור תהליכים X ו- Y סמ"ר במשותף

- אוטו-קורלציה

$$R_{XX}(\tau)=E\left[X(t+\tau)\cdot X(t)\right]$$

- קרוס-קורלציה

$$R_{XY}(\tau)=E\left[X(t+\tau)\cdot Y(t)\right]$$

תכונות:

$$R_{XX}(-\tau)=R_{XX}(\tau)$$

$$\left|R_{XX}(\tau)\right|\le R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(0)=E\left[X^2(t)\right]$$

$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$$

$$\left|R_{XY}(\tau)\right|^2\le R_{XX}(0)\cdot R_{YY}(0)$$

- אוטו-ספקטרום

$$S_{XX}(f)=F\left\{R_{XX}(\tau)\right\}$$

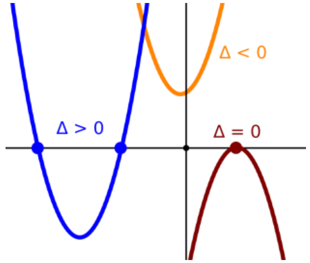
- קרוס-ספקטרום

$$S_{XY}(f)=F\left\{R_{XY}(\tau)\right\}$$

הוכחה של - $\left|R_{xy}(\tau)\right|^2 \le R_{xx}(0)R_{yy}(0)$

$$E\left[\left(\alpha x(t+\tau)+\beta y(t)\right)^2\right]\ge 0$$

$$\alpha^2 R_{xx}(0)+2\alpha\beta R_{xy}(\tau)+\beta^2 R_{yy}(0)\ge 0$$



$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}R_{xx}(0)+2\frac{\alpha}{\beta}R_{xy}(\tau)+R_{yy}(0)\ge 0$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{1,2}=\frac{-b\pm\boxed{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}$$

$$\Delta=4R_{xy}^2(\tau)-4R_{xx}(0)R_{yy}(0)\le 0$$

$$\Rightarrow R_{xy}(\tau)^2=\left|R_{xy}(\tau)\right|^2\le R_{xx}(0)R_{yy}(0)$$

משערכים לקורלציות

עבור תהליכים X ו- Y סמ"ר במשותף **וארגודים**:

- אוטו-קורלציה

$$\hat{R}_{XX}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)x(t)\,dt$$

- קרוס-קורלציה

$$\hat{R}_{XY}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)y(t)\,dt$$

- למה נחוצה הארגודיות?

$\boxed{\textbf{שערוך מתוך פונקציית מדגם בודדת!}}$

שערוך אוטוקורלציה

מימוש ב-MATLAB:
xcorr

- משערכים

לא מוטה

$$\boxed{\hat{R}_{XX}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N-m}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x_{n+m}x_n^{*} & m\geq 0\\ \hat{R}_{XX}^{*}(-m) & m<0\end{cases}}$$

מוטה

$$\boxed{\hat{R}_{XX}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x_{n+m}x_n^{*} & m\geq 0\\ \hat{R}_{XX}^{*}(-m) & m<0\end{cases}}$$

- איזה נעדיף?

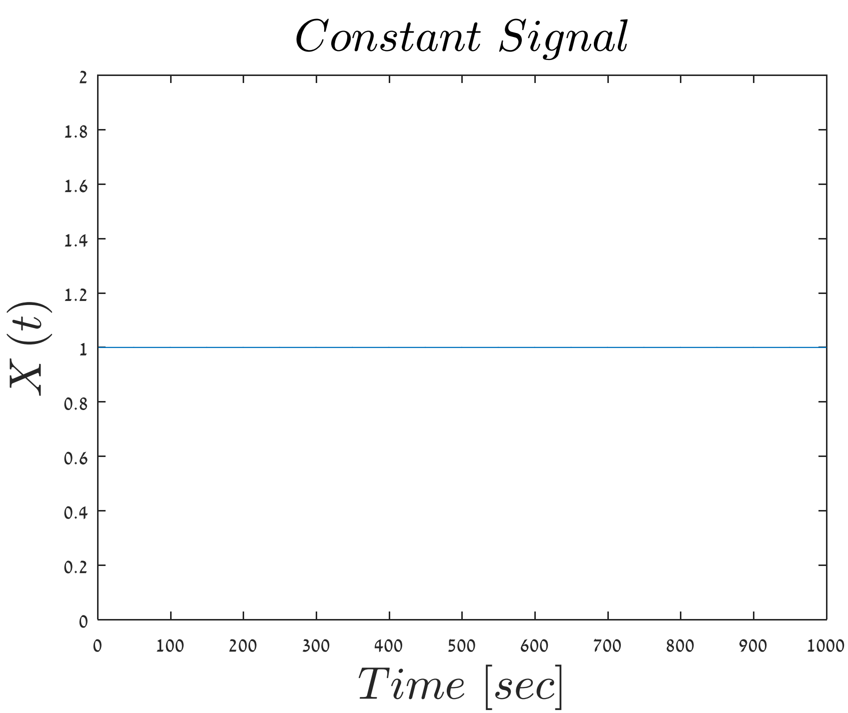
שערוך אוטוקורלציה- דוגמא

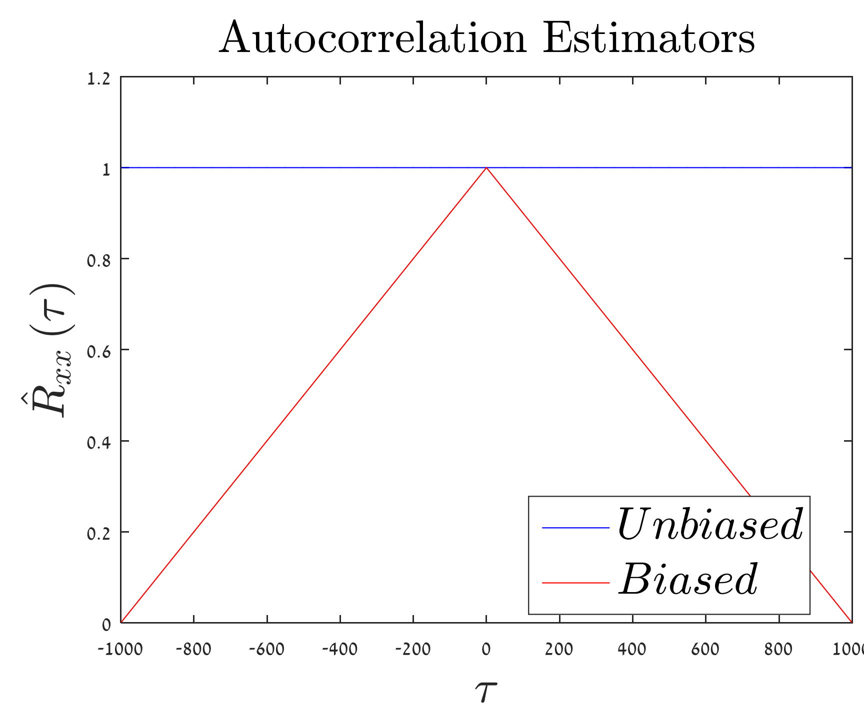
לא מוטה

$$\hat{R}_{XX}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N-m}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x_{n+m}x_n^* & m\geq 0\\ \hat{R}_{XX}^*(-m) & m<0\end{cases}$$

מוטה

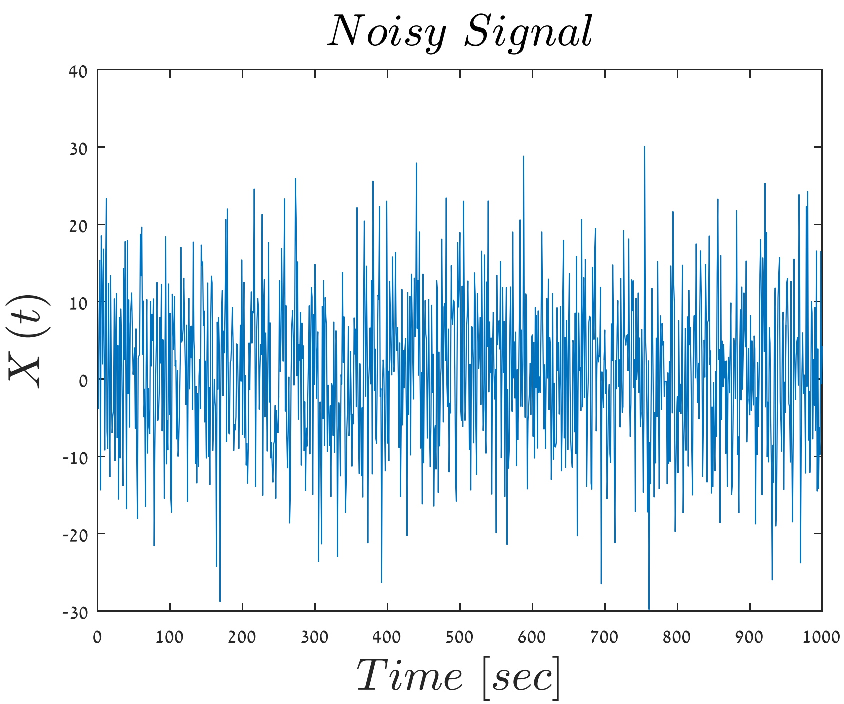
$$\hat{R}_{XX}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x_{n+m}x_n^* & m\geq 0\\ \hat{R}_{XX}^*(-m) & m<0\end{cases}$$

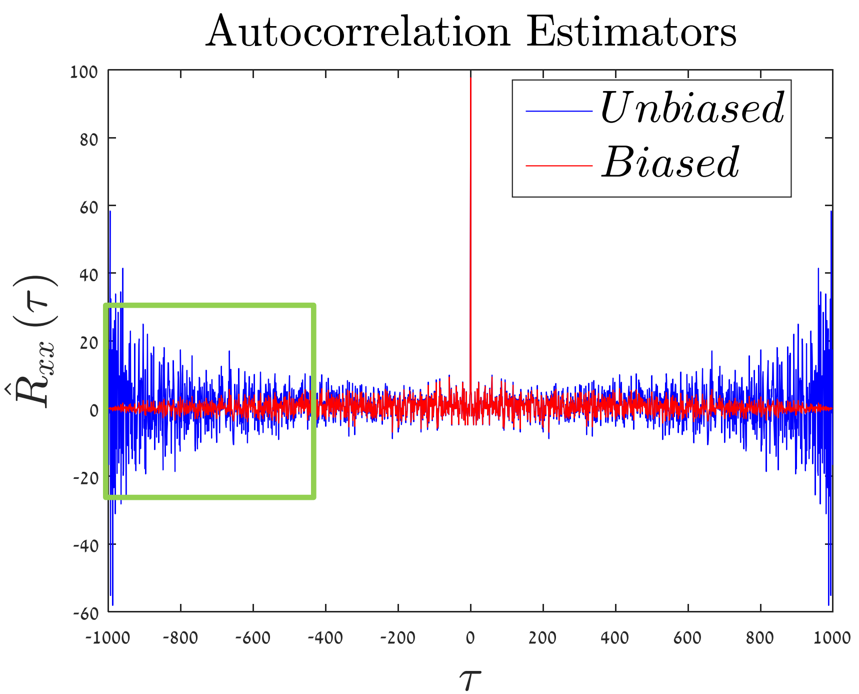




שערוך אוטוקורלציה- דוגמא

- מה יקרה אם יתווסף רעש?





- השערוך בקצוות רגיש לרעש לכן נעדיף מוטה!

שערוך קרוסקורלציה

מימוש ב-
:MATLAB
xcorr

- משערכים

לא מוטה

$$\hat{R}_{XY}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N-m}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x_{n+m}y_n^* & m\geq 0\\ \hat{R}_{YX}^*(-m) & m<0\end{cases}$$

סדר המשתנים
הפוך!

מוטה

$$\hat{R}_{XY}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x_{n+m}y_n^* & m\geq 0\\ \hat{R}_{YX}^*(-m) & m<0\end{cases}$$

משערכים לספקטרות

- איך נשערך ספקטרום בהינתן משערך לקורלציה?

- אוטו-ספקטרום

$$\hat{S}_{XX}\left(f\right)=F\left\{\hat{R}_{XX}\left(k\right)\right\}$$

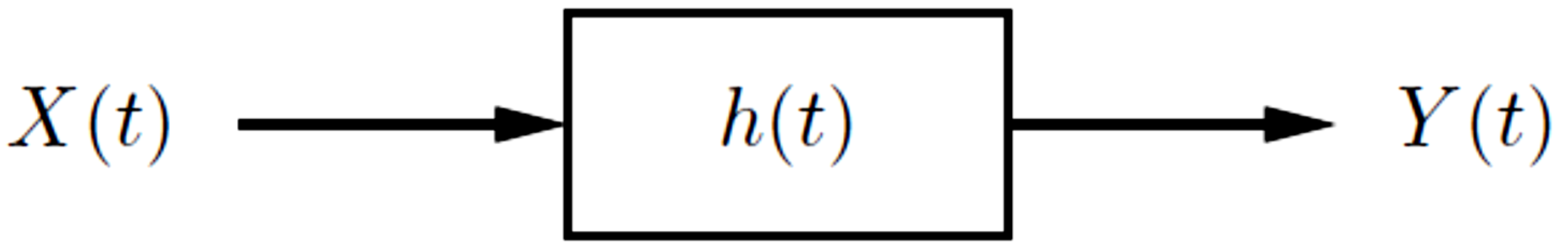
- קרוס ספקטרום

$$\hat{S}_{XY}\left(f\right)=F\left\{\hat{R}_{XY}\left(k\right)\right\}$$

בתוכנית:

- ✓ קורלציות וספקטרות
- השפעת מערכת LTI על הקורלציה
- שערוך מודל AR
- דוגמת מטלב

מעבר אות דרך מערכת LTI



$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du$$

- הנחות עבודה:
  - X(t) סמ"ר
  - המערכת ליניארית וקבועה בזמן.

מעבר אות דרך מערכת LTI

- חישוב קרוס-קורלציה של הכניסה והמוצא:

$$R_{XY}(\tau)=E\left[x(t+\tau)y(t)\right]=E\left[x(t+\tau)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du\right]=$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)h(u)x(t-u)du\right]=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)E\left[x(t+\tau)x(t-u)\right]du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{XX}(\tau+u)du\underset{R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)}{\underset{\downarrow}{=}}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{XX}(-\tau-u)du=$$

$$\underset{s=-\tau}{=}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{XX}(s-u)du=R_{XX}(s)*h(s)\underset{s=-\tau}{=}R_{XX}(-\tau)*h(-\tau)=$$

$$\underset{R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)}{\underset{\downarrow}{=}}R_{XX}(\tau)*h(-\tau)$$

האם x ו-y סמ"ר במשותף? **כן!**

מעבר אות דרך מערכת LTI

בהינתן המשערכים הרציפים לאוטו-קורלציה וקרוס-קורלציה

$$\hat{R}_{XX}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)x(t)dt$$

$$\hat{R}_{XY}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)\cdot y(t)dt$$

נמצא את הקשר ביניהם במעבר דרך מערכת LTI:

$$\hat{R}_{XY}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T\left(x(t+\tau)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du\right)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)h(u)x(t-u)dudt=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)x(t-u)dt\right)du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\underbrace{\hat{R}_{xx}(\tau+u)}_{=\hat{R}_{xx}(-\tau-u)}du=\hat{R}_{xx}(-\tau)*h(-\tau)=\hat{R}_{XX}(\tau)*h(-\tau)$$

מעבר האות דרך מערכת LTI

- חישוב אוטוקורלציה של היציאה:

$$R_{YY}(\tau)=E\left[Y(t+\tau)Y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(u)X(t+\tau-u)du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(v)X(t-v)dv\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot h(v)\cdot E\left[X(t+\tau-u)X(t-v)\right]dudv=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h(v)R_{XX}(\tau+v-u)dudv=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{XX}\left((\tau+v)-u\right)dudv=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)\underbrace{\left[h(\tau+v)*R_{XX}(\tau+v)\right]}_{f(\tau+v)}dv=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)f(\tau+v)dv\underset{v=-s}{\underset{\downarrow}{=}}\int_{-\infty}^{\infty}h(-s)f(\tau-s)ds=$$

$$\underset{\tilde{h}(s)=h(-s)}{\underset{\downarrow}{=}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}(s)f(\tau-s)ds=h(-\tau)*h(\tau)*R_{XX}(\tau)$$

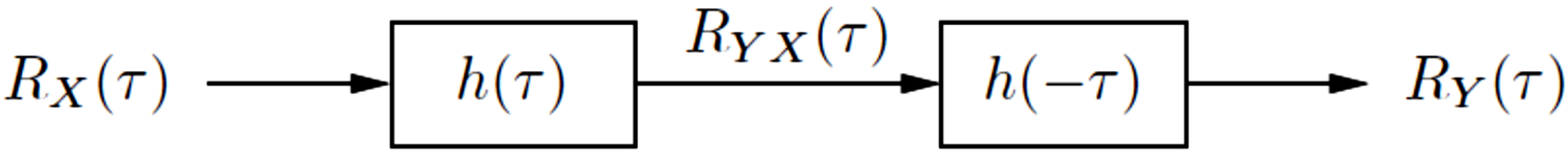
- ובמישור התדר:

$$S_{YY}(f)=H^*(f)\cdot H(f)\cdot S_{XX}(f)=\left|H(f)\right|^2\cdot S_{XX}(f)$$

ריכוז נוסחאות

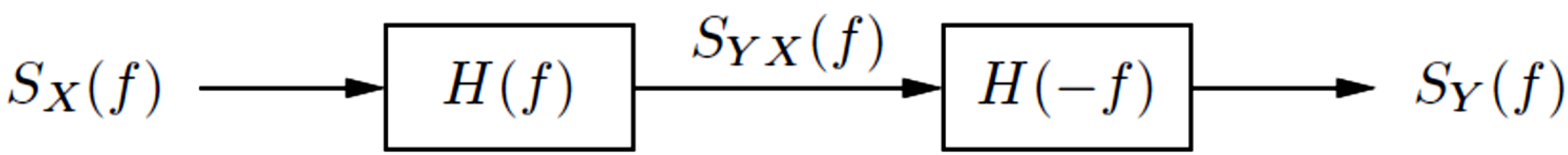
$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{YY}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_{XX}(\tau)$$



$$S_{XY}(f) = H^*(f) \cdot S_{XX}(f)$$

$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{XX}(f)$$



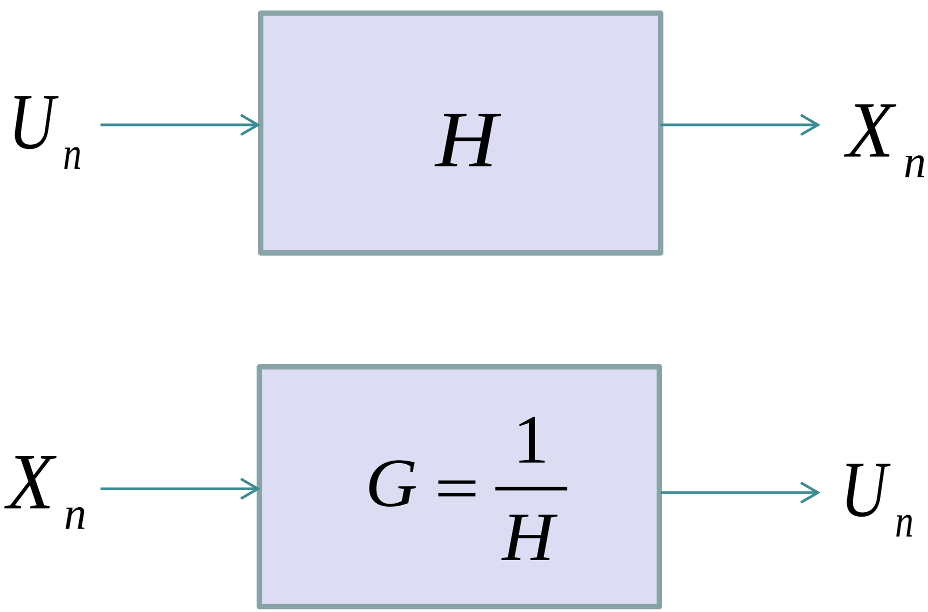
בתוכנית:

- ✓ קורלציות וספקטרות
- ✓ השפעת מערכת LTI על הקורלציה
- שערוך מודל AR
- דוגמת מטלב

תהליך רגולרי

- הגדרה:

X_n הינו תהליך רגולרי אם קיים רעש לבן U_n וקיימות מערכות סיבתיות ויציבות G ו-H כך ש:



תהליכי ARMA

- תהליך רגולרי:

$$\xrightarrow{W[n]} \boxed{H} \xrightarrow{X[n]}$$

רעש לבן גאוסי

$\mu_W = 0 \ , \ \boxed{\sigma_W}$

- תהליך ARMA:

$$X[n] = -\sum_{l=1}^{L} a_l X[n-l] + \sum_{k=0}^{K} b_k W[n-k]$$

- סדר המודל: (K,L)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{K} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l}}$$

$$\mathrm{AR}: \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_k = 0, \ \forall k > 0 \end{cases}$$

רק קטבים

$$\mathrm{MA}: \quad \mathrm{a}_l = 0, \quad \forall l$$

רק אפסים

מודל AR

מודל זה מייצג אות שהוא תוצאת מעבר של רעש לבן בפילטר IIR עם קטבים בלבד:

$$\xrightarrow[\text{רעש לבן}]{W[n]} \boxed{H(z)=\frac{1}{1+\sum_{l=1}^{L}a_l z^{-l}}=\frac{1}{A(z)}} \xrightarrow[\text{אות AR}]{X[n]}$$

מודל AR במישור הזמן מיוצג על ידי משוואת ההפרשים:

$$X[n]=\underbrace{W[n]}_{\text{חלק שאי אפשר לחזות}}\underbrace{-\sum_{l=1}^{L}a_l X[n-l]}_{\text{חלק שתלוי דטרמיניסטית בעבר}}$$

מודל AR

- הפילטר ההופכי הוא פילטר FIR בעל פ' תמסורת:

$$H_w(z) = H^{-1}(z) = A(z)$$

$$\xrightarrow[\text{אות AR}]{X[n]} \boxed{H_w(z) = 1 + \sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l} = A(z)} \xrightarrow[\text{רעש לבן יוצר!}]{W[n]}$$

- נהוג לקרוא למסננת ההופכית "המסננת המלבינה" או ה-Whitening Filter.

מודל AR

- עבור כניסת רעש לבן עם שונות σ_W^2 וממוצע אפס נקבל יציאה בעלת פ' אוטוקורלציה וצפיפות ספקטרלית:

$$S_{XX}(z) = \sigma_W^2 \left|H(z)\right|^2 = \frac{\sigma_W^2}{\left|A(z)\right|^2} \qquad R_{XX}[n] = \sigma_W^2 \cdot h[-n] * h[n]$$

- בהנחת מודל AR, איך נשערך את $X[n]$ על סמך דגימות העבר שבידינו $X[n-1],...,X[n-L]$?

$$\boxed{X[n \mid n-1] = -\sum_{l=1}^{L} a_l X[n-l]}$$

מודל AR

- מה עם שגיאת השערוך?

המודל:

$$X[n] = \boxed{W[n]} - \sum_{l=1}^{L} a_l X[n-l]$$

המשערך:

$$X[n|n-1] = -\sum_{l=1}^{L} a_l X[n-l]$$

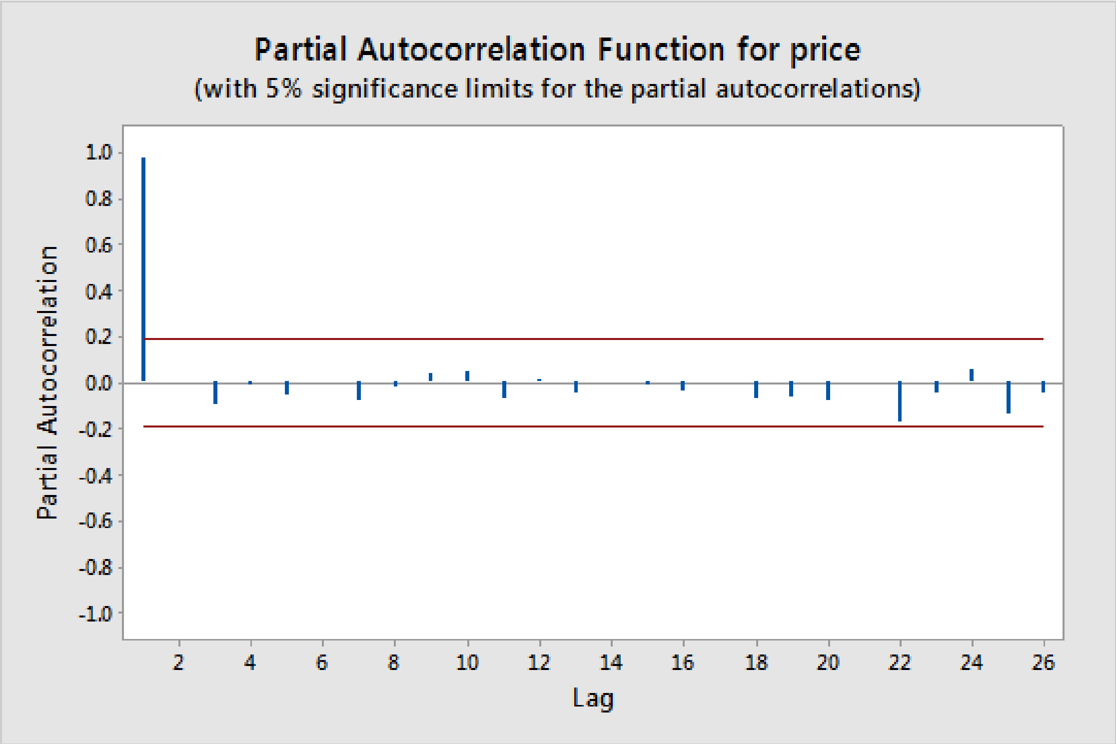
- שגיאת השערוך:

$$E\left[\left(X[n|n-1] - X[n]\right)^2\right] =$$

$$= E\left[W^2[n]\right] = \sigma_W^2$$

מודל AR המחשה 1

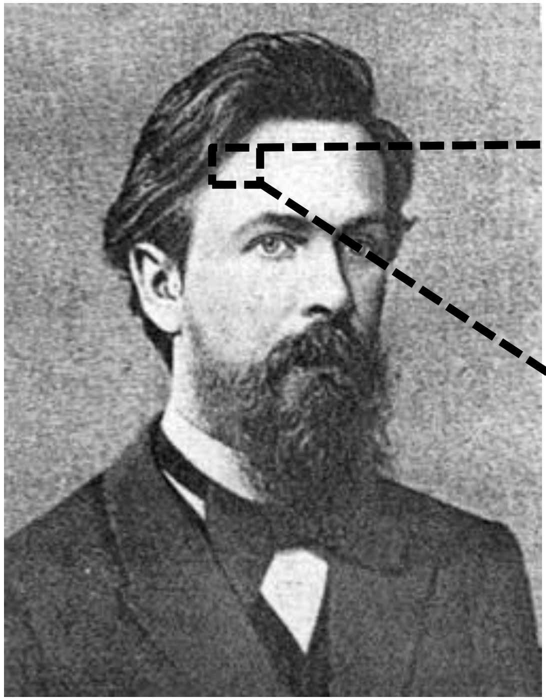
- מחיר מנייה של גוגל
- קביעת סדר המודל על בסיס האוטוקורלציה ה"חלקית"



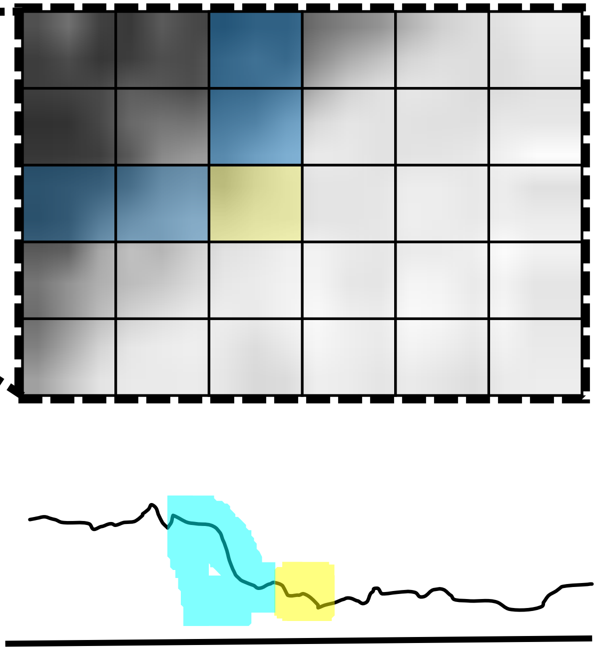
מתוך https://onlinecourses.science.psu.edu/stat501/node/358

מודל AR המחשה 2

- תמונה



Andrei Markov



שערוך מודל AR

- לעיתים יהיה לנו נוח לתאר אות כאות AR.
- בהרצאה הוכחנו: $\underline{r} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{a}$

כאשר:

שאלה: מאיפה יש אותם?

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \cdots & R_{yy}(L-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \cdots & R_{yy}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{yy}(L-1) & R_{yy}(L-2) & \cdots & R_{yy}(0) \end{bmatrix},$$

$$a_l = 0 \quad \forall l > L$$

$$\underline{\underline{R}}(i,l) = R_{yy}(l-i) \quad , \quad \underline{r} = -\begin{bmatrix} R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(L) \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix}$$

חשוב לשים לב למינוס!

L – סדר המודל

עבור L קטן בד"כ משתמשים בגרסת "unbiased" של משערך האוטוקורלציה.

שערוך מודל AR

- לכן נשערך את מקדמי המודל ע"י:

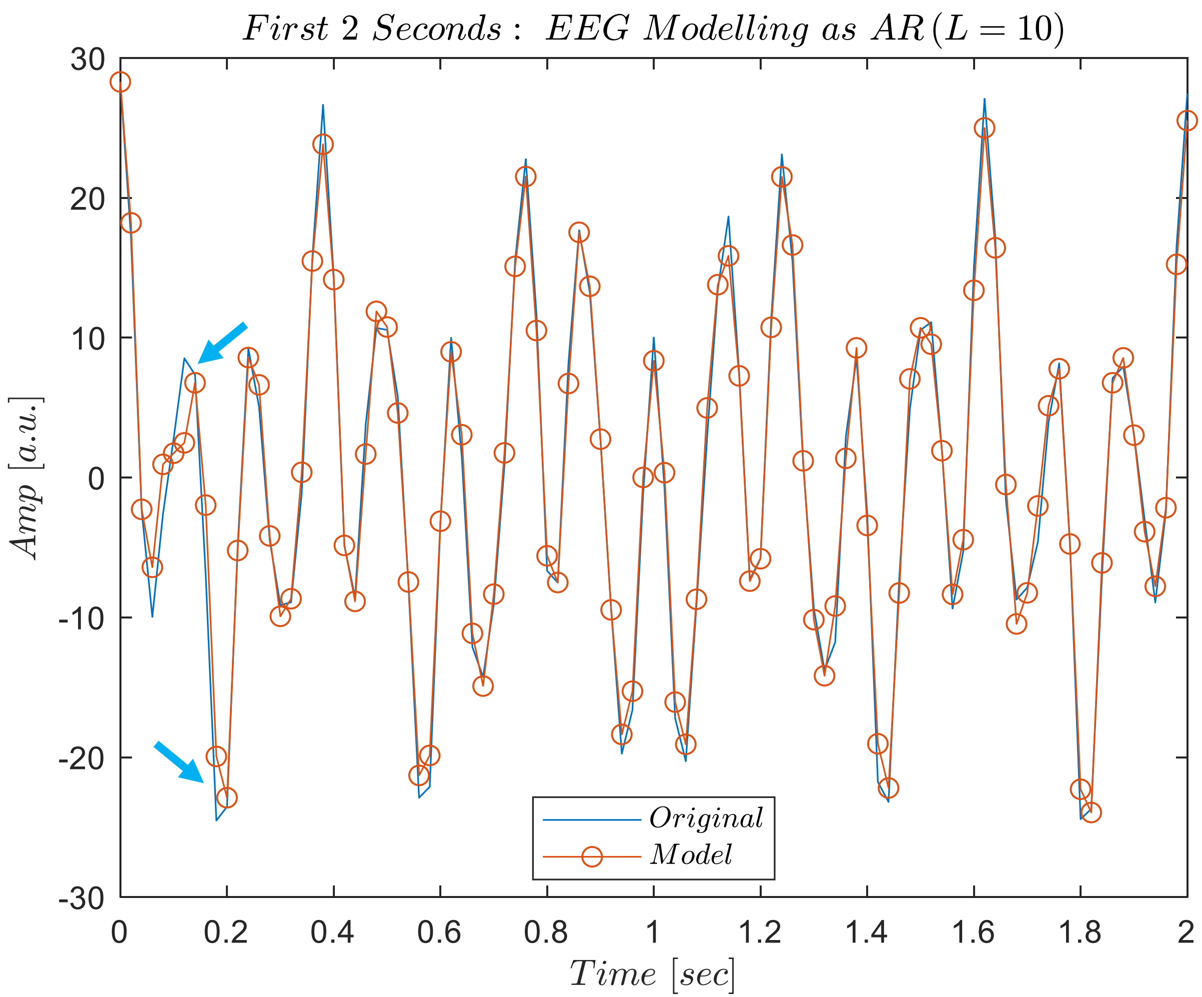
$$\underline{a} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{r}$$

כאשר:

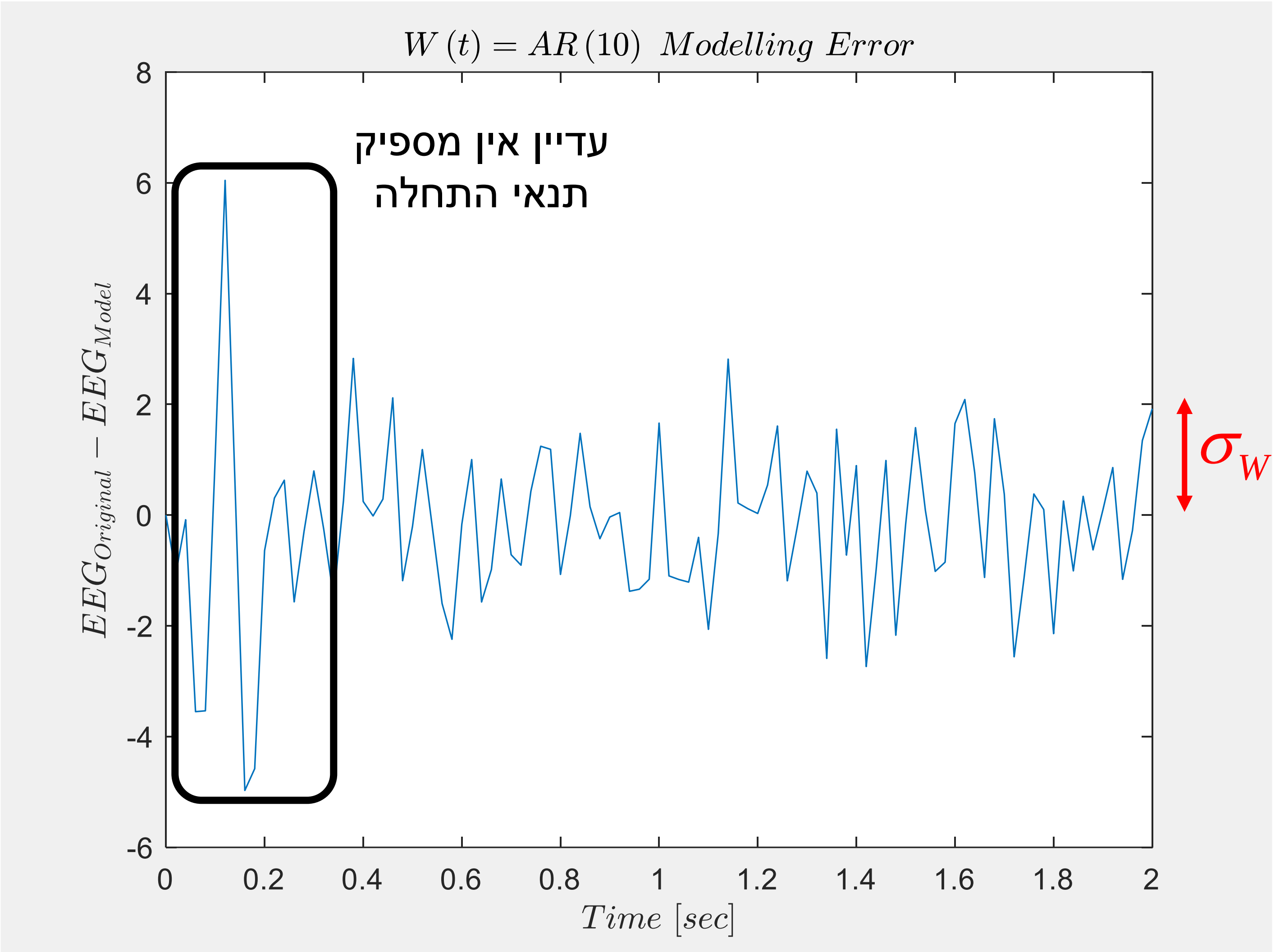
$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \dots & R_{yy}(L-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \dots & R_{yy}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{yy}(L-1) & R_{yy}(L-2) & \cdots & R_{yy}(0) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{R}}(i,l) = R_{yy}(l-i) \quad , \quad \underline{r} = -\begin{bmatrix} R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(L) \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix}$$

שערוך מודל AR



שערוך מודל AR



סדר מודל AR

- קריטריונים מקובלים לבחירת סדר המודל AR:
- Akaike information criterion (AIC)

$$M_{AIC}\left(L\right)=N\ln\sigma_{e_L}^2+2\cdot L$$

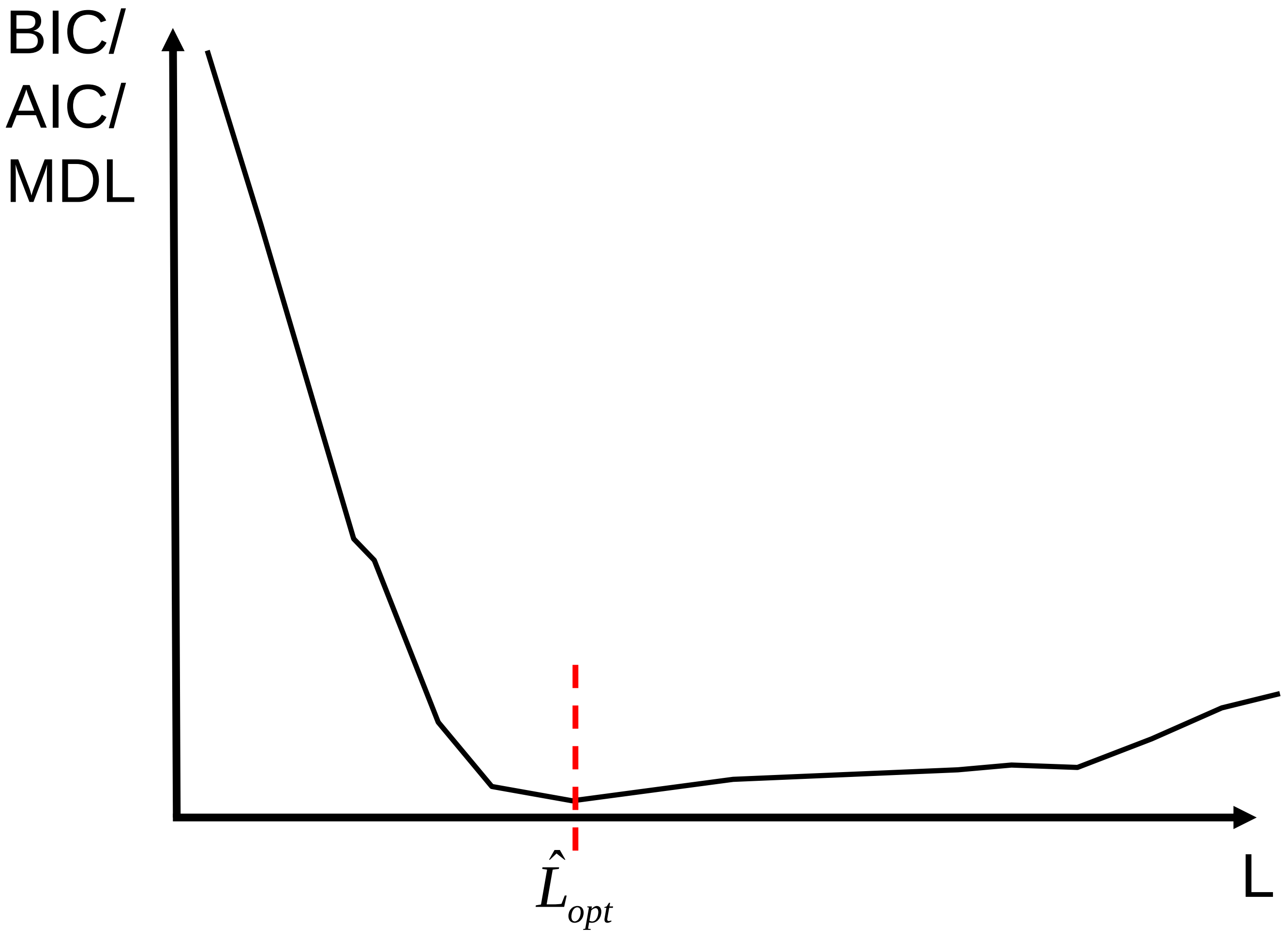
- Minimum description length (MDL)

$$M_{MDL}\left(L\right)=N\ln\sigma_{e_L}^2+L\cdot\log N$$

- N אורך האות, L סדר המודל
- $\sigma_{e_L}^2$ שונות שגיאת החיזוי

$$\boxed{\sigma_{e_L}^2=E\left[\left(X_n-X_{n|n-1}\right)^2\right]=E\left[\left(W\left[n\right]\right)^2\right]=\sigma_W^2}$$

סדר מודל AR

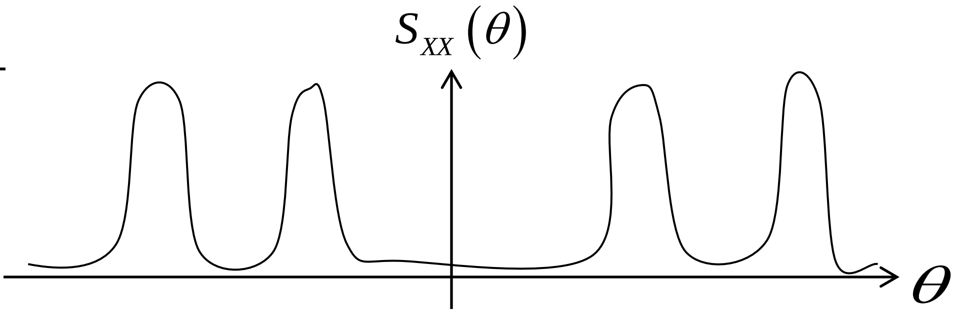


ניחוש סדר מודל AR

- בהסתמך על הצפיפות הספקטרלית:

$$S_{XX}(z) = \sigma_W^2 \left|H(z)\right|^2 = \frac{\sigma_W^2}{\left|A(z)\right|^2}$$

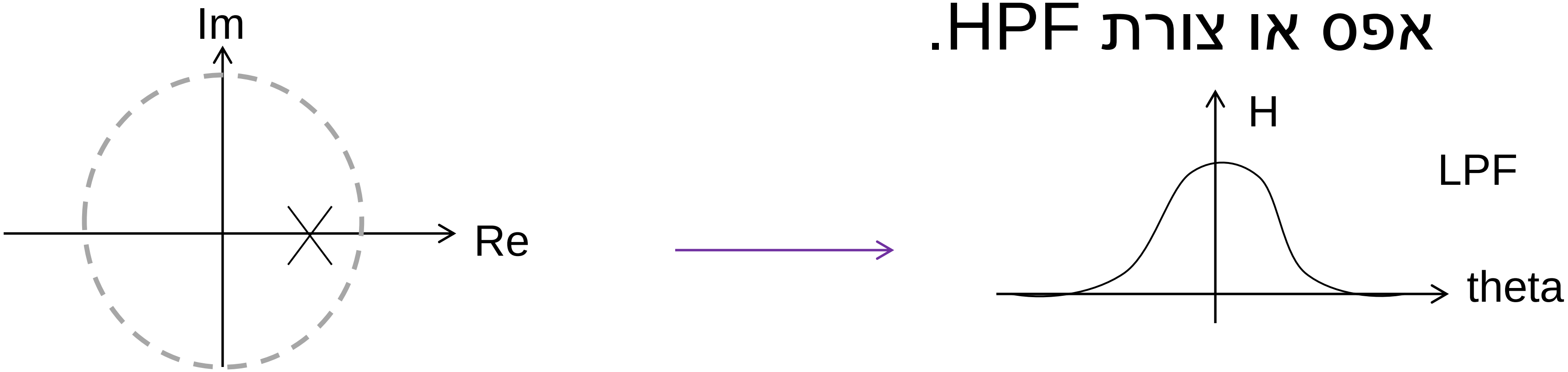
קטבים 4←

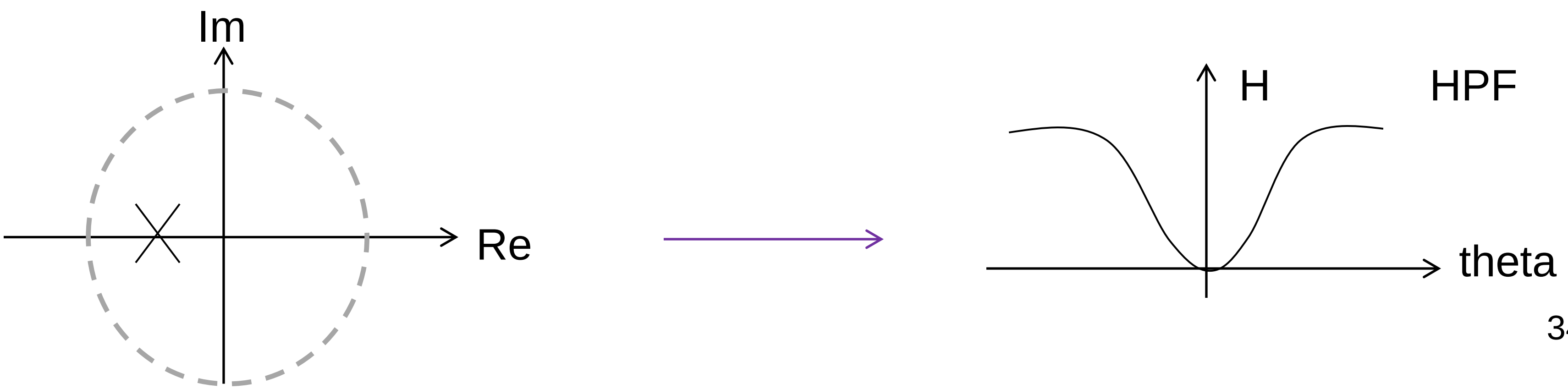


- אם ידוע שאות נוצר ממערכת בעלת קטבים בלבד ניתן להסיק לפי מספר השיאים בספקטרום את מספר הקטבים.
- לפי מספר הקטבים ניתן לנחש רף מינימאלי לסדר המודל.

ניחוש סדר מודל AR

- מקרים חריגים:
  - קוטב על הציר הממשי ← "גבעה" בודדת סביב תדר אפס או צורת HPF.





דוגמה 1 – שאלה ממבחן

על הלוח.

דוגמא 1 – שאלה ממבחן

- שיטה חדשה של חברת PulmoSonix האוסטרלית לניטור התכונות המכאניות של הריאה מבוססת על הזרקת אות אקוסטי בעל ספקטרום לבן בקנה הנשימה ומדידת היציאה באמצעות מתמר הממוקם על בית החזה. עבור נבדק מסוים נמדד אות יציאה מהמערכת בצורה: $x[n] = -0.5w[n] + w[n-1] - 0.5w[n-2]$

  כאשר w - הוא הכניסה למערכת (רעש גאוסי לבן בעל שונות 1).

א. (3 נק') האם המודל מתאר פילטר IIR או FIR? אינטואיטיבית איזה סוג של פילטר הריאה מיישמת? (...,BPF,HPF,LPF)

דוגמא 1 – שאלה ממבחן

ב. (4 נק') חשבו את האוטוקורלציה של $x[n]$

ג. (7 נק') מצאו את המקדמים של המודל האוטורגרסיבי מסדר 2 שמתאר בצורה הטובה ביותר את $x[n]$. השתמשו במשוואה המטריצית שלמדנו ובמקדמי האוטוקורלציה מסעיף ב'.

ד. (6 נק') אילו תדרים בולטים יש למודל האוטורגרסיבי?

ה. (לא מהמבחן) מהי שגיאת השערוך?

דוגמא 2

- נתון תהליך אקראי

$$y[n] = \cos(\omega n + \phi) \qquad \phi \sim U[0, 2\pi]$$

- מהם המקדמים של מודל AR?
- מהי שגיאת החיזוי?
- איך נפתור? Yule-Walker!

$$\underline{a} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{r}$$

פתרון

- נחשב את מקדמי האוטוקורלציה:

$$R_{YY}(i) = E_\phi\left[Y[n+i]\cdot Y[n]\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega n+\phi)\cos(\omega n+\omega i+\phi)\,d\phi \underset{(*)}{\overset{\downarrow}{=}}$$ **??**

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\left[\cos(-\omega i)+\cos(2\omega n+2\phi+\omega i)\right]d\phi =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cos(\omega i)\int_0^{2\pi} 1\,d\phi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\phi+2\omega n+\omega i)\,d\phi = \frac{1}{2}\cos(\omega i)+0$$

$$(*)\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

פתרון

- נניח שרירותית L=2:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \cos\omega \\ \cos 2\omega \end{bmatrix}$$

- כשנהפוך נקבל:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1-\cos^2\omega}\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\omega \\ \cos 2\omega \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{bmatrix} \cos\omega - \cos\omega\cos 2\omega \\ -\cos^2\omega + \cos 2\omega \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{bmatrix} \cos\omega\left(1-\cos 2\omega\right) \\ -\cos^2\omega + \cos^2\omega - \sin^2\omega \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{bmatrix} \cos\omega\left(2\sin^2\omega\right) \\ -\sin^2\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos\omega \\ 1 \end{bmatrix}$$

פתרון

- חישוב שגיאת החיזוי:

$$E\left[e_n^2\right]=E\left[\left(y_n+\sum_{k=1}^{2}a_k y_{n-k}\right)^2\right]=$$

$$=E\left[y_n^2+a_1^2y_{n-1}^2+a_2^2y_{n-2}^2+2a_1y_ny_{n-1}+2a_2y_ny_{n-2}+2a_1a_2y_{n-1}y_{n-2}\right]=$$

$$=R_{yy}(0)+a_1^2R_{yy}(0)+a_2^2R_{yy}(0)+2a_1R_{yy}(1)+2a_2R_{yy}(2)+2a_1a_2R_{yy}(1)=$$

$$=\left(1+a_1^2+a_2^2\right)\cdot R_{yy}(0)+\left(2a_1+2a_1a_2\right)\cdot R_{yy}(1)+2a_2R_{yy}(2)$$

- נציב:

$$R_{YY}(i)=\frac{1}{2}\cos(\omega i)\qquad a_1=-2\cos\omega\quad a_2=1$$

פתרון

- נקבל את התוצאה הבאה:

$$E\left[e_n^2\right]=\left(1+4\cos^2\omega+1\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\left(0\right)+$$

$$+\left(2\cdot\left(-2\cos\left(\omega\right)\right)+2\cdot\left(-2\cos\left(\omega\right)\right)\cdot 1\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\omega\right)+2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cos\left(2\omega\right)=$$

$$=1+2\cos^2\omega-4\cos^2\omega+\cos\left(2\omega\right)=1-2\cos^2\omega+\cos\left(2\omega\right)=0$$

- קיבלנו $\sigma_W^2=0$, כלומר W אינו אקראי?
- הסיבה לסתירה היא שהאות אליו ניסינו להתאים מודל AR איננו אות **רגולרי**!

תנאי Paley-Wiener

- אם מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left(S\left(\omega\right)\right)\right|d\omega<\infty$ עבור סיגנלים בעלי הספק סופי $r\left(0\right)<\infty$ אז לסיגנל יש פירוק רגולרי.
- כלומר, סיגנלים שעבורם $S\left(\omega\right)=0$ על אינטרוול תדרים כלשהו, אין להם פירוק רגולרי.
- קוסינוס למשל הספקטרום שלו מתאפס בכל מקום מלבד תדר הבסיס של הקוסינוס והמינוס שלו.

בתוכנית:

- ✓ קורלציות וספקטרות
- ✓ השפעת מערכת LTI על הקורלציה
- ✓ שערוך מודל AR
- דוגמת מטלב

תרגיל מטלב

נתון אות דגום ב- 100 הרץ.

א. הציגו אותו.

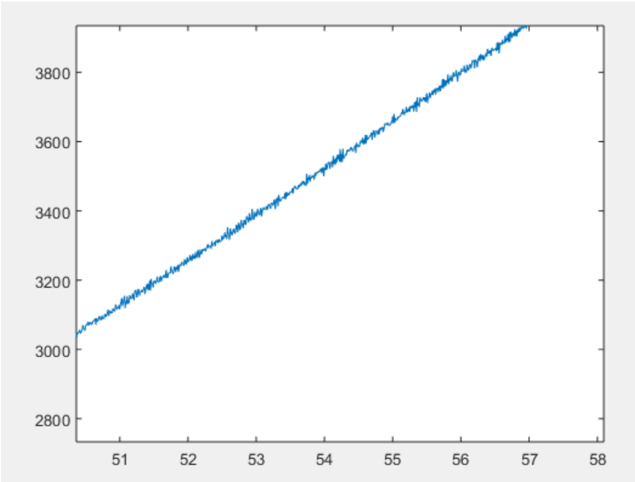
ניתן לראות שממוצע האות אינו קבוע בזמן.

ב. שערכו את ממוצע האות כתלות בזמן בעזרת least square fitting והציגו אותו על גבי האות המקורי.

ג. החסירו מהאות את הממוצע ששערכתם.
כעת שערכו את הממוצע וסטיית התקן של האות שהתקבל. מהו הממוצע?
הציגו את הממוצע וסטיית התקן המשוערכים על גבי האות (לאחר ההחסרה).

ד. שערכו את האוטו-קורלציה של האות, וממנה את האוטו-ספקטרום שלו. הציגו את שניהם בגרפים. כמה תדרים דומיננטיים יש לאות?

תרגיל מטלב

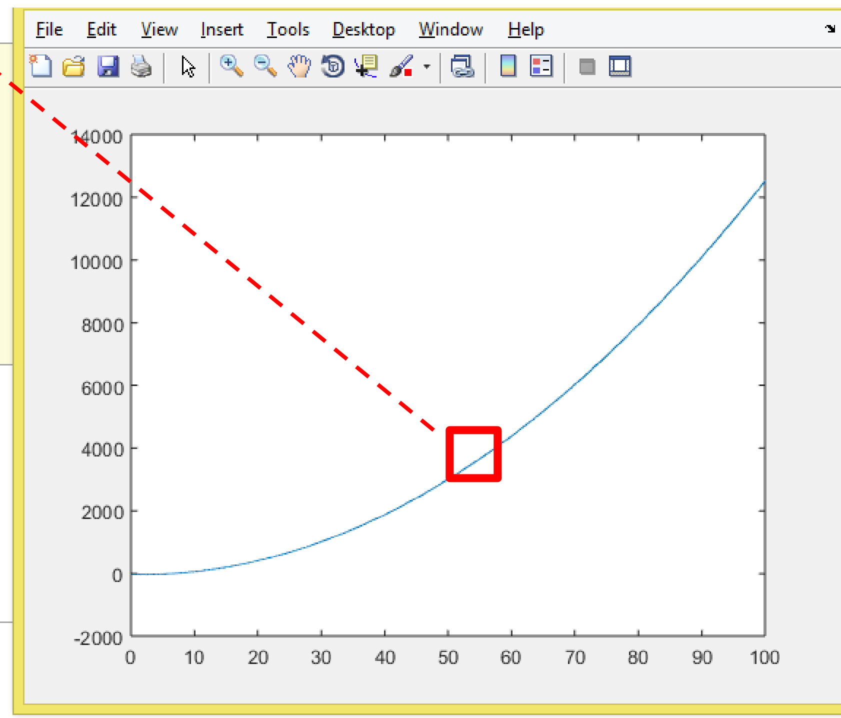


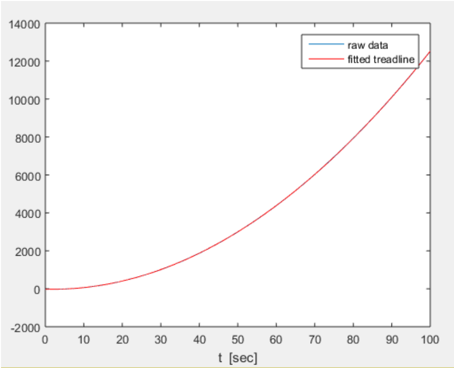
נתון אות דגום ב- 100 הרץ.

א. הציגו אותו.

ניתן לראות שממוצע האות אינו קבוע בזמן.

```
%% Part 1
load data
fs=100;    %Hz
dt=1/fs;
N=length(data);
t=(0:N-1)*dt;

h1=figure('name','raw data');
plot(t,data)

%% Part 2
poly=polyfit(t,data,2);
tread=poly(1)*t.^2+poly(2)*t+poly(3);
hold on
plot(t,tread,'r');
xlabel('t  [sec]')
legend('raw data','fitted treadline');

%% Part 3
x=data-tread;
mu_hat=mean(x);
```



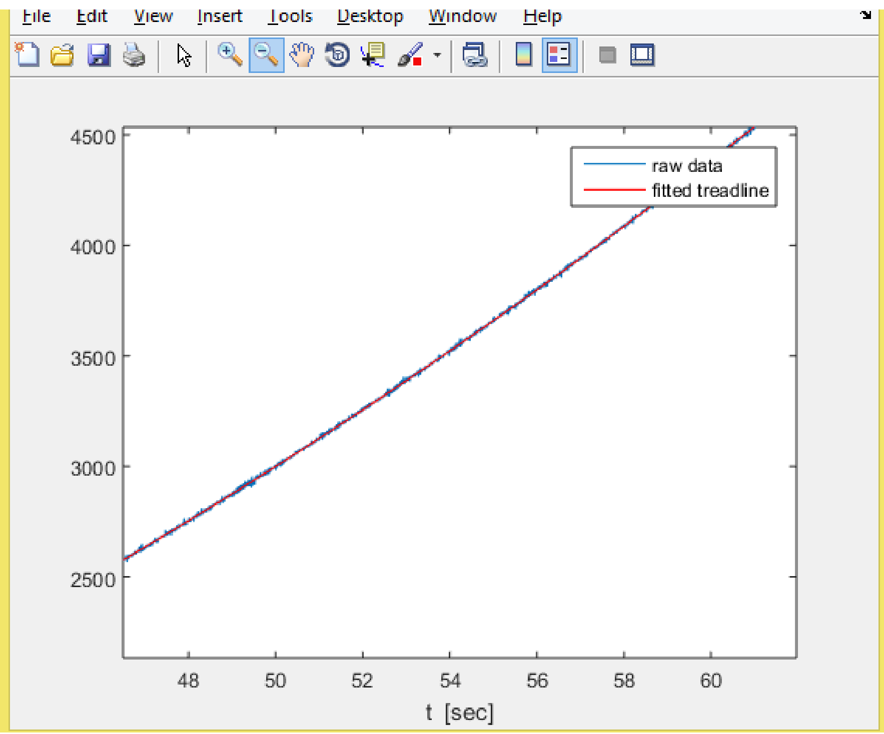


תרגיל מטלב

נתון אות דגום ב- 100 הרץ.

ב. שערכו את ממוצע האות כתלות בזמן בעזרת least square fitting והציגו אותו על גבי האות המקורי.

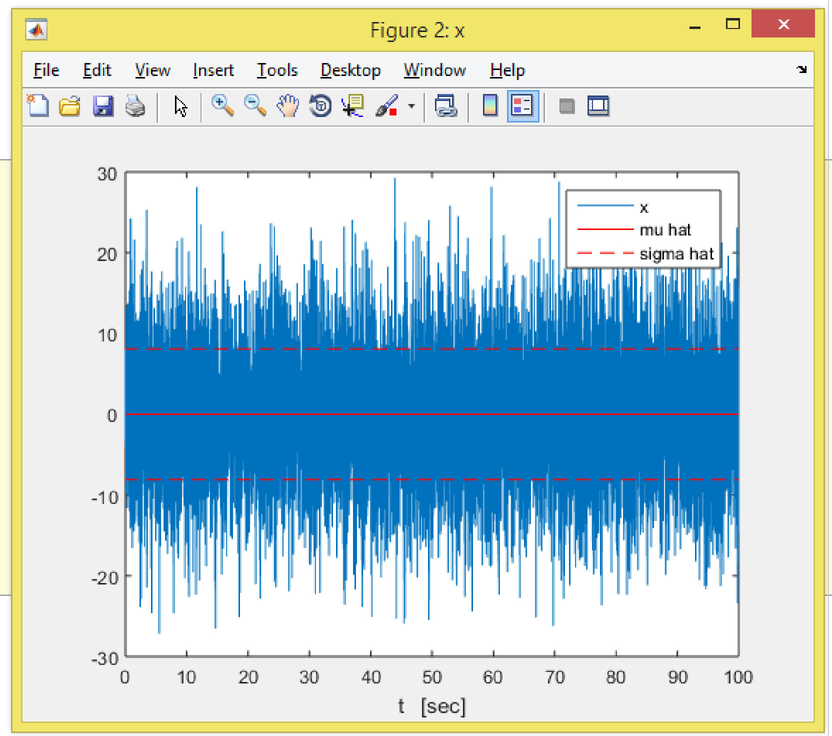
```
h1=figure('name','raw data');
plot(t,data)

%% Part 2
poly=polyfit(t,data,2);
tread=poly(1)*t.^2+poly(2)*t+poly(3
hold on
plot(t,tread,'r');
xlabel('t  [sec]')
legend('raw data','fitted treadline

%% Part 3
x=data-tread;
mu_hat=mean(x);
sigma2_hat=mean((x-mu_hat).^2);
sigma_hat=sqrt(sigma2_hat);
h2=figure('name','x');
plot(t,x)
hold on
plot(t,mu_hat*ones(size(t)),'r')
```



תרגיל מטלב

ג. החסירו מהאות את הממוצע ששערכתם.
כעת שערכו את הממוצע וסטיית התקן של האות שהתקבל. מהו הממוצע? הציגו את הממוצע וסטיית התקן המשוערכים על גבי האות (לאחר ההחסרה).

```
hold on
plot(t,tread,'r');
xlabel('t  [sec]')
legend('raw data','fitted treadline');

%% Part 3
x=data-tread;
mu_hat=mean(x);
sigma2_hat=mean((x-mu_hat).^2);
sigma_hat=sqrt(sigma2_hat);
h2=figure('name','x');
plot(t,x)
hold on
plot(t,mu_hat*ones(size(t)),'r')
plot(t,sigma_hat*ones(size(t)),'--r')
plot(t,-sigma_hat*ones(size(t)),'--r')
xlabel('t   [sec]')
legend('x','mu hat','sigma hat')

%% Part 4
points=2000;
Nc=points*2+1;
df=fs/Nc;
tau=(-points:points)*dt;
```

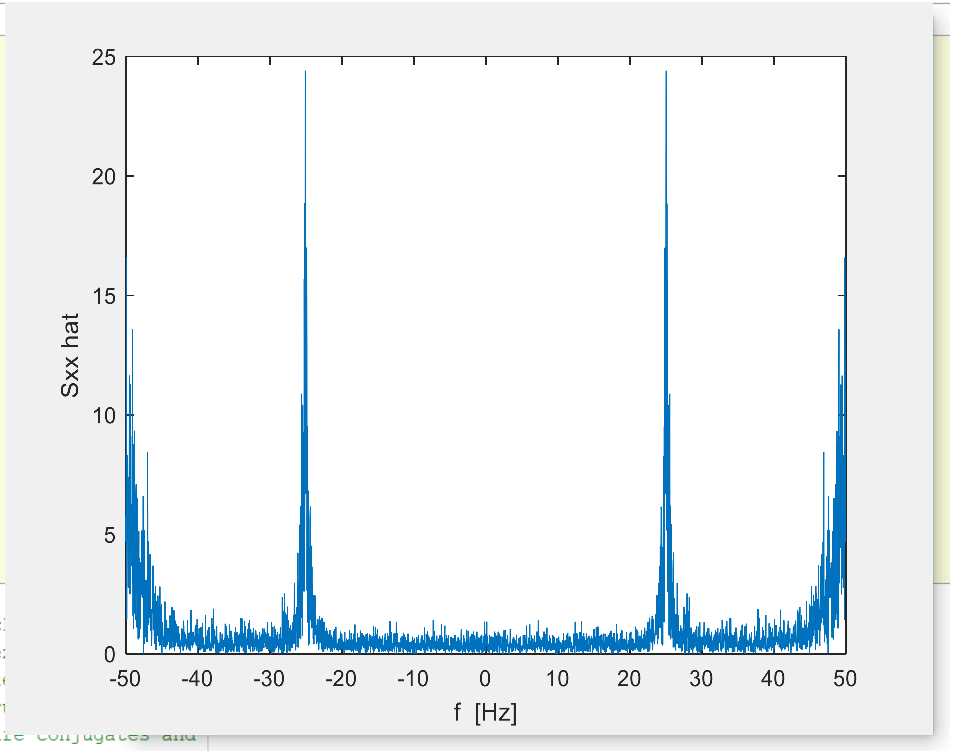


תרגיל מטלב

ד. שערכו את האוטו-קורלציה של האות, וממנה את האוטו-ספקטרום שלו. הציגו את שניהם בגרפים. כמה תדרים דומיננטיים יש לאות?

```
%% Part 4
points=2000;
Nc=points*2+1;
df=fs/Nc;
tau=(-points:points)*dt;
f=-fs/2:df:(fs/2-df);
Rxx_hat=xcorr(x,points);
Rxx_hat=Rxx_hat/Rxx_hat(points+1);
Sxx_hat=fftshift(fft(Rxx_hat));

h3=figure('name','auto correlation');
plot(tau,Rxx_hat)
xlabel('tau  [sec]')
ylabel('Rxx hat')

h4=figure('name','auto spectrum');
plot(f,abs(Sxx_hat))
xlabel('f  [Hz]')
ylabel('Sxx hat')

%% Part 5
% We know that a pole creates a peak in spectrum (see bac
% For a real system, if z0 is a pole than zo* (the comple
% A higher peak may be achieved by clustering several pole
% In this case we have a peak in the middle of the spectru
% high frequencies => we need at least 3 poles, 2 which are conjugates and
```

שערוך קורלציה וספקטרום



כעת נתאים לאות מודל AR ונבחן את מידת התאמתו.

ה. מהו סדר מודל AR המתאים לאות כזה?

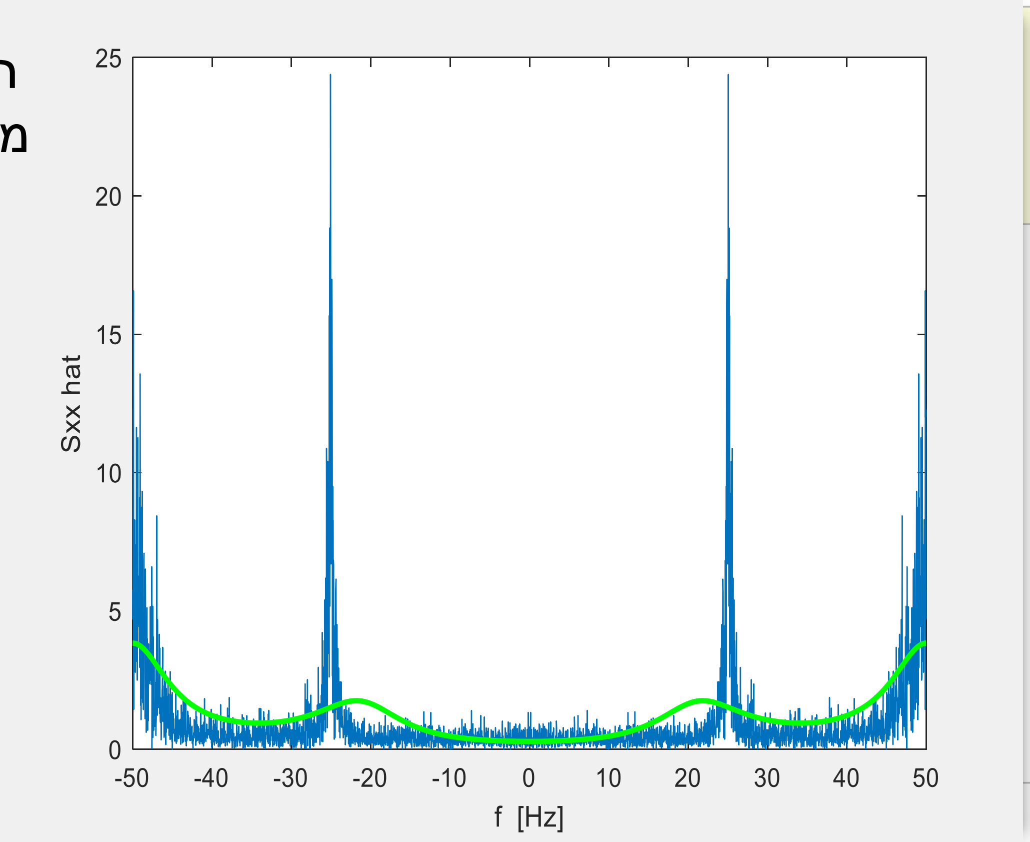
ו. התאימו לאות מודל AR מהסדר שקבעתם בסעיף ה'.

ז. הציגו על גבי הגרפים המתאימים את האוטו-קורלציה והאוטו-ספקטרום המתאימים למודל AR ששערכנו. האם ההתאמה טובה?

```matlab
%% Part 6
intTau=-points:points;
L=3;
R_hat=toeplitz(Rxx_hat(points+1:points+L));
r_hat=-(  Rxx_hat(points+2:points+L+1)  )';
a_hat=inv(R_hat)*r_hat;

%% Part 7
theta=2*pi*f/fs;
z=exp(-1i*theta);
A=ones(size(z));
for i=1:L
    A=A+a_hat(i)*z.^i;
end
Sxx_ar=1./(abs(A)).^2;
Rxx_ar=abs(fftshift(ifft(Sxx_ar)));

figure(h3)
hold on
plot(tau,Rxx_ar,'g','LineWidth',2)

figure(h4)
hold on
plot(f,Sxx_ar,'g','LineWidth',2)

%% Part 8
```

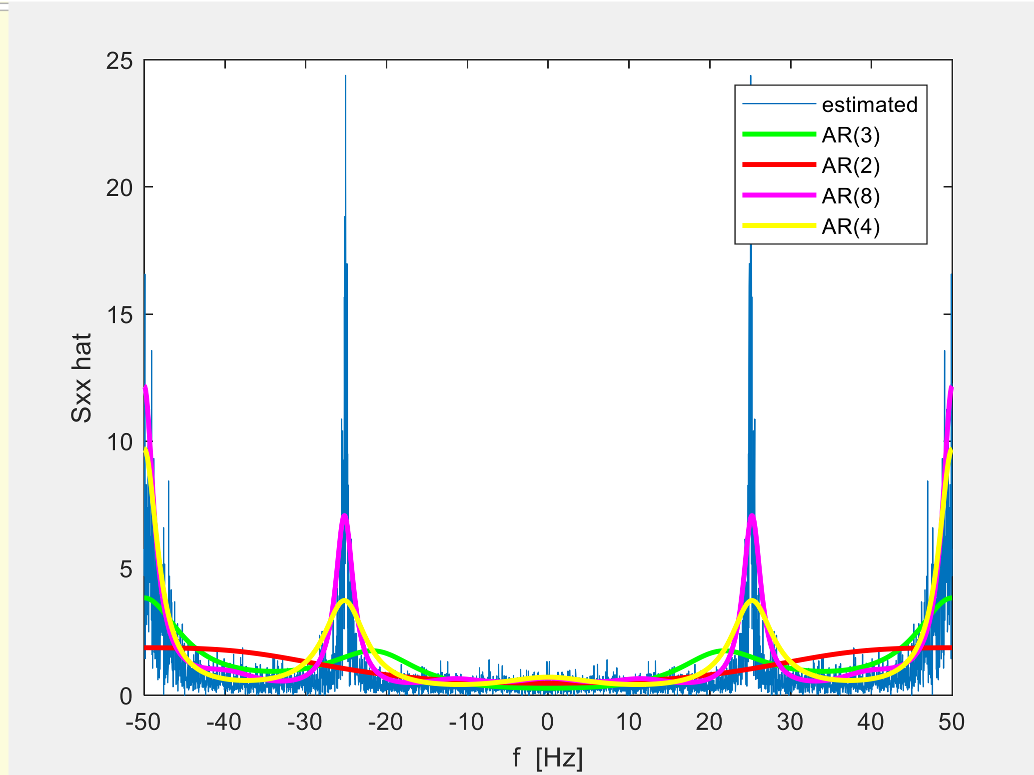
התאמת מודל AR

ספקטרום של AR



ח. התאימו לאות מודל AR מסדר 2 ומודל AR מסדר 8.
הציגו את האוטו-קורלציות והאוטו-ספקטרות המתאימים. מה ניתן לומר על מידת ההתאמה של שני סדרי המודל הללו?

```
%% Part 8

L2=2;
R_hat2=toeplitz(Rxx_hat(points+1:points+L2));
r_hat2=-(  Rxx_hat(points+2:points+L2+1)  )';
a_hat2=inv(R_hat2)*r_hat2;

A2=ones(size(z));
for i=1:L2
    A2=A2+a_hat2(i)*z.^i;
end
Sxx_ar2=1./(abs(A2)).^2;
Rxx_ar2=abs(fftshift(ifft(Sxx_ar2)));

figure(h3)
hold on
plot(tau,Rxx_ar2,'r','LineWidth',2)

figure(h4)
hold on
plot(f,Sxx_ar2,'r','LineWidth',2)

L3=8;
R_hat3=toeplitz(Rxx_hat(points+1:points+L3));
r_hat3=-(  Rxx_hat(points+2:points+L3+1)  )';
a_hat3=inv(R_hat3)*r_hat3;

A3=ones(size(z));
for i=1:L3
    A3=A3+a_hat3(i)*z.^i;
end
Sxx_ar3=1./(abs(A3)).^2;
Rxx_ar3=abs(fftshift(ifft(Sxx_ar3)));
```



ט. מה יקרה אם נעלה את סדר המודל יותר?

י. בעזרת המסננת המלבינה, חלצו את הרעש היוצר של האות. שערכו את סטיית התקן שלו.

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{l=1}^{L}a_l z^{-l}}=\frac{1}{A(z)}$$

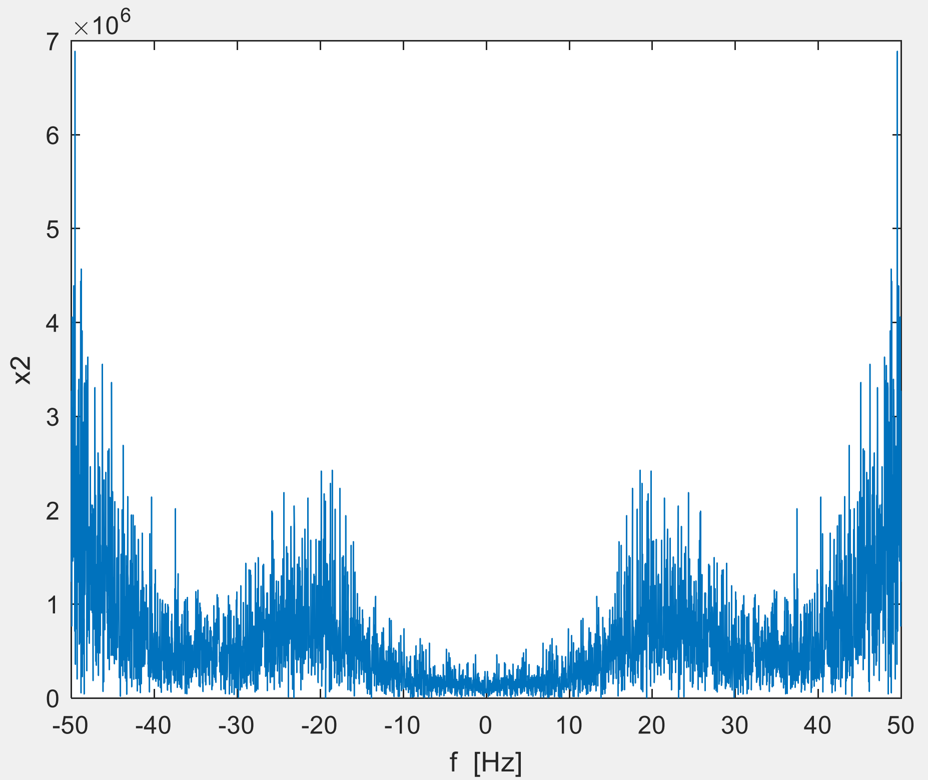
$$H_w(z)=H^{-1}(z)=A(z)$$

```
%% Part 10
w=filter([1,a_hat'],1,x);
sigma_w_hat=sqrt(mean((w-mean(w)).^2));
```

כעת נייצר אות חדש עם פונקצית אוטו-קורלציה דומה לזו של האות המקורי

י"א. העזרו במודל AR ששערכנו וצרו תהליך חדש בעל פונקצית אוטו-קורלציה זהה. השוו בין האות החדש לאות המקורי.

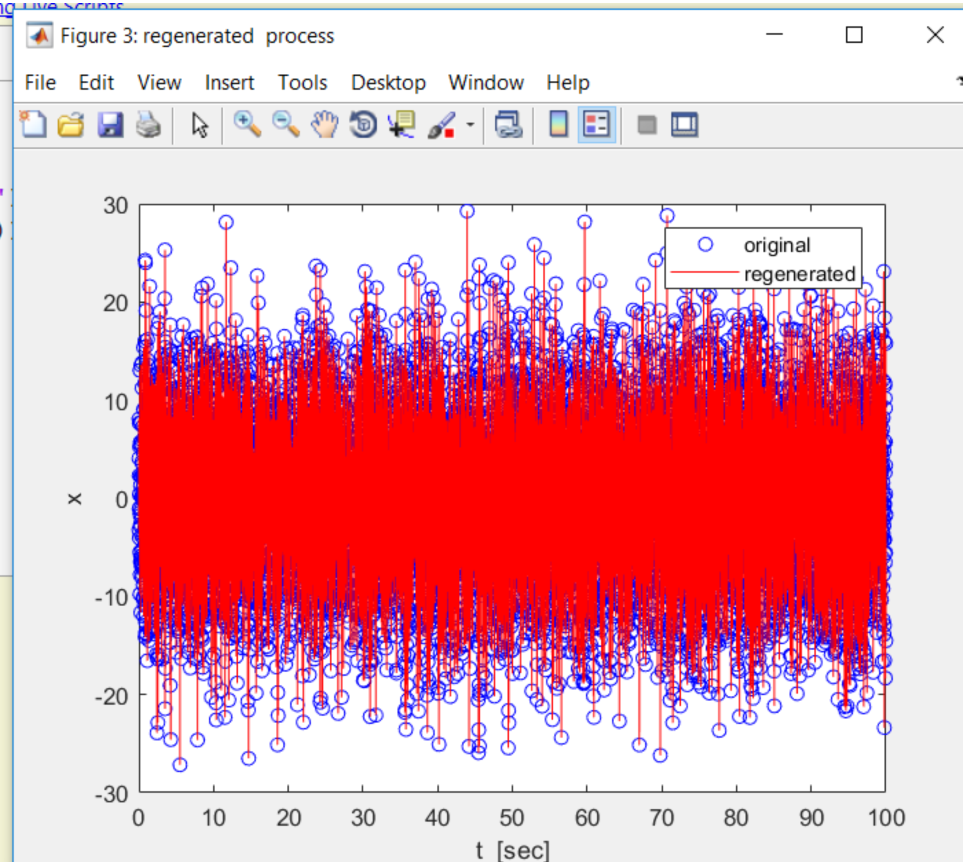
```
%% Part 10
w=filter([1,a_hat'],1,x);
sigma_w_hat=sqrt(mean((w-mean(w)).^2));

%% Part 11
w2=sigma_w_hat*randn(size(t));
x2=filter(1,[1,a_hat'],w2);
figure('name','new process - auto-spectrum')
plot(f,abs(fftshift(fft(xcorr(x2,points)))))
xlabel('f  [Hz]')
ylabel('x2')
figure('name','new process - time domain')
plot(t,x,'bo')
hold on
plot(t,x2,'r')
xlabel('t  [sec]')
legend('original','new')


%% Part 12
x_regenerated=filter(1,[1,a_hat'],w);
figure('name','regenerated  process')
plot(t,x,'bo')
hold on
plot(t,x_regenerated,'r')
xlabel('t  [sec]')
ylabel('x')
legend('original','regenerated')
```



י"ב. חזרו על הסעיף האחרון עם הרעש היוצר של האות המקורי.

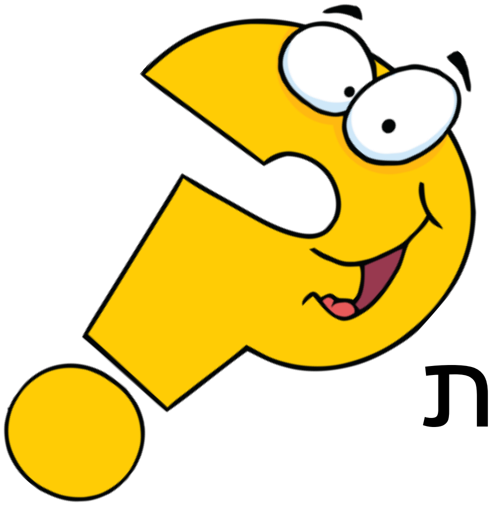
This file can be opened as a Live Script. For more information, see Creating Live Scripts

```
sigma_w_hat=sqrt(mean((w-mean(w)).^2));

%% Part 11
w2=sigma_w_hat*randn(size(t));
x2=filter(1,[1,a_hat'],w2);
figure('name','new process - auto-spectrum'
plot(f,abs(fftshift(fft(xcorr(x2,points))))
xlabel('f  [Hz]')
ylabel('x2')
figure('name','new process - time domain')
plot(t,x,'bo')
hold on
plot(t,x2,'r')
xlabel('t  [sec]')
legend('original','new')


%% Part 12
x_regenerated=filter(1,[1,a_hat'],w);
figure('name','regenerated  process')
plot(t,x,'bo')
hold on
plot(t,x_regenerated,'r')
xlabel('t  [sec]')
ylabel('x')
legend('original','regenerated')
```



בתוכנית:

- ✓ קורלציות וספקטרות
- ✓ השפעת מערכת LTI על הקורלציה
- ✓ שערוך מודל AR
- ✓ דוגמת מטלב



שאלות

תרגול 5 – אפליקציות של פונקציות קורלציה

מה בתכנית?

- יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - בעזרת פילטר FIR
  - בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - לפי קרוסקורלציה
  - לפי קרוס-ספקטרום
  - שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - הרחבה למקרה הוקטורי

מה בתכנית?

- יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - בעזרת פילטר FIR
  - בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - לפי קרוסקורלציה
  - לפי קרוס-ספקטרום
  - שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - הרחבה למקרה הוקטורי

יצירת וא"ג עם קורלציה רצויה

- נניח כי נתון לנו וא"ג שהכניסות שלו i.i.d

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x_1, \ldots, x_n \underset{i.i.d}{\sim} N\left(0, \sigma_x^2\right)$$

- מהי מטריצת הקווריאנס שלו?

יצירת וא"ג עם קורלציה רצויה

- לפי ההגדרה נקבל:

$$\underline{\underline{C}}_x = E\left(\left(\underline{x}-\underline{0}\right)\left(\underline{x}-\underline{0}\right)^T\right) = \begin{bmatrix} E\left(x_1^2\right) & E\left(x_1 x_2\right) & \cdots & \\ E\left(x_2 x_1\right) & E\left(x_2^2\right) & & \\ \vdots & & & \\ E\left(x_n x_1\right) & \cdots & & E\left(x_n^2\right) \end{bmatrix} = \sigma_x^2 \underline{\underline{I}}_{N\times N}$$

- <u>שאלה:</u> איך ניתן לעצב את הקורלציה כרצוננו?

יצירת וא"ג עם קורלציה רצויה

- נזכר בטרנספורמציה ליניארית של וא"ג מאקראיים:

$$\underline{y} = \underline{\underline{H}}\,\underline{x}$$

$$E\left[\underline{y}\right] = E\left[\underline{\underline{H}}\,\underline{x}\right] = \underline{\underline{H}}E\left[\underline{x}\right] = 0$$

$$\underline{\underline{C}}_y = E\left(\left(\underline{y}-\underline{0}\right)\left(\underline{y}-\underline{0}\right)^T\right) = E\left(\underline{\underline{H}}\,\underline{x}\left(\underline{\underline{H}}\,\underline{x}\right)^T\right) = \underline{\underline{H}}\,\underbrace{E\left[\underline{x}\cdot\underline{x}^T\right]}_{\sigma_x^2\underline{\underline{I}}_{N\times N}}\underline{\underline{H}}^T = \sigma_x^2\,\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$$

- מהנוסחה ניתן לראות כי המטריצה H יכולה לשמש אותנו כדי לשלוט על הקורלציה של הוא"ג!

יצירת וא"ג עם קורלציה רצויה

- לסיכום, בהינתן מטריצת קורלציה רצויה $\underline{\underline{C}}_y$, נוכל לייצר וא"ג מתאים באופן הבא:

1. נגריל וא"ג $\underline{x}$ עם שונות $\sigma_x^2 = 1$
2. נמצא את המטריצה $\underline{\underline{H}}$ אשר מקיימת $\underline{\underline{C}}_y = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$

   (ניתן לממש ע"י פירוק צ'ולסקי)
3. נכפול את הוא"ג שהגרלנו בשלב 1 במטריצה משלב 2 כדי

   לקבל את הוא"ג הרצוי $\underline{y} = \underline{\underline{H}}\,\underline{x}$

מעבר מוקטור לתהליך

- <u>שאלה:</u> איך נרחיב את הטרנספורמציה לעבור תא"ג?

נדרוש מבניות מסויימת של המטריצה H!

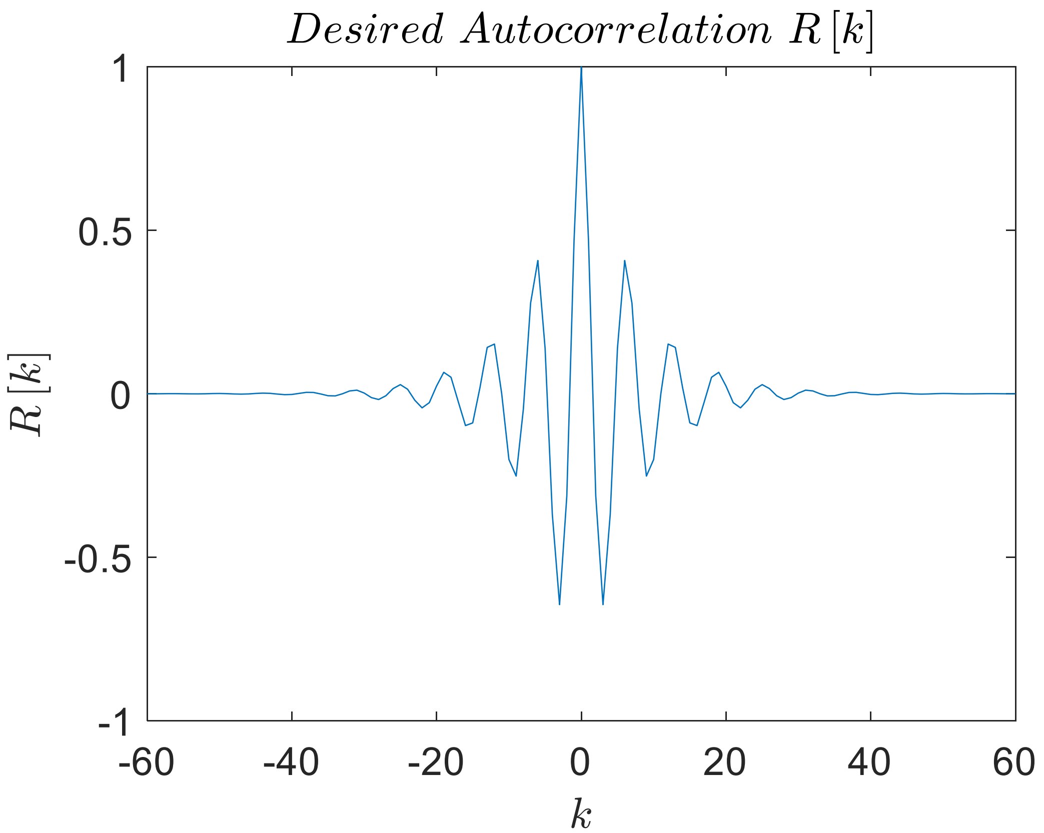
- בפרט, אנו נעבוד עם מטריצה H שמייצגת פעולה של מערכת ליניארית וקבועה בזמן, כלומר מטריצת קונבולוציה ציקלית!
- את הפילטר השקול לפעולת המטריצה נממש בעזרת שתי שיטות:
  - פילטר IIR
  - פילטר FIR

מעבר מוקטור לתהליך

- באופן שקול לוא"ג עם כניסות i.i.d, התהליך כניסה שלנו יהיה רעש לבן גאוסי עם שונות 1.
- במקום מטריצת קורלציה רצויה לכניסות וקטור המוצא $\underline{y}$, כעת תהיה נתונה לנו פונקצית אוטוקורלציה רוציה $R_{yy}\left(k\right)$.
- שימו לב שכל ההבדל הוא ייחוס משמשעות של זמן לאינדקסים.
- היות והתהליך סטציונרי, נתאר את הקורלציה בהפרשי זמנים במקום האינדקסים המקוריים.

דוגמה בנוסף

- נניח רוצים סיגנל עם האוטוקורלציה הבאה:



מה בתכנית?

- יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - בעזרת פילטר FIR
  - בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - לפי קרוסקורלציה
  - לפי קרוס-ספקטרום
  - שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - הרחבה למקרה הוקטורי

מימוש בעזרת פילטר FIR

1. נגריל רל"ג (רעש לבן גאוסי) $\underline{x}$ עם שונות $\sigma_x^2 = 1$.
2. נבחר את K - סדר הפילטר FIR הרצוי.
3. נבנה את מטריצת הקורלציה המתאימה לשחזור פילטר מסדר K בצורה הבאה:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & \cdots & R_{yy}(K) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ R_{yy}(-K) & & R_{yy}(0) & & R_{yy}(K) \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{yy}(-K) & \cdots & R_{yy}(0) \end{bmatrix}\right\} 2K+1}_{2K+1}$$

4. נמצא את המטריצה $\underline{\underline{H}}$ אשר מקיימת $\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$. ניתן לעשות זאת במטלב ע"י הפקודה sqrtm.
5. כדי לגזור את מקדמי פילטר ה-FIR השקול למטריצת הקונבולוציה $\underline{\underline{H}}$, נקח את השורה האמצעית:

$$\underline{b}_{FIR} = \underline{\underline{H}}\left[\frac{end}{2},:\right]$$

6. נפלטר את הרל"ג שהגרלנו עם הפילטר שגזרנו בשלב 5 לקבלת התא"ג הרצוי $y = filter\left(\underline{b}_{FIR}, 1, x\right)$.

מה בתכנית?

- יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ←בעזרת פילטר FIR
  - בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - לפי קרוסקורלציה
  - לפי קרוס-ספקטרום
  - שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - הרחבה למקרה הוקטורי

מימוש בעזרת פילטר IIR

1. נגריל רל"ג $\underline{x}$ עם שונות $\sigma_x^2=1$.
2. נבחר את L - סדר פילטר ה-IIR הרצוי.
3. נפתור את משוואות Yule-Walker מסדר L למציאת המקדמים של פילטר ה-IIR המתאים:

$$\underline{a_{IIR}}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \cdots & R_{yy}(L-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \cdots & R_{yy}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{yy}(L-1) & R_{yy}(L-2) & \cdots & R_{yy}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(L) \end{bmatrix}$$

4. נפלטר את הרל"ג שהגרלנו עם הפילטר שגזרנו בשלב 3 לקבלת התא"ג הרצוי $y = filter\left(1,\left[1;\ \underline{a_{IIR}}\right],x\right)$.

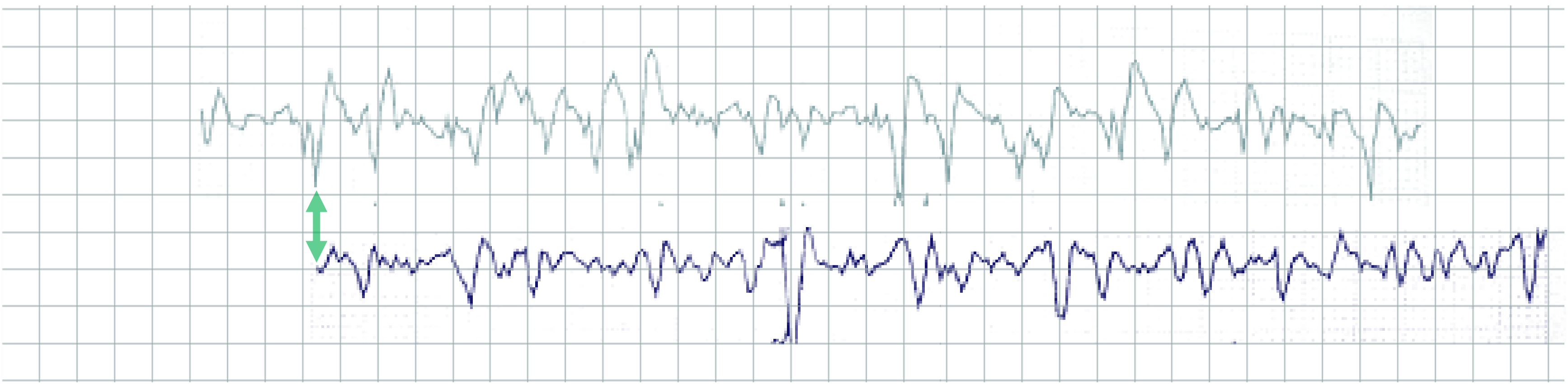
מה בתכנית?

- ✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ← בעזרת פילטר FIR
  - ← בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - לפי קרוסקורלציה
  - לפי קרוס-ספקטרום
  - שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - הרחבה למקרה הוקטורי

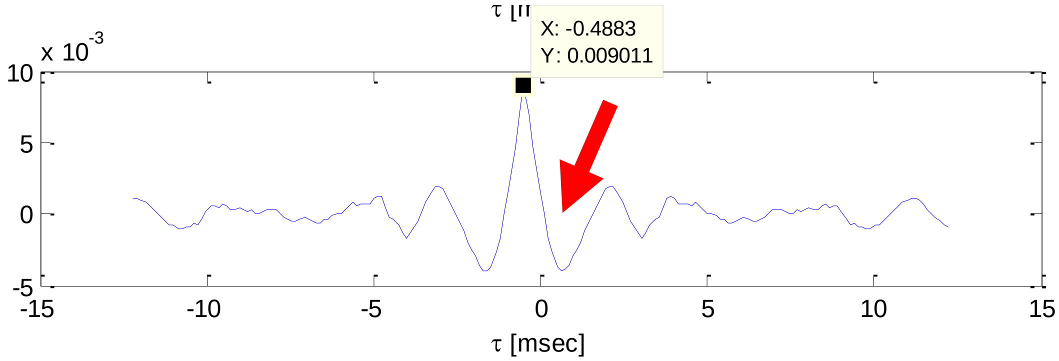
שערוך השהיה

- כללי המשחק:
  – נתונים שני אותות שמכילים מידע זהה
  – האותות מושהים זה ביחס לזה
  – לכל אחד מהם התווסף רעש שונה
- מטרה:
  – נרצה לשערך את ההשהייה בין האותות
- שאלה: למה המשימה הזאת לא טריוויאלית?
  – כי לכל אות התווסף רעש **שונה**!

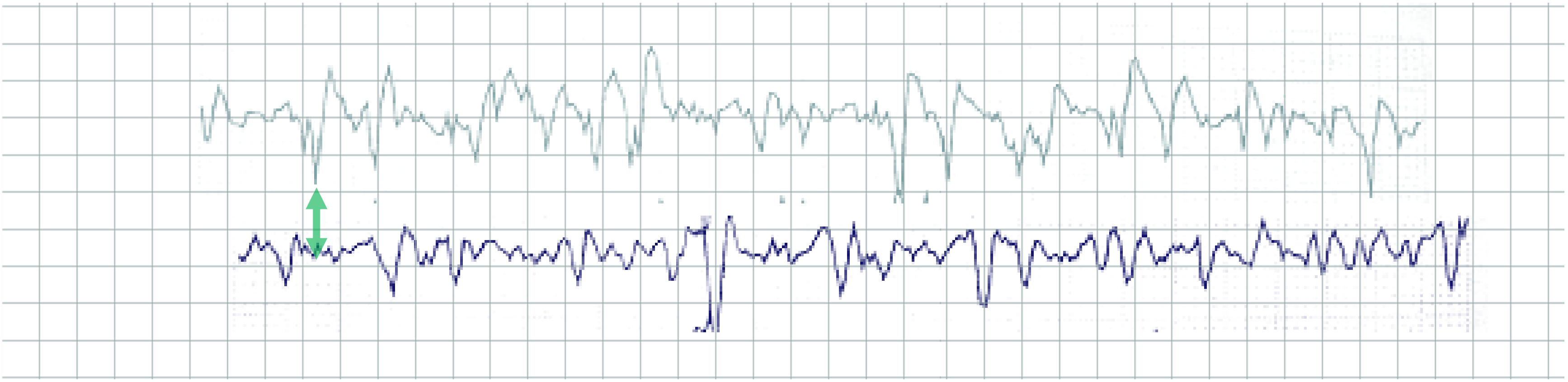
שערוך השהיה - המחשה



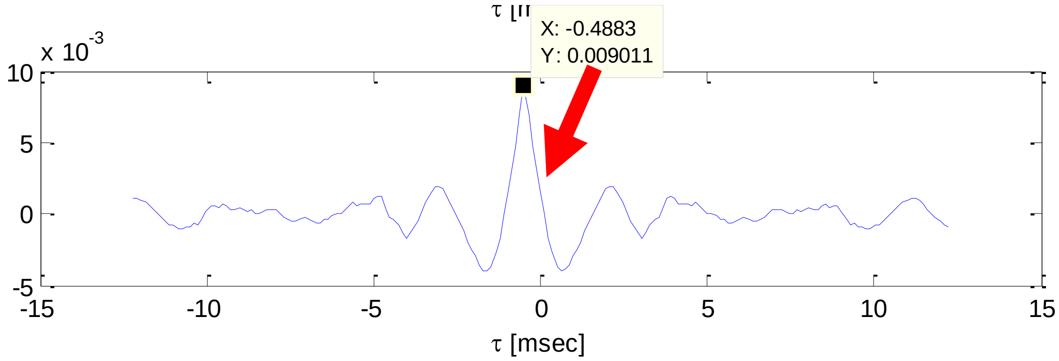
$\tau = 0$



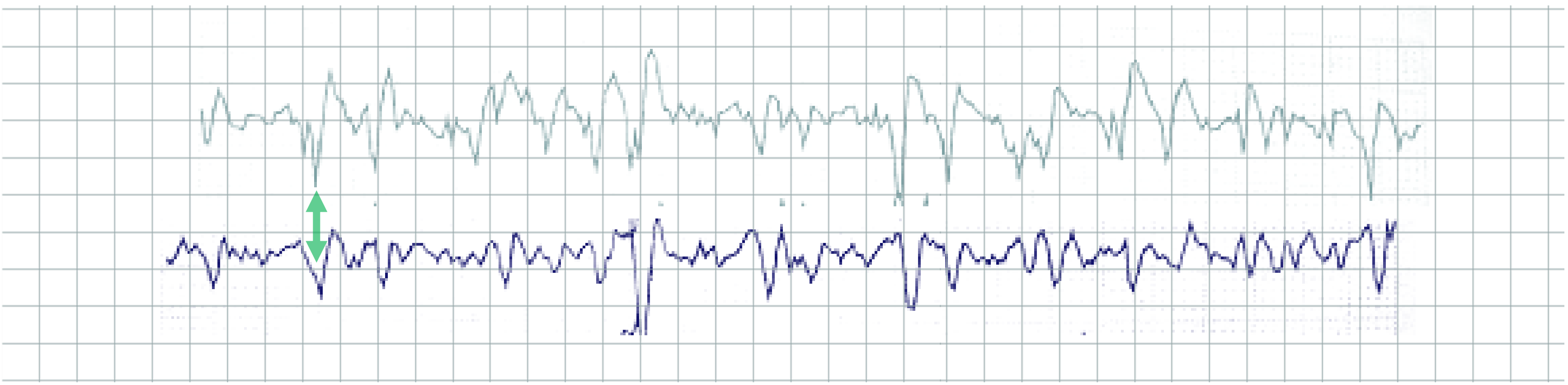
שערוך השהיה - המחשה



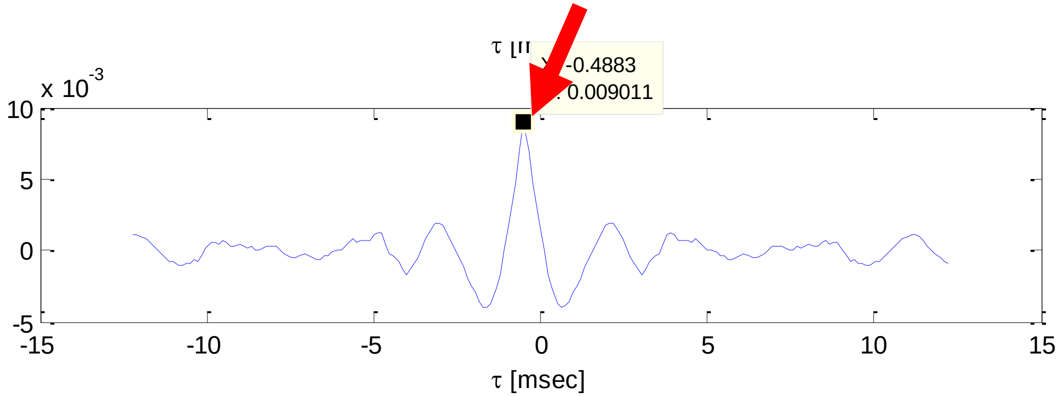
$$\tau = -0.2$$



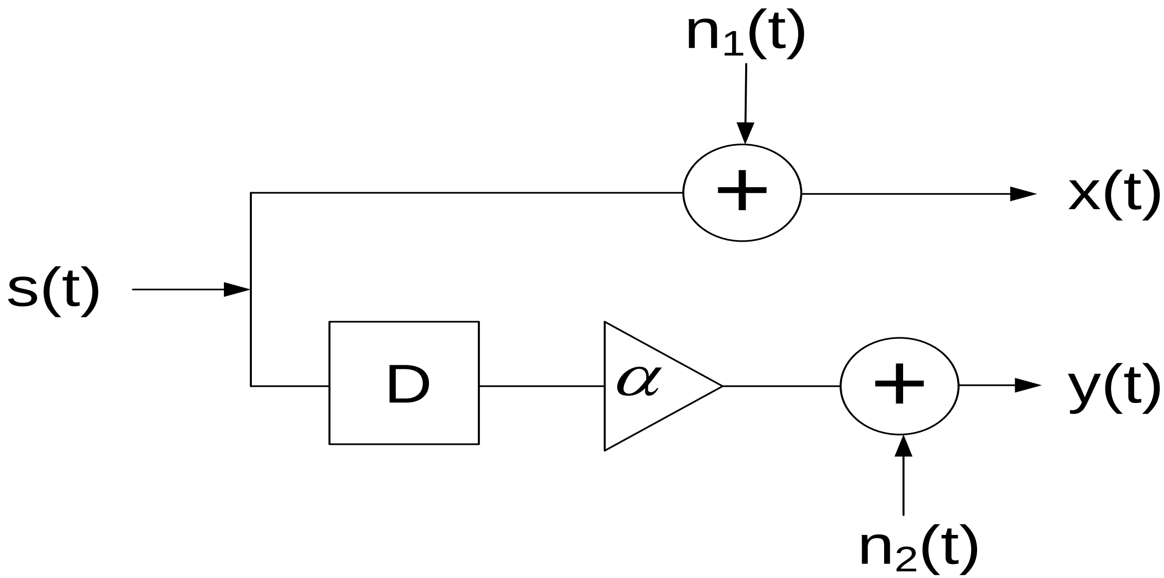
שערוך השהיה - המחשה



$$\tau = -0.49$$



שערוך השהיה - המודל



- $s(t)$ כניסה למערכת, α הגבר , D השהייה לא ידועה.
- $n_1(t), n_2(t)$ בעלי תוחלת אפס, בת"ס זה בזה וב- s.
- שתי היציאות:

$$x(t)=s(t)+n_1(t)$$

$$y(t)=\alpha\cdot s(t-D)+n_2(t)$$

מה בתכנית?

- ✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ← בעזרת פילטר FIR
  - ← בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - – לפי קרוסקורלציה
  - – לפי קרוס-ספקטרום
  - – שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - – הרחבה למקרה הוקטורי

שערוך השהיה לפי קרוס-קורלציה

- נתבונן בקרוס-קורלציה בין שני האותות:

$$\boxed{R_{xy}(\tau)} = E\left[x(t+\tau)y(t)\right] =$$

$$= E\left\{\left[s(t+\tau)+n_1(t+\tau)\right]\cdot\left[\alpha s(t-D)+n_2(t)\right]\right\} =$$

$$= \alpha \underbrace{E\left[s(t+\tau)\cdot s(t-D)\right]}_{R_{ss}(\tau+D)} + \alpha \underbrace{E\left[n_1(t+\tau)\right]}_{0} E\left[s(t-D)\right] +$$

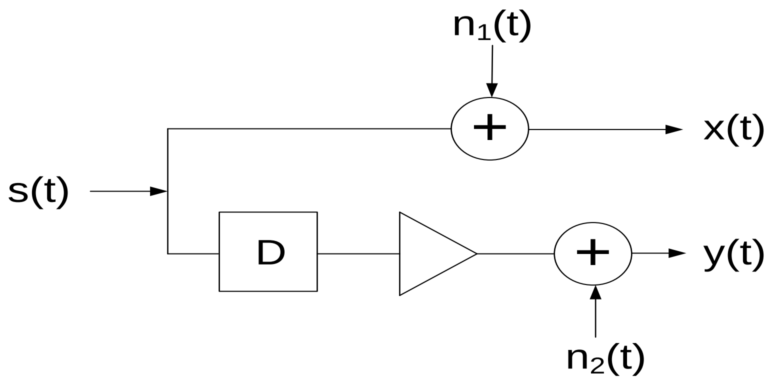
$$+ E\left[s(t+\tau)\right]\underbrace{E\left[n_2(t)\right]}_{0} + \underbrace{E\left[n_1(t+\tau)\right]}_{0}\underbrace{E\left[n_2(t)\right]}_{0} = \boxed{\alpha R_{ss}(\tau+D)}$$

- לכן, **מיקום המקסימה של הקרוס-קורלציה ייתן לנו את ההשהיה.**

מה בתכנית?

- ✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ← בעזרת פילטר FIR
  - ← בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - ← לפי קרוסקורלציה
  - – לפי קרוס-ספקטרום
  - – שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - – הרחבה למקרה הוקטורי

שערוך השהיה לפי קרוס-ספקטרום



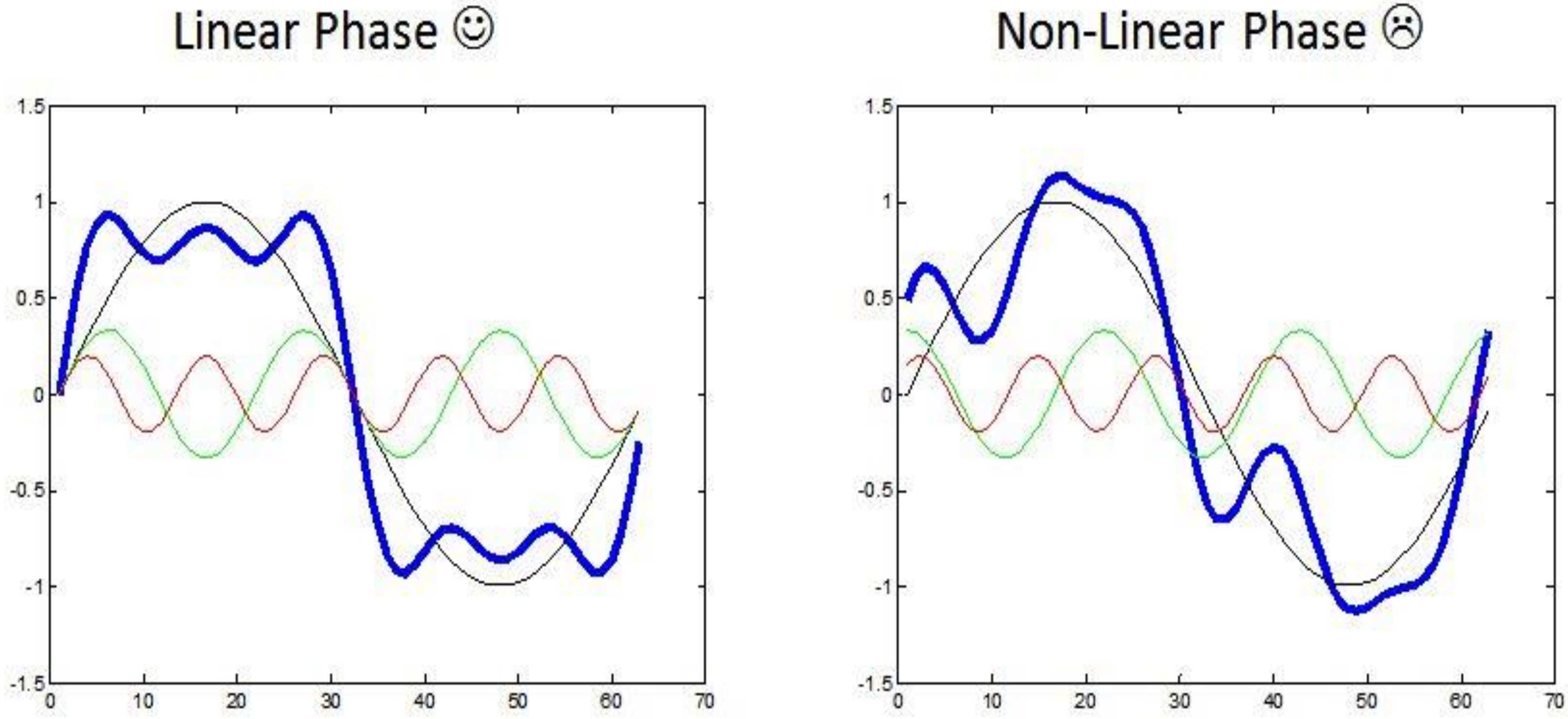
- קרוס-ספקטרום:

$$\boxed{S_{xy}(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(\tau + D) e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f(\tau - D)} d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi fD} d\tau = \boxed{\alpha S_{ss}(f) e^{j2\pi fD}}$$

- מכיוון ש- $R_{ss}(\tau)$ סימטרית, $S_{ss}(f)$ ממשית ולכן מקבלים פאזה ליניארית.

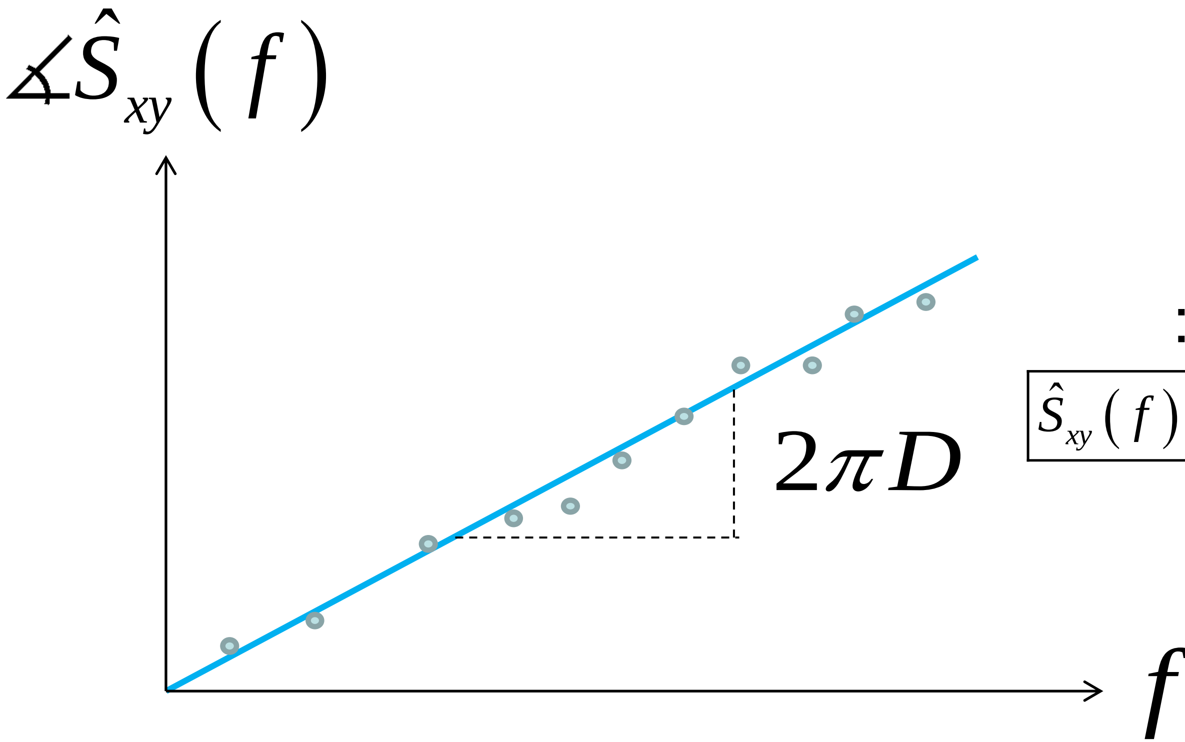
תזכורת – תמונת הפאזה



http://www.dspguide.com/ch10/2.htm לקוח מ

שערוך השהיה לפי קרוס-ספקטרום

- איך תראה תמונת הפאזה של הקרוס-ספקטרום עבור השהייה חיובית?



תזכורת:

$$\boxed{\hat{S}_{xy}(f) = \alpha S_{ss}(f) e^{j2\pi fD}}$$

מה בתכנית?

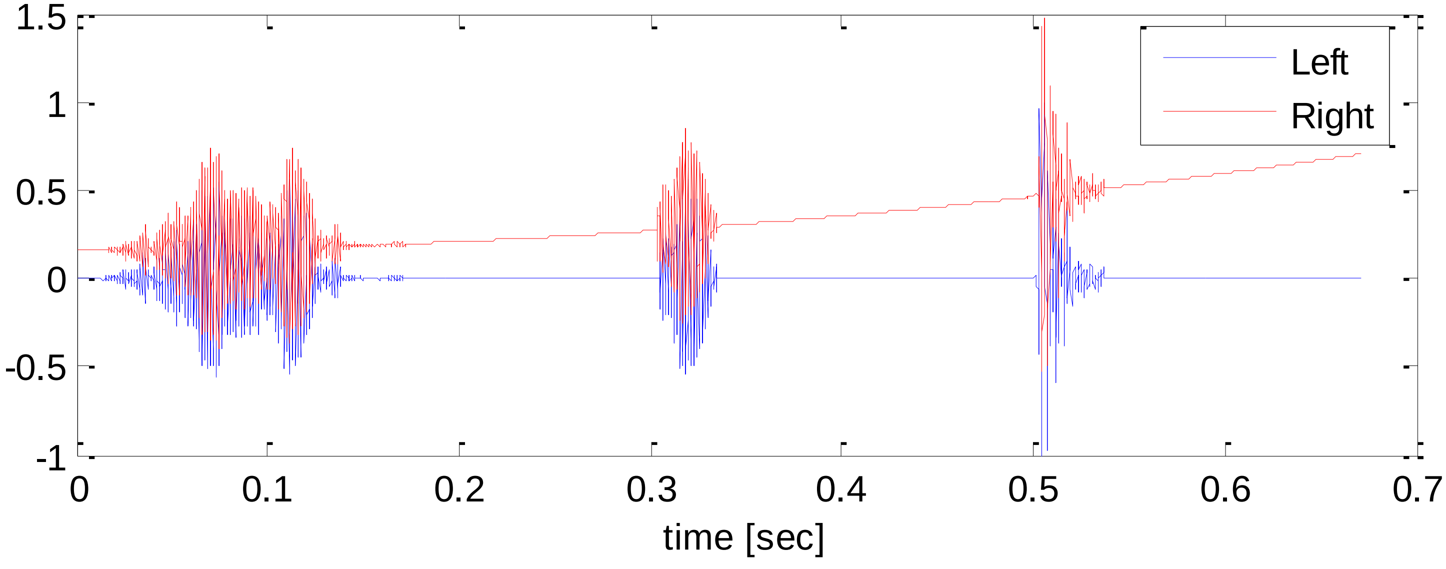
- ✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ← בעזרת פילטר FIR
  - ← בעזרת פילטר IIR
- שערוך השהייה
  - ← לפי קרוסקורלציה
  - ← לפי קרוס-ספקטרום
  - שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - הרחבה למקרה הוקטורי

תרגיל 2 ממבחן 2007/8

מערכת השמיעה משתמשת בחישוב delay בין שתי האוזניים כדי לשערך במהירות את המיקום של מקור קול במישור (זווית ההגבהה מחושבת באופן שונה). נתונים בקובץ data2.mat רישומים משני מיקרופונים שמוקמו ליד האוזניים של נבדק. בחדר שלוש מטרות, ומטרתך היא לשערך את ה-delay עבור כל אחת מהן. שים לב – יש לנקות את הארטיפקטים הנראים לעין מהאות לפני שערוך ה-delay.

תרגיל 2 ממבחן 2007/8

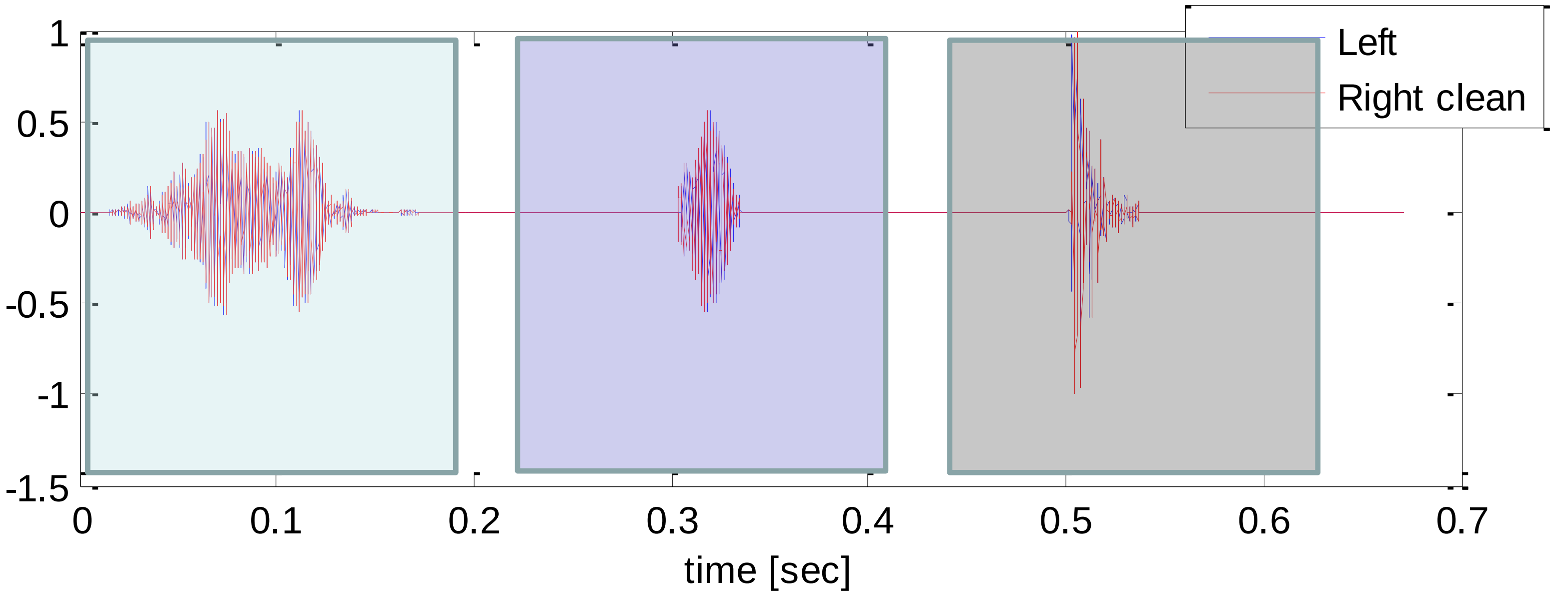
- האותות הנתונים:



- האם דרוש ניקוי רעש? אם כן כיצד ננקה את האות?

תרגיל 2 ממבחן 2007/8

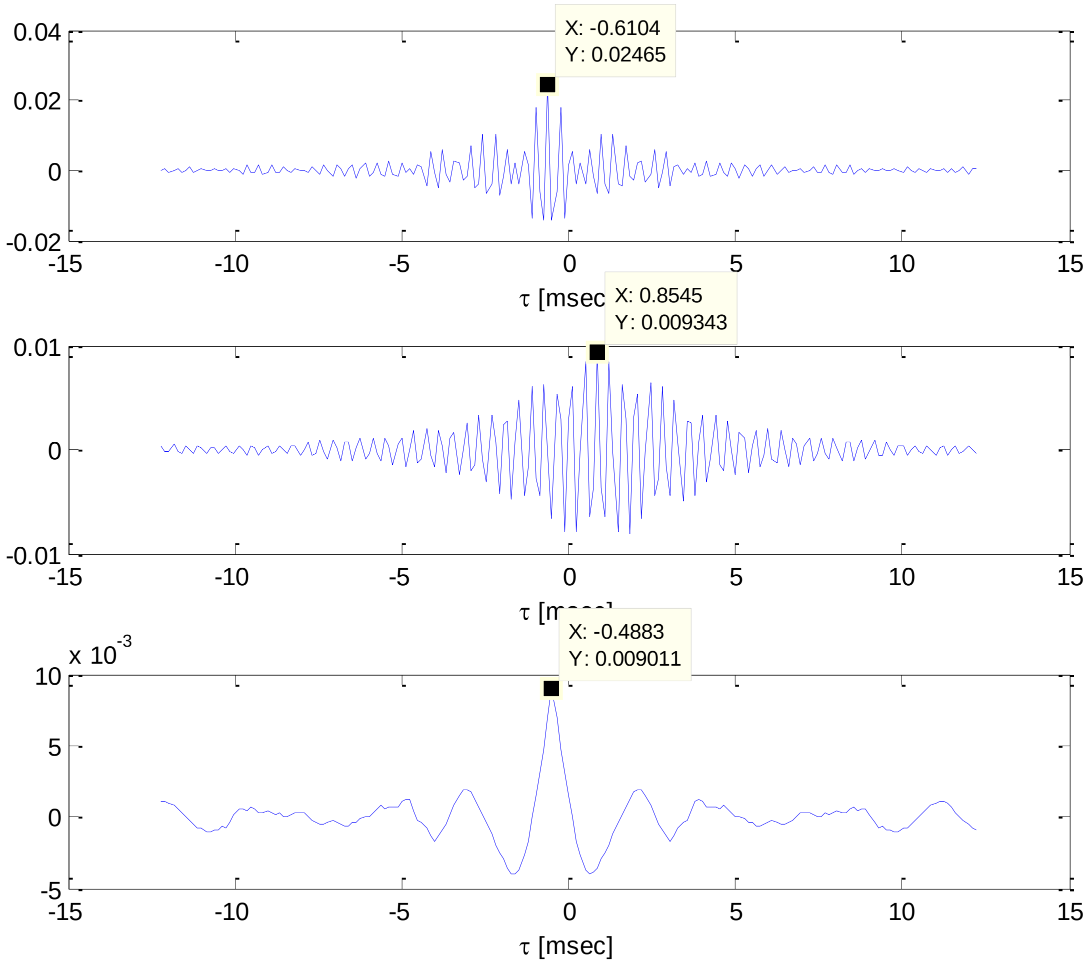
- האות הנקי:



- איך ניתן למצוא את ההשהייה עבור כל אחת מהמטרות?

תרגיל 2 ממבחן 2007/8

• קרוס קורלציה בין אוזן ימין לאוזן שמאל:



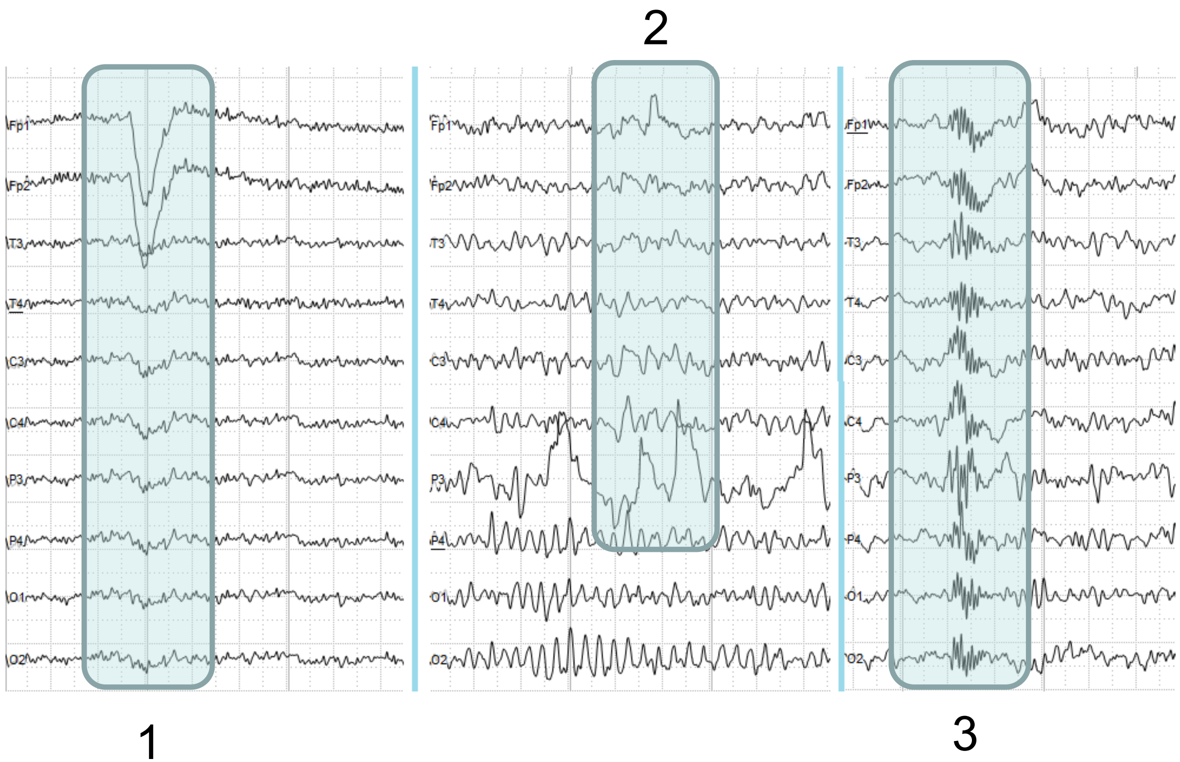
מה בתכנית?

✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  ← בעזרת פילטר FIR
  ← בעזרת פילטר IIR

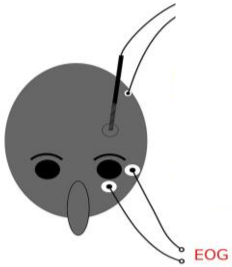
✓ שערוך השהייה
  ← לפי קרוסקורלציה
  ← לפי קרוס-ספקטרום
  ← שאלה לדוגמה

- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  – הרחבה למקרה הוקטורי

ארטפקטים ב-EEG

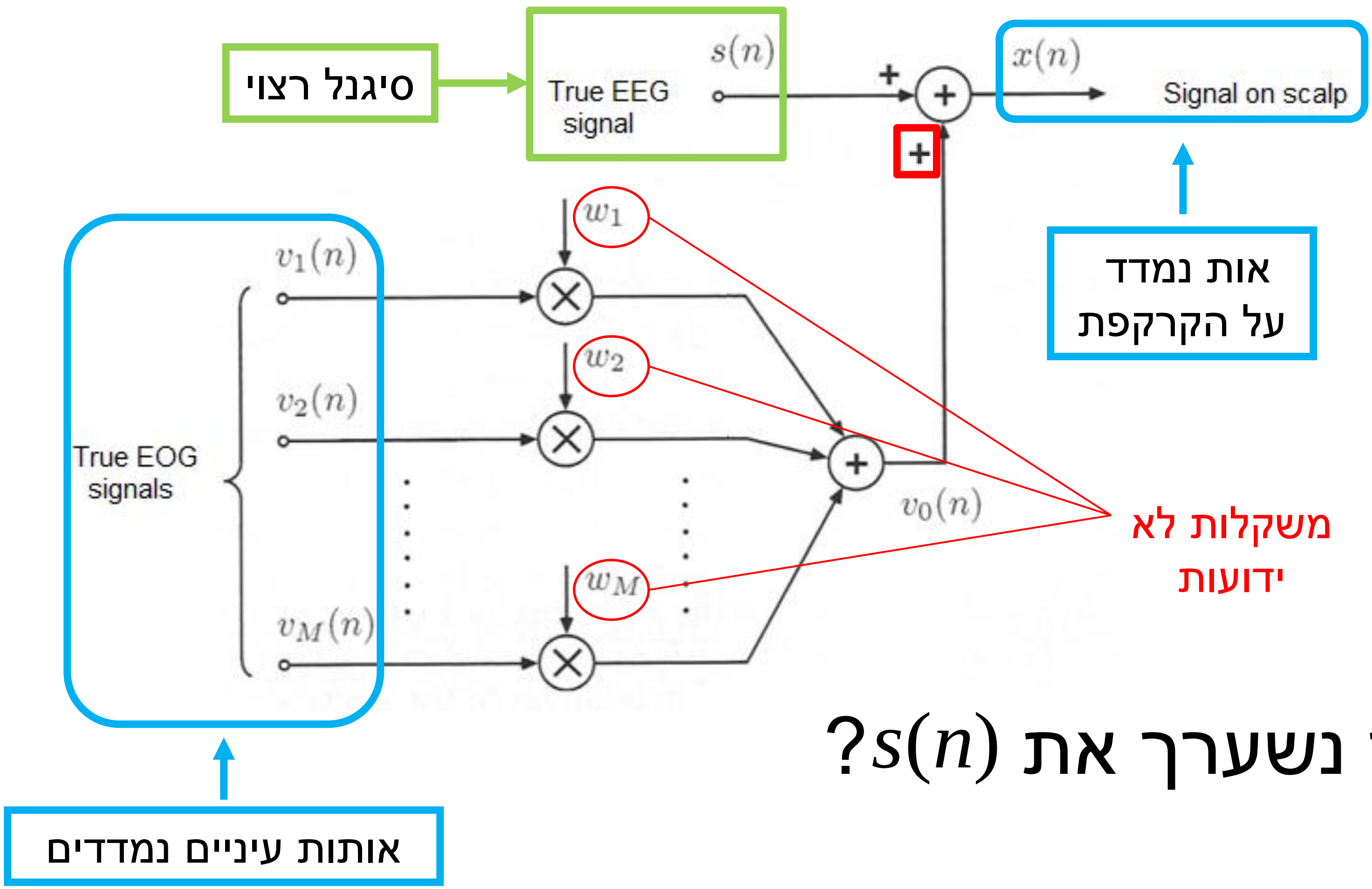


1. ארטיפקט בגלל תנועות עיניים
2. ארטיפקט בגלל מגע לא טוב של אלקטרודות
3. ארטיפקט של תהליך בליעה



ארטפקטים ב-EEG

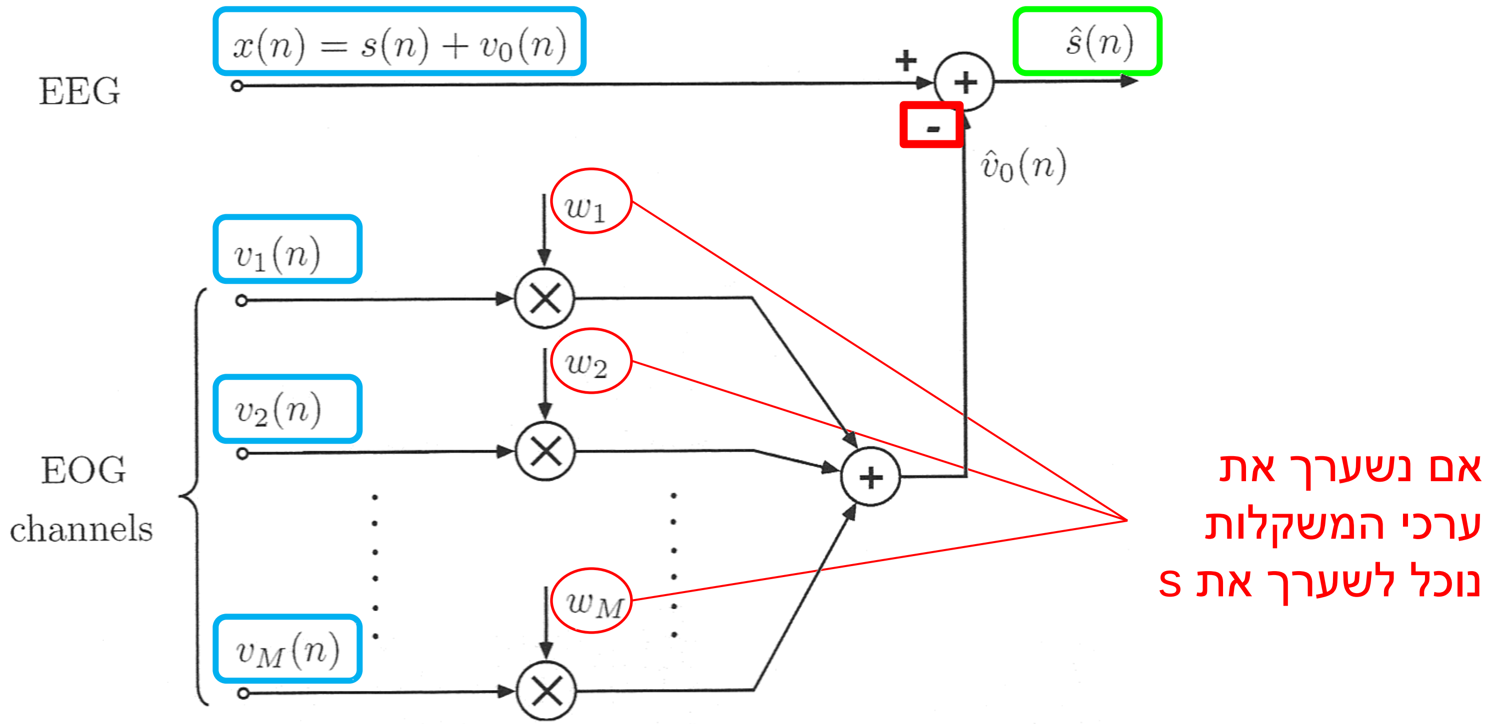
- מודל יצירת הרעש באות הנקלט:



- איך נשערך את $s(n)$?

ביטול ארטפקטים ב-EEG

- שיערוך אות ה- EEG מתוך המדידה



$$\hat{s}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{M} \hat{w}_i \cdot v_i(n) = s(n) + \left(v_0(n) - \sum_{i=1}^{M} \hat{w}_i \cdot v_i(n) \right)$$

ביטול ארטפקטים ב-EEG

- הנחות: $s(n)$ ו- $v_i(n)$ חסרי קורלציה, סטציונריים ו- $E[v_i[n]]=0$.

$$E\left[s(n)v_i(n)\right]=0, \qquad i=1,2,\dots,M$$

- ננסה להפעיל משערך LS:

$$\varepsilon=E\left[\left(\hat{s}(n)-s(n)\right)^2\right]=E\left[\left(\left\{x(n)-\hat{v}_0(n)\right\}-\left\{x(n)-v_0(n)\right\}\right)^2\right]=$$

$$=E\left[\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{M}w_i\cdot v_i(n)}_{v_0(n)}-\underbrace{\sum_{i=1}^{M}\hat{w}_i\cdot v_i(n)}_{\hat{v}_0(n)}\right)^2\right]\xrightarrow[\hat{w}_i]{\arg\min}\boxed{\hat{w}_i=w_i,\quad \forall i=1,\dots,M}$$

לא עוזר לנו..
איך נשתמש במדידה
על הקרקפת x(n)?

ביטול ארטפקטים ב-EEG

- הנחות: $s(n)$ ו- $v_i(n)$ חסרי קורלציה, סטציונריים ו-$E\left[v_i[n]\right]=0$.

$$E\left[s(n)v_i(n)\right]=0,\qquad i=1,2,\ldots,M$$

- נתבונן בביטוי הבא לשגיאה:

$$\varepsilon=E\left[\hat{s}^2(n)\right]=\boxed{E\left[\left(s(n)+v_0(n)-\sum_{i=1}^{M}\hat{w}_i\cdot v_i(n)\right)^2\right]}=$$

$$=\underbrace{E\left[s^2(n)\right]}_{\text{לא תלוי במשקולות}}+\underbrace{E\left[\left(v_0(n)-\sum_{i=1}^{M}\hat{w}_i\cdot v_i(n)\right)^2\right]}_{\text{שגיאה רצויה ממשערך LS}}$$

ביטול ארטפקטים ב-EEG

- הנחות: $s(n)$ ו- $v_i(n)$ חסרי קורלציה, סטציונריים ו-$E\left[v_i[n]\right]=0$.

$$E\left[s(n)v_i(n)\right]=0,\qquad i=1,2,\ldots,M$$

- לכן ניתן לראות כי:

$$\longrightarrow \boxed{\underset{\hat{w}_i}{\operatorname{argmin}}\{\varepsilon\}=\underset{\hat{w}_i}{\operatorname{argmin}}\left\{E\left[\left(\hat{s}(n)-s(n)\right)^2\right]\right\}}$$

$$\underset{\hat{w}_i}{\operatorname{argmin}}\{\varepsilon\}=\underset{\hat{w}_i}{\operatorname{argmin}}\left\{E\left[\left(s(n)+v_0(n)-\sum_{i=1}^{M}w_i\cdot v_i(n)\right)^2\right]\right\}$$

ביטול ארטפקטים ב-EEG

- למציאת שגיאה מינימלית נגזור לפי כל משקל ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} E\left[\left(s(n)+v_0(n)-\sum_{i=1}^{M} w_i \cdot v_i(n)\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial w_j} E\left[\left(x(n)-\sum_{i=1}^{M} w_i \cdot v_i(n)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[-2v_j(n)\left(x(n)-\sum_{i=1}^{M} w_i \cdot v_i(n)\right)\right] = -2E\left[x(n)v_j(n)-\sum_{i=1}^{M} w_i \cdot v_i(n)v_j(n)\right] =$$

$$= -2\left[R_{xv_j}(0)-\sum_{i=1}^{M} w_i \cdot R_{v_iv_j}(0)\right] = 0$$

- קיבלנו מערכת של M משוואות לינאריות

$$R_{xv_j}(0) = \sum_{i=1}^{M} w_i \cdot R_{v_iv_j}(0)$$

ביטול ארטפקטים ב-EEG

אותן משוואות בצורה מטריצית:

$$\begin{bmatrix} R_{v_1v_1}(0) & R_{v_1v_2}(0) & \cdots & R_{v_1v_M}(0) \\ R_{v_2v_1}(0) & R_{v_2v_2}(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{v_Mv_1}(0) & \cdots & \cdots & R_{v_Mv_M}(0) \end{bmatrix}_{M\times M} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}_{M\times 1} = \begin{bmatrix} R_{xv_1}(0) \\ R_{xv_2}(0) \\ \vdots \\ R_{xv_M}(0) \end{bmatrix}_{M\times 1}$$

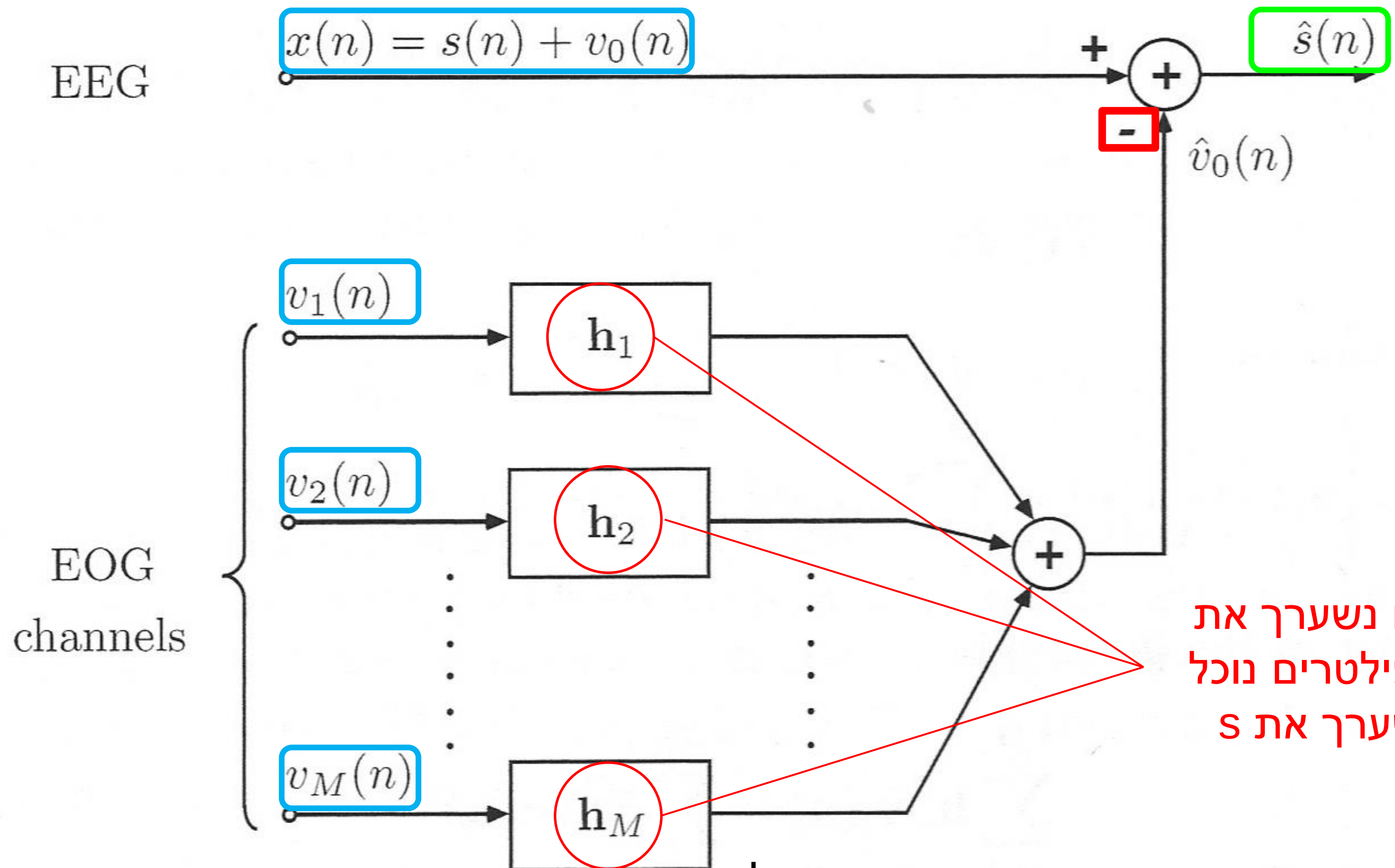
פתרון:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{v_1v_1}(0) & R_{v_1v_2}(0) & \cdots & R_{v_1v_M}(0) \\ R_{v_2v_1}(0) & R_{v_2v_2}(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{v_Mv_1}(0) & \cdots & \cdots & R_{v_Mv_M}(0) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_{xv_1}(0) \\ R_{xv_2}(0) \\ \vdots \\ R_{xv_M}(0) \end{bmatrix}$$

מה בתכנית?

- ✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ← בעזרת פילטר FIR
  - ← בעזרת פילטר IIR
- ✓ שערוך השהייה
  - ← לפי קרוסקורלציה
  - ← לפי קרוס-ספקטרום
  - ← שאלה לדוגמה
- ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - – הרחבה למקרה הוקטורי

הרחבה לפילטרים ליניאריים



אם נשערך את
הפילטרים נוכל
לשערך את s

נניח שכל
הפילטרים הם
באורך זהה - L

הרחבה לפילטרים לינאריים

- למציאת שגיאה מינימלית נגזור לפי כל איבר של כל פילטר ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h_j(k)} = \frac{\partial}{\partial h_j(k)} E\left[\left(s(n)+v_0(n)-\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{L-1} h_i(l)\cdot v_i(n-l)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial h_j(k)} E\left[\left(x(n)-\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{L-1} h_i(l)\cdot v_i(n-l)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[-2v_j(n-k)\left(x(n)-\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{L-1} h_i(l)\cdot v_i(n-l)\right)\right] =$$

$$-2E\left[x(n)v_j(n-k)-\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{L-1} h_i(l)\cdot v_j(n-k)\cdot v_i(n-l)\right] =$$

הרחבה לפילטרים לינאריים

$$= -2\left[R_{xv_j}\left(k\right) - \sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{L-1} h_i(l)\cdot R_{v_i v_j}\left(k-l\right) \right] = 0$$

- קיבלנו מערכת של M*L משוואות לינאריות

$$R_{xv_j}\left(k\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{L-1} h_i(l)\cdot R_{v_i v_j}\left(k-l\right)$$

$$1 \le j \le M$$

$$0 \le k \le L-1$$

- שאלה: איך נעביר את המשוואות לכתיב מטריצי?

הרחבה לפילטרים לינאריים

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R_{v_1v_1}} & \mathbf{R_{v_1v_2}} & \cdots & \mathbf{R_{v_1v_M}} \\ \mathbf{R_{v_2v_1}} & \mathbf{R_{v_2v_2}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R_{v_Mv_1}} & \cdots & \cdots & \mathbf{R_{v_Mv_M}} \end{bmatrix}_{ML\times ML} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h_1} \\ \mathbf{h_2} \\ \vdots \\ \mathbf{h_M} \end{bmatrix}_{ML\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_{xv_1}} \\ \mathbf{R_{xv_2}} \\ \vdots \\ \mathbf{R_{xv_M}} \end{bmatrix}_{ML\times 1}$$

$$\mathbf{R_{v_iv_j}} = \begin{bmatrix} R_{v_iv_j}(0) & R_{v_iv_j}(1) & \cdots & R_{v_iv_j}(L-1) \\ R_{v_iv_j}(-1) & R_{v_iv_j}(0) & & R_{v_iv_j}(L-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{v_iv_j}(1-L) & R_{v_iv_j}(2-L) & \cdots & R_{v_iv_j}(0) \end{bmatrix}$$

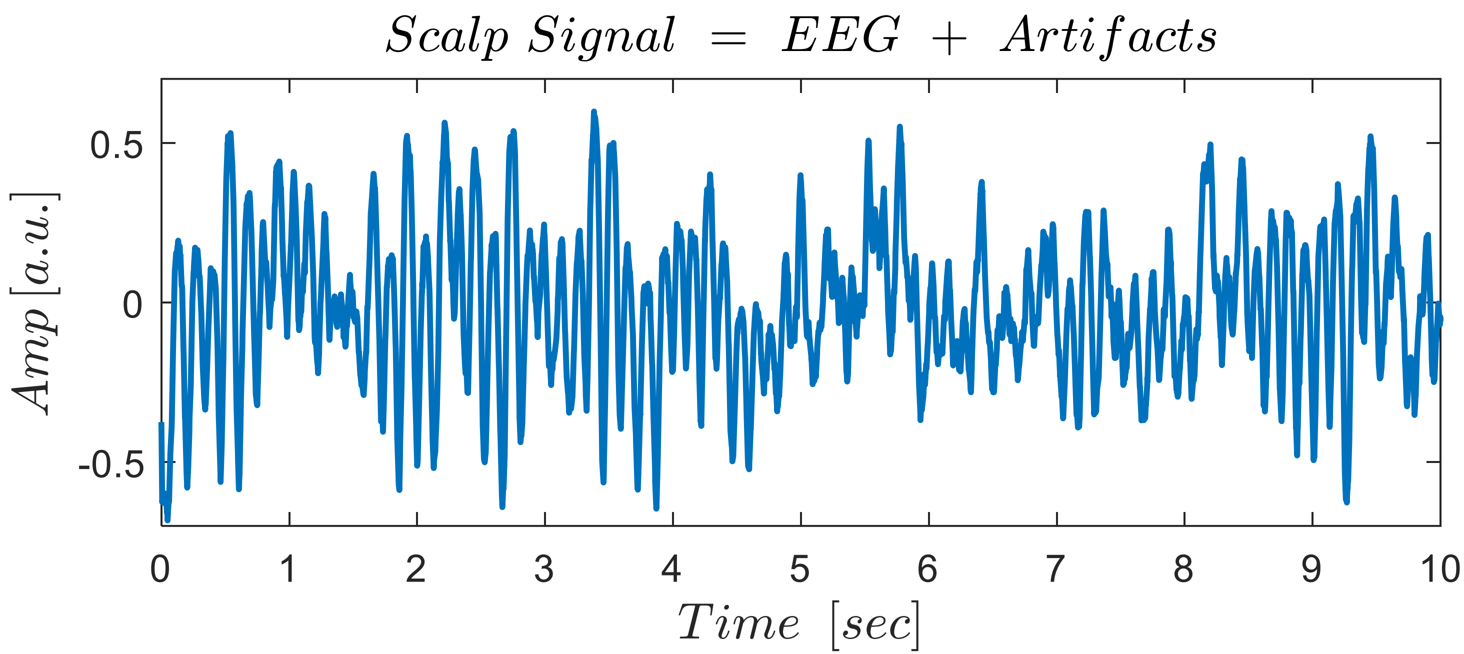
$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} h_i(0) \\ h_i(1) \\ \vdots \\ h_i(L-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_{xv_i}} = \begin{bmatrix} R_{xv_i}(0) \\ R_{xv_i}(1) \\ \vdots \\ R_{xv_i}(L-1) \end{bmatrix}$$

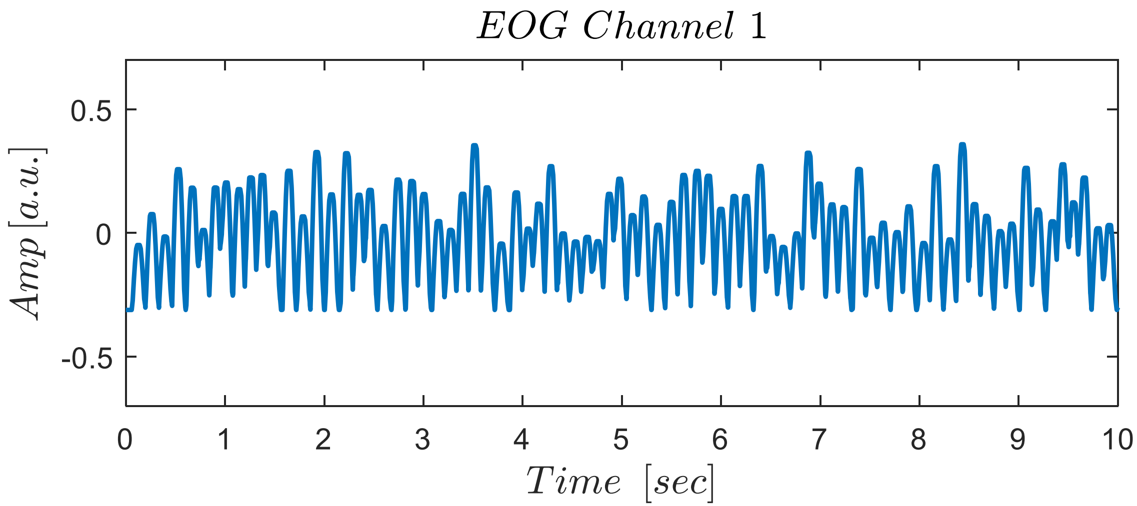
L – סדר הפילטרים הרצוי!

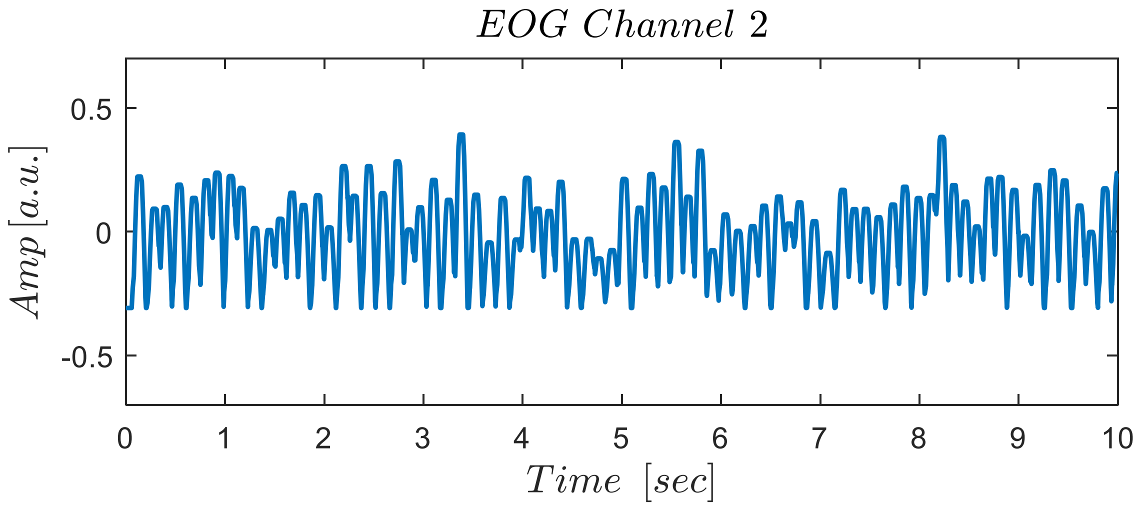
דוגמה

- נניח מדדנו את האות הבא על הקרקפת:



דוגמה





- ואת שני אותות העיניים הבאים:

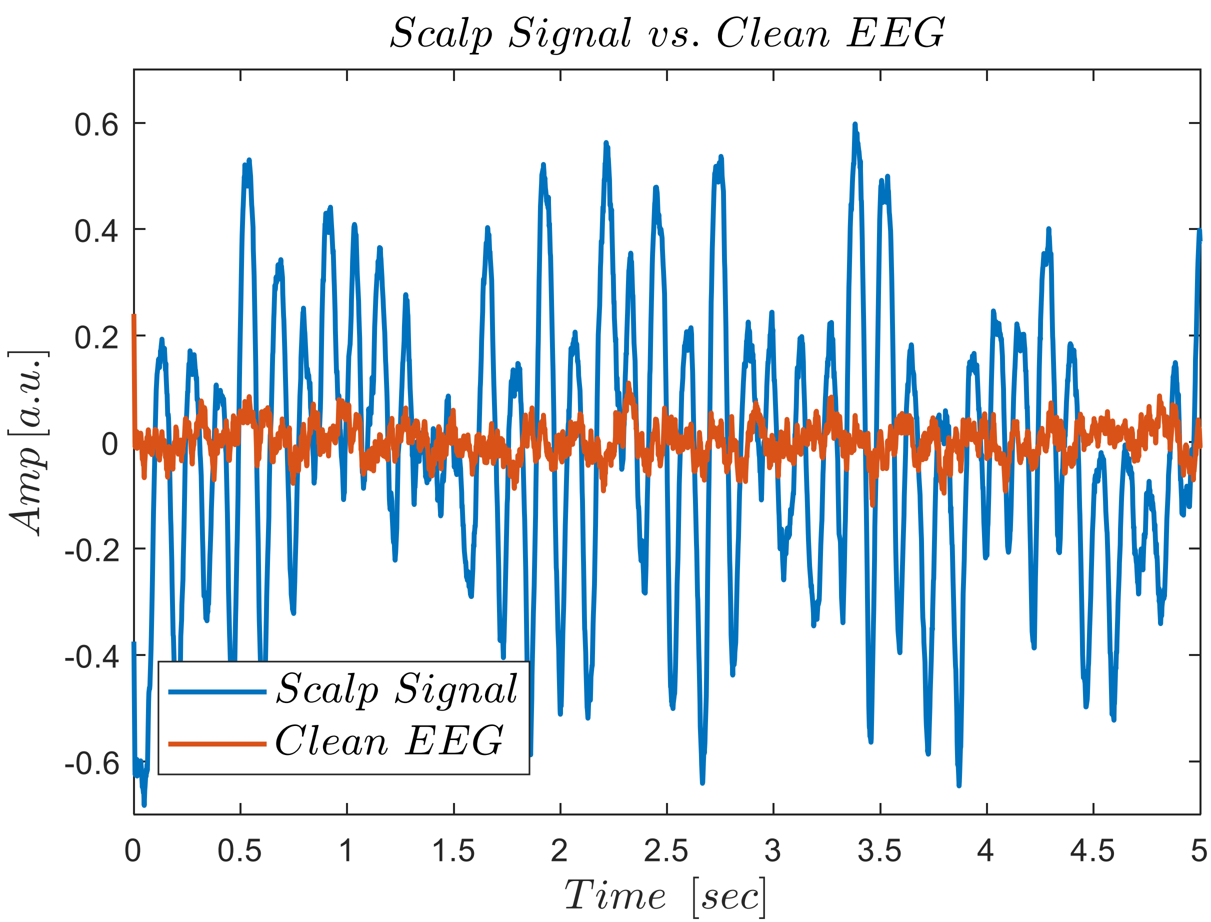
דוגמה

```matlab
% calculate the needed cross-correlations
[Rxv1,tauxv1] = xcorr(x,v1);
[Rxv2,tauxv2] = xcorr(x,v2);
[Rv1,tauv1] = xcorr(v1,v1);
[Rv2,tauv2] = xcorr(v2,v2);
[Rv1v2,tauv1v2] = xcorr(v1,v2);

% build the appropriate matrix R
R = [ Rv1(tauv1==0) Rv1v2(tauv1v2==0);...
    Rv1v2(tauv1v2==0) Rv2(tauv2==0)];

% build the appropriate vector r
r = [Rxv1(tauxv1==0); Rxv2(tauxv2==0)];

% calculate the weights accoring to: w = R^-1*r
w = R\r;

% estimate v0(n)
v0hat = w(1)*v1 + w(2)*v2;

% subtract it from the mixture to get the "clean" EEG
shat = x - v0hat;
```

- רוצים לשערך את המשקלים של אותות העיניים בהנחת המודל הסקלרי. איך נעשה זאת?

דוגמה

• התוצאה המתקבלת:



מה בתכנית?

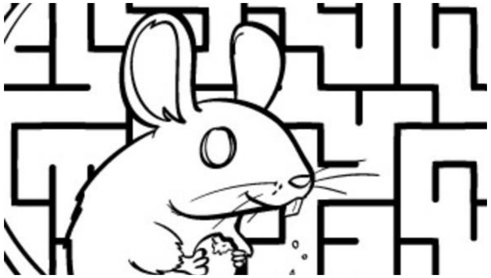
- ✓ יצירת תהליכים גאוסיים עם קורלציה ידועה
  - ← בעזרת פילטר FIR
  - ← בעזרת פילטר IIR
- ✓ שערוך השהייה
  - ← לפי קרוסקורלציה
  - ← לפי קרוס-ספקטרום
  - ← שאלה לדוגמה
- ✓ ביטול ארטיפקטים ב- EEG
  - ← הרחבה למקרה הוקטורי

תרגיל בית 2!

שאלה ממבחן +
פתרון בנספח

תרגיל 1 ממבחן 2008/9

- בזמן ניסוי התנהגותי מסויים נע עכבר במבוך חד-מימדי (פרוזדור) באורך 2 מטרים. הניסוי חייב להתבצע בחושך מוחלט, ולכן על מנת לעקוב אחרי המיקום של העכבר בזמן אמת הוצבו בקצוות המבוך שני מיקרופונים שמקליטים את הציפצופים שמשמיע העכבר. תדר דגימה של האות האקוסטי הוא 8192Hz.



תרגיל 1 ממבחן 2008/9

א. חשב אנליטית את פונקצית הקרוסקורלציה $R_{xy}[k]$ בין האותות $x[n]$ ו-$y[n]$ המוקלטים בשני המיקרופונים, כאשר העכבר נמצא חצי מטר מהמיקרופון x. הניחו שהציפצופים ניתנים לתאור ע"י מודל אוטורגרסיבי מסדר 1, ושמהירות הקול היא 340 מ'\שנ'.

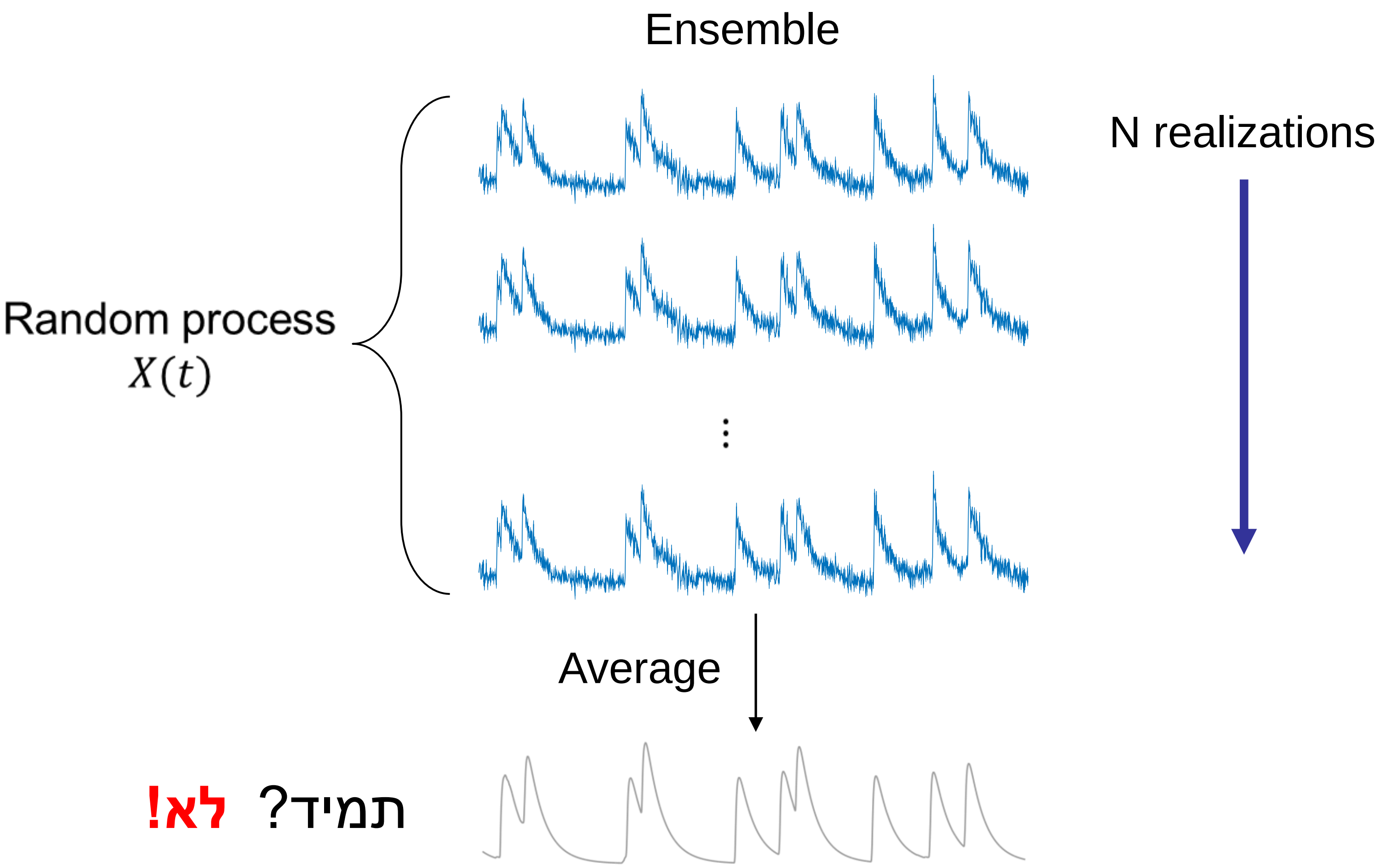
ב. כיצד ניתן לשערך את מיקום העכבר ברגע מסויים בהינתן הציפצופים שנקלטו?

תרגול 6 – מיצוע, Bussgang, ושערוך ספקטרום פרמטרי

מה בתכנית?

- מיצוע
  - Spike Triggered Average
- משפט Bussgang
- שערוך ספקטרום פרמטרי
  - מודל AR

מיצוע



תמיד? **לא!**

מיצוע

- כללי המשחק:
  - נתונות מדידות $x_i(t),\ i=1..N$ של הסיגנל $s(t)$ בתוספת רעש עם תוחלת אפס:

$$x_i(t)=s(t)+n_i(t) \qquad E\left[n_i(t)\right]=0 \quad Var\left[n_i(t)\right]=\sigma_n^2(t)$$

  - משערך של הסיגנל:

$$\hat{s}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)$$

  - תוחלת המשערך:

$$E\left[\hat{s}(t)\right]=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\right]=$$

$$=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(s(t)+n_i(t)\right)\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(E\left[s(t)\right]+\underbrace{E\left[n_i(t)\right]}_{0}\right)=s(t)$$

מיצוע

- שונות המשערך:

$$E\left[\hat{s}(t)\right]$$

$$Var\left[\hat{s}(t)\right]=E\left[\left(\hat{s}(t)-s(t)\right)^2\right]=E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)-s(t)\right)^2\right]=$$

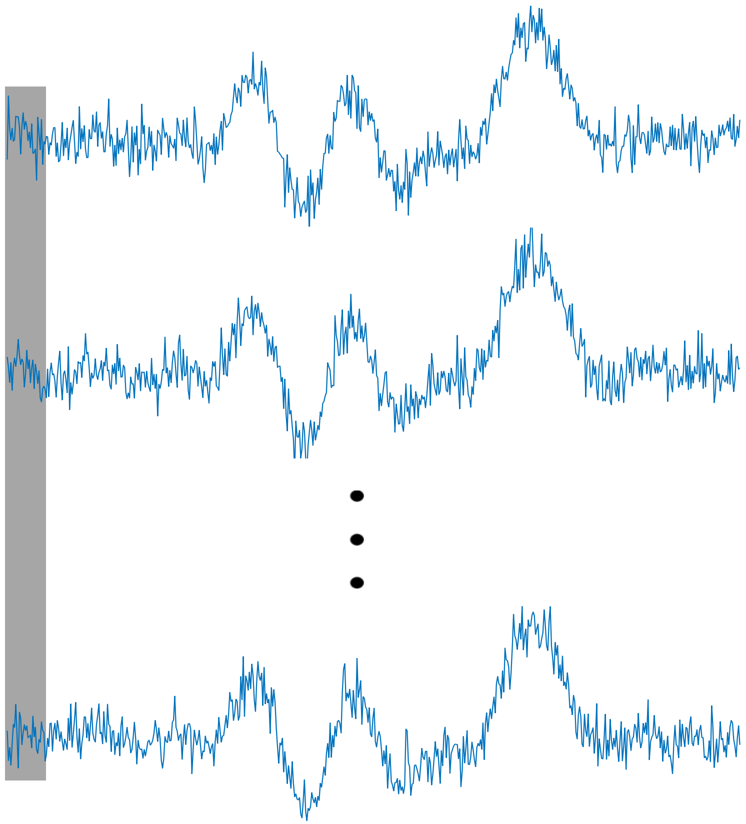
$$=E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[s(t)+n_i(t)-s(t)\right]\right)^2\right]=E\left[\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}n_i(t)\right)^2\right]$$

- במקרה והרעש הוא חסר קורלציה (בין פונקציות מדגם שונות) נקבל:

$$Var\left[\hat{s}(t)\right]=E\left[\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}n_i(t)\right)^2\right]=E\left[\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}n_i^2(t)\right]=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}$$

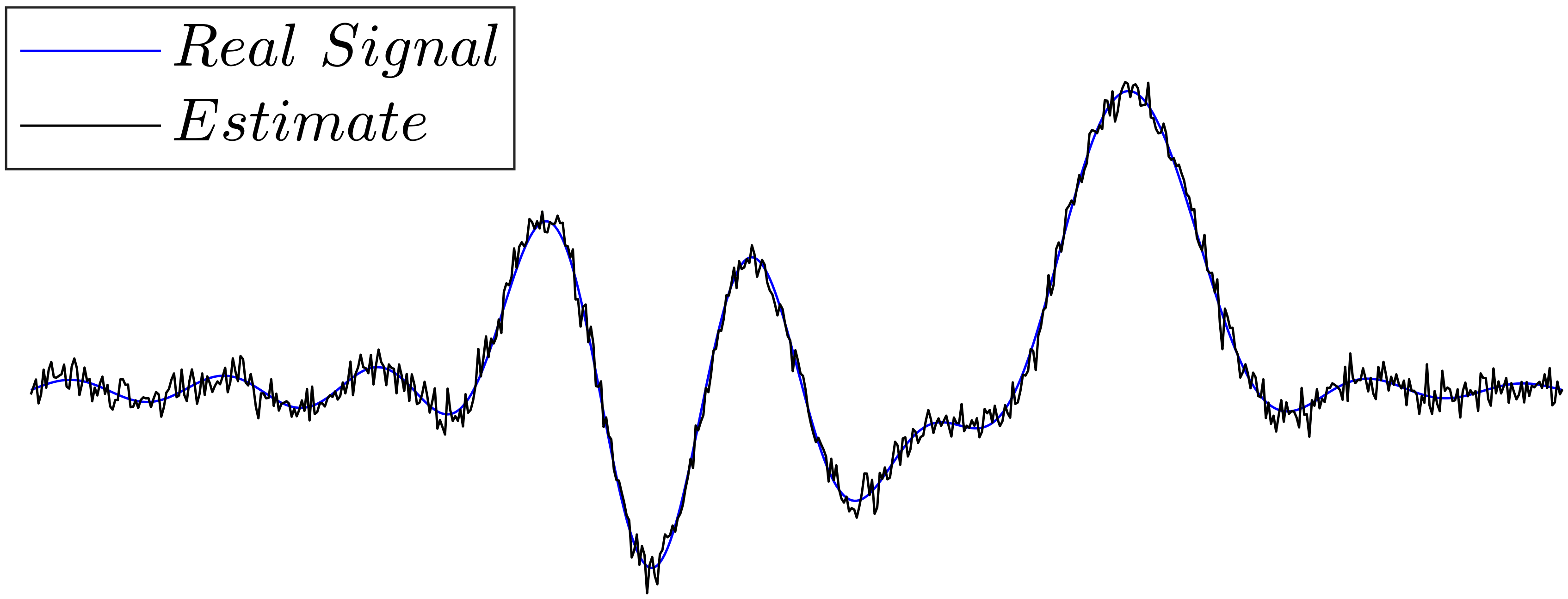
דוגמה: רעש חסר קורלציה

- נניח נתונות לנו המדידות הבאות:



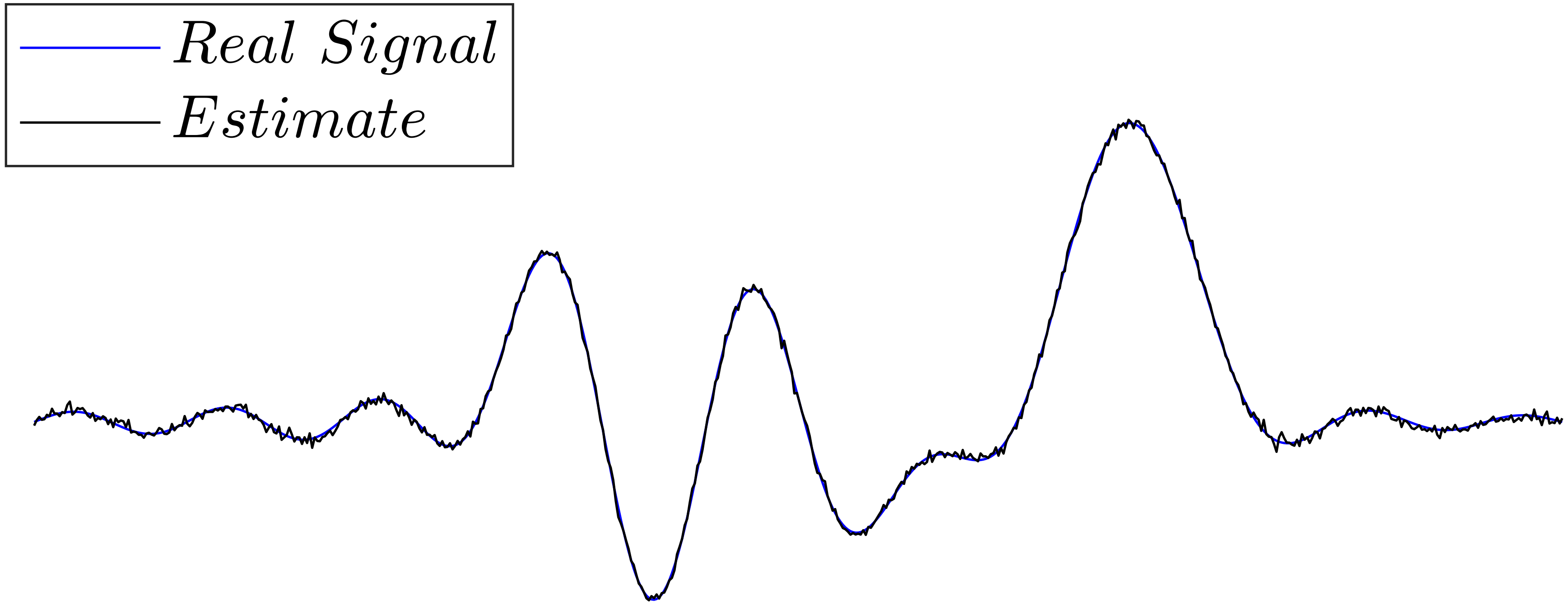
דוגמה: רעש חסר קורלציה

- התוצאה עבור 10 מדידות חוזרות:



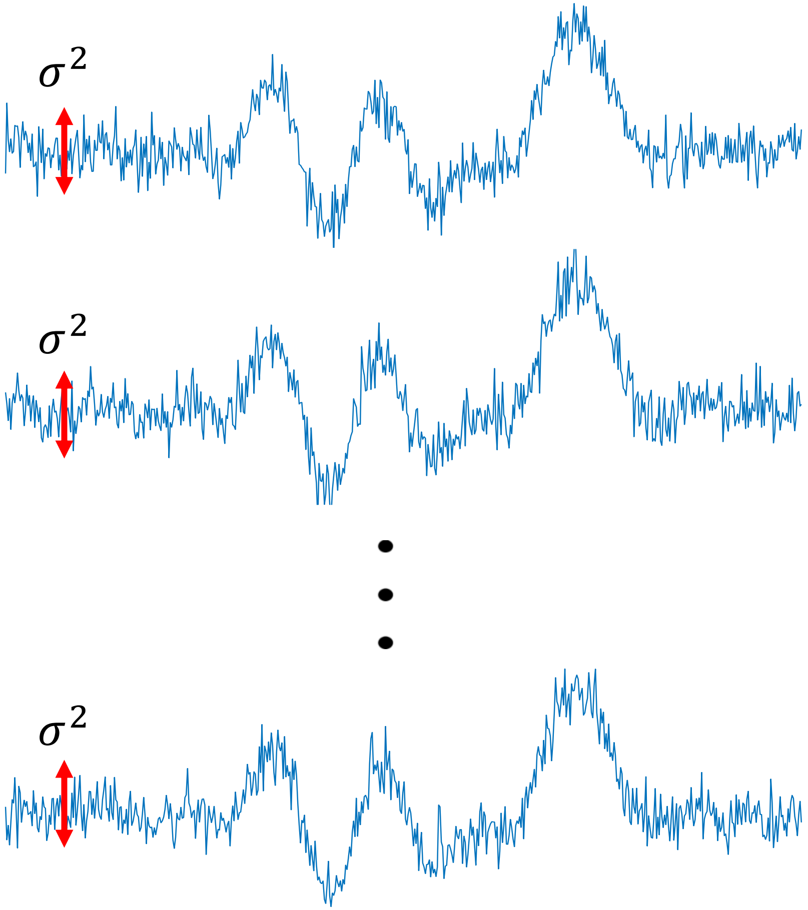
דוגמה: רעש חסר קורלציה

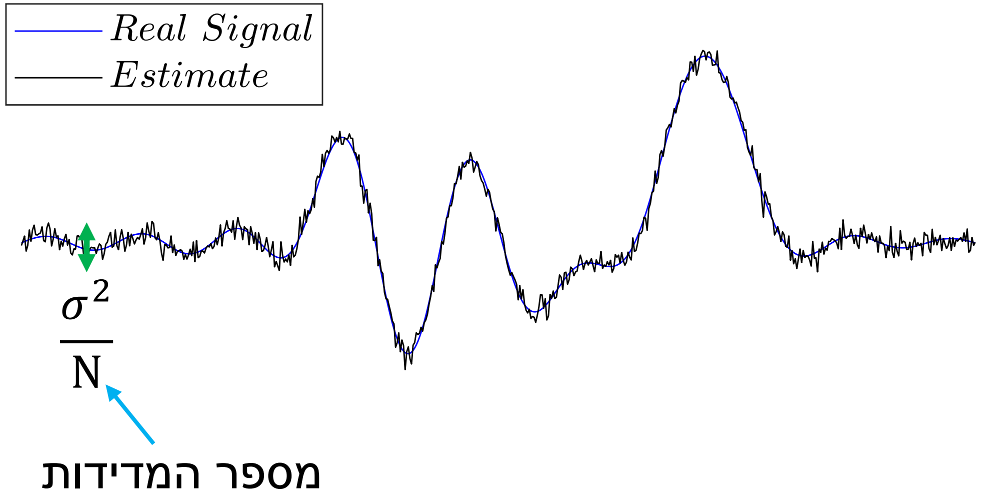
- התוצאה עבור 100 מדידות חוזרות:



דוגמה: רעש חסר קורלציה

- שונות משערך הממוצע עבור רעשים חסרי קורלציה:





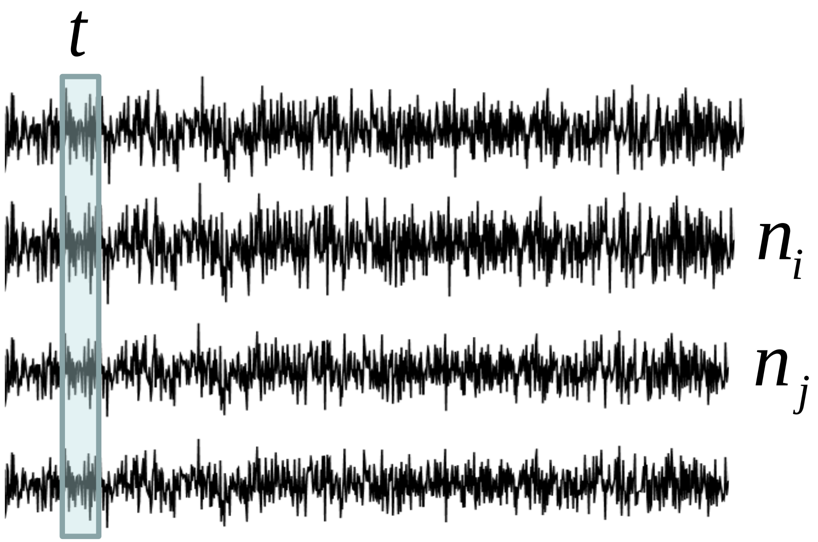
קורלציה כללית

- דוגמה פשוטה למקרה בו יש קורלציה בין פונקציות מדגם של הרעש:

$$E\left[n_i(t)\,n_j(t)\right]=R_{nn}(k,t);\qquad k=i-j$$

- מתוך הגדרה:

$$R_{nn}(-k,t)=R_{nn}(k,t)$$



קורלציה כללית

- שונות המשערך במקרה זה:

$$Var\left[\hat{s}(t)\right]=E\left[\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}n_i(t)\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{N^2}\cdot E\left[\sum_{i=1}^{N}n_i^2(t)\right]+\frac{1}{N^2}E\left[\sum\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}n_i(t)\cdot n_j(t)\right]=$$

$$=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}+\frac{1}{N^2}\sum\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\boxed{R_{nn}\left(\underbrace{|i-j|}_{k},t\right)}$$

כמה זוגות
כאלה פר k?

קורלציה כללית

- נשים לב שבתוך הסכום כל *k* מופיע *2(N-k)* פעמים, לכן נקבל:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} R_{nn}\left(\underbrace{|i-j|}_{k},t\right)=2\sum_{k=1}^{N}(N-k)\cdot R_{nn}(k,t)$$

- והשונות:

$$Var\left[\hat{s}(t)\right]=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}+\frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N}(N-k)\cdot R_{nn}(k,t)$$

- שאלה: מה נקבל במקרה של קורלציה מלאה?

דוגמה: רעש עם קורלציה מלאה

- במקרה של קורלציה מלאה בין פונקציות מדגם שונות (הרעש היה זהה בכל פונק' מדגם):

$$R_{nn}(k,t) = R_{nn}(0,t) = \sigma_n^2(t)$$

$$Var\left[\hat{s}(t)\right] = \frac{\sigma_n^2(t)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)R_{nn}(k,t) =$$

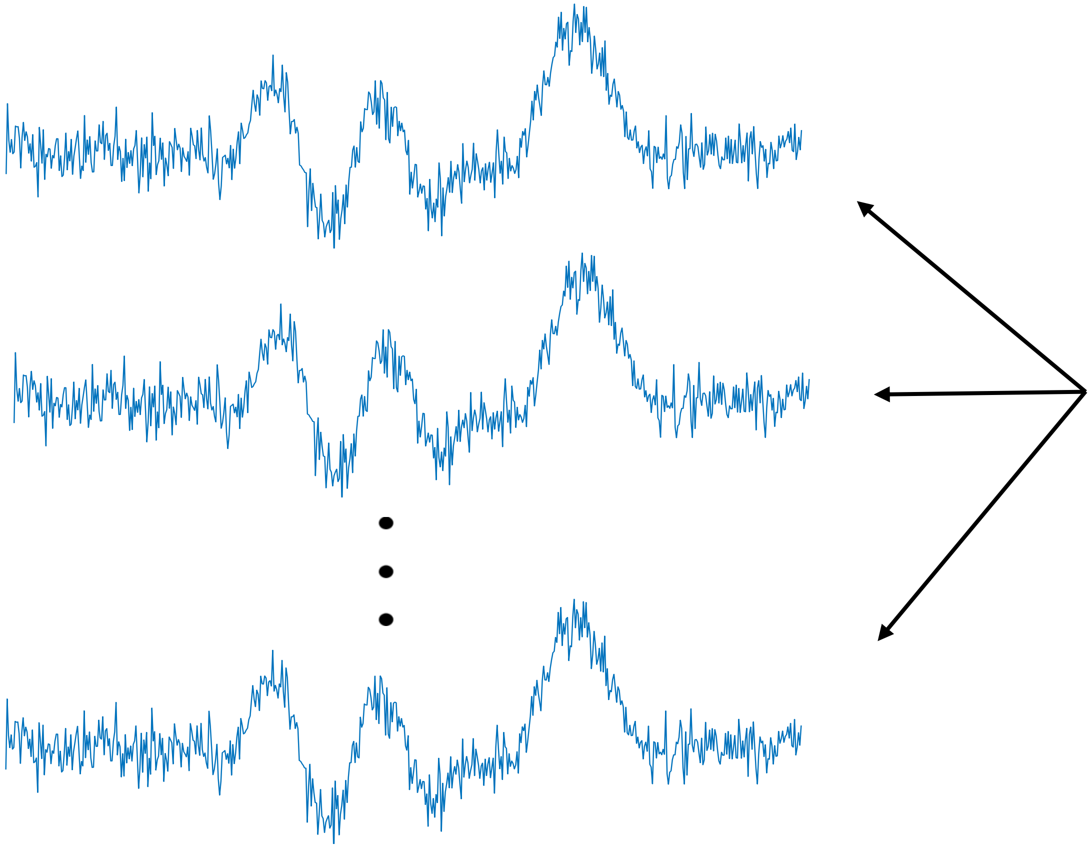
$$= \frac{\sigma_n^2(t)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\sigma_n^2(t) =$$

$$= \frac{\sigma_n^2(t)}{N} + \frac{2}{N^2}\cdot\frac{N(N-1)}{2}\sigma_n^2(t) = \boxed{\sigma_n^2(t)}$$

המיצוע לא עזר
לנו בכלל!

דוגמה: רעש עם קורלציה מלאה

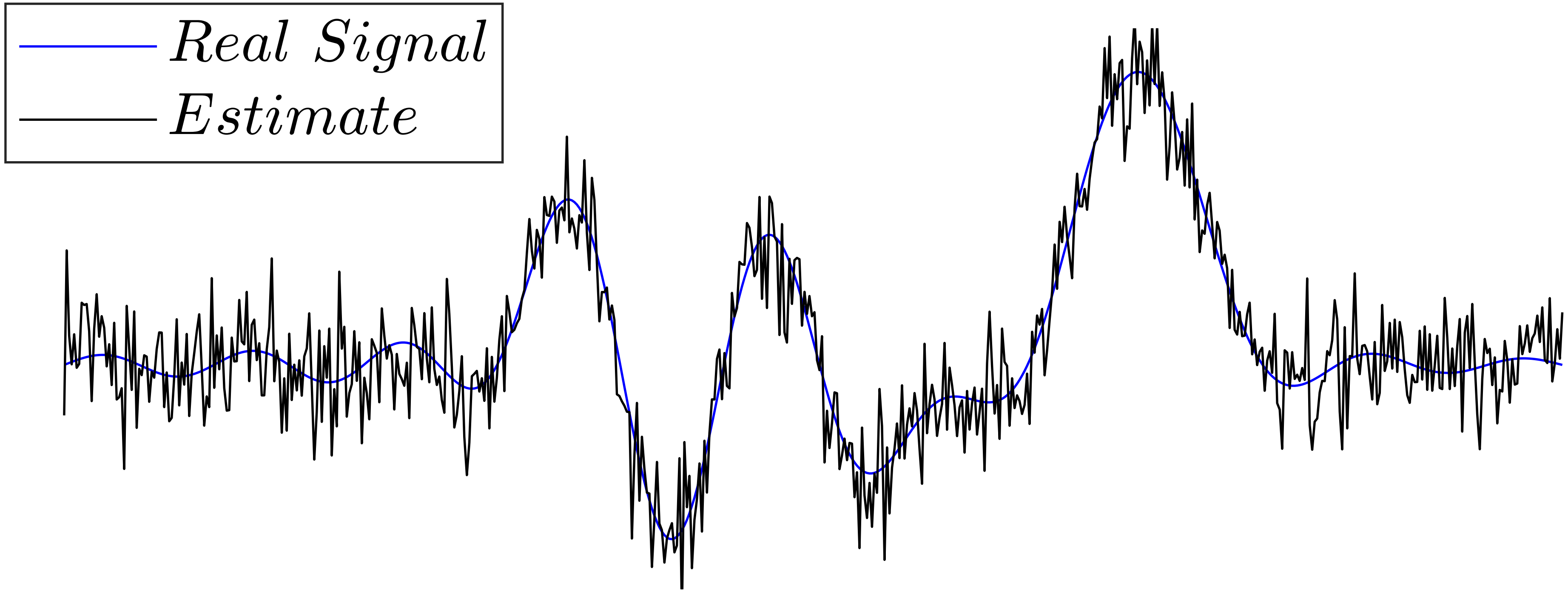
- כלומר..האם תמיד שווה לנו לקחת יותר מדידות? מתי זה יכול להיות מיותר?



מקרה קיצוני:
רעש עם
קורלציה מלאה!

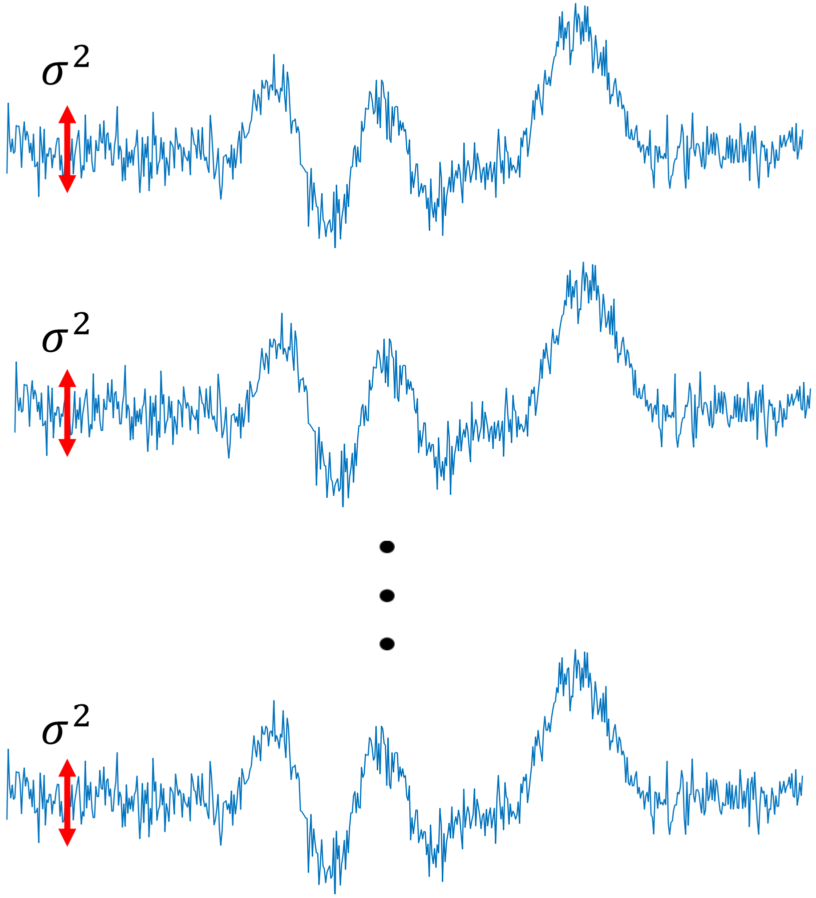
דוגמה: רעש עם קורלציה מלאה

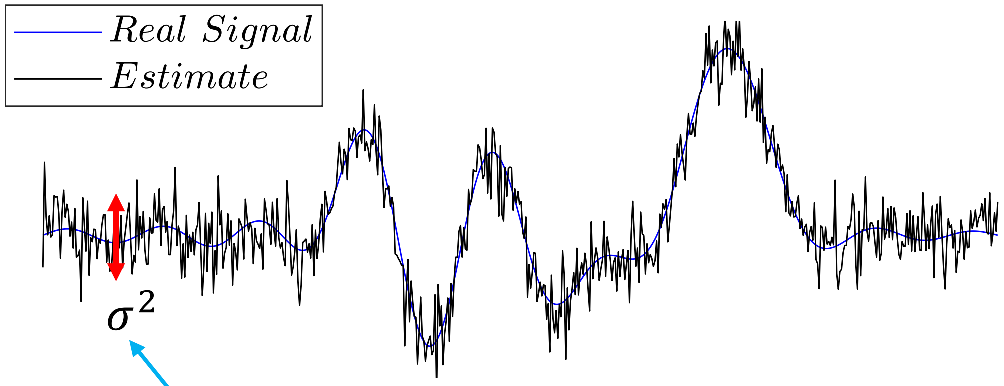
- התוצאה תהיה זהה עבור 10/100 מדידות:



דוגמה: רעש עם קורלציה מלאה

- שונות משערך הממוצע עבור רעשים עם קורלציה מלאה:





לא תלויה
במספר המדידות

דוגמה: אוטוקורלציה אקספוננציאלית

- נניח אוטוקורלציה מהצורה הבאה:

$$R_{nn}(k,t)=\sigma_n^2(t)e^{-|k|c} \qquad c\ge 0$$

- השונות של המשערך:

$$Var\left[\hat{s}(t)\right]=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}+\frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\sigma_n^2(t)e^{-kc}=$$

$$=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}+\frac{2\sigma_n^2(t)}{N^2}\left[\left(N\sum_{k=1}^{N-1}e^{-kc}\right)-\left(\sum_{k=1}^{N-1}ke^{-kc}\right)\right]=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}+\frac{2\sigma_n^2(t)}{N^2}\left[\left(N\sum_{k=1}^{N-1}e^{-kc}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\sum_{k=1}^{N-1}e^{-kc}\right]=$$

$$=\ldots=\frac{\sigma_n^2(t)}{N}+\frac{2\sigma_n^2(t)}{N^2}\left[\frac{(N-1)e^c-N+e^{-(N-1)c}}{\left(e^c-1\right)^2}\right]$$

דוגמה: אוטוקורלציה אקספוננציאלית

- עבור $c \to \infty$ (אין קורלציה):

$$\lim_{c\to\infty} Var\left[\hat{s}(t)\right] = \lim_{c\to\infty}\left\{\frac{\sigma_n^2(t)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\sigma_n^2(t)\underbrace{e^{-kc}}_{0}\right\} = \frac{\sigma_n^2(t)}{N}$$

- עבור $c \to 0$ (תלות מלאה):

$$\lim_{c\to 0} Var\left[\hat{s}(t)\right] = \lim_{c\to 0}\left\{\frac{\sigma_n^2(t)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\sigma_n^2(t)\underbrace{e^{-kc}}_{1}\right\} =$$

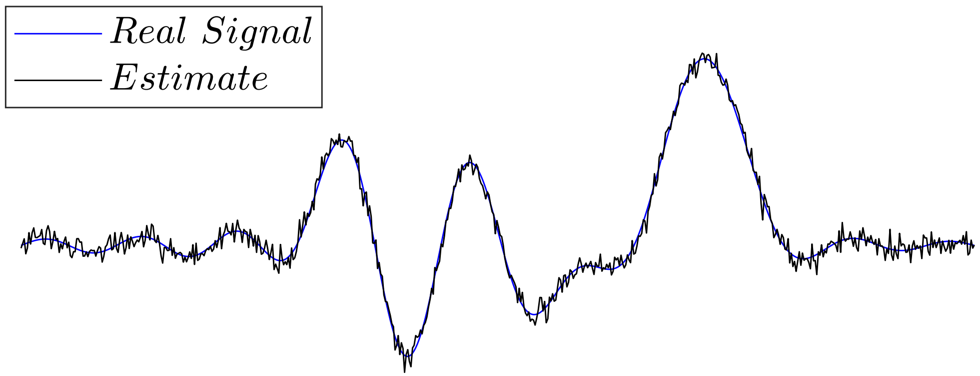
$$= \frac{\sigma_n^2(t)}{N} + \frac{2\sigma_n^2(t)}{N^2}\cdot\frac{N^2-N}{2} = \sigma_n^2(t)$$

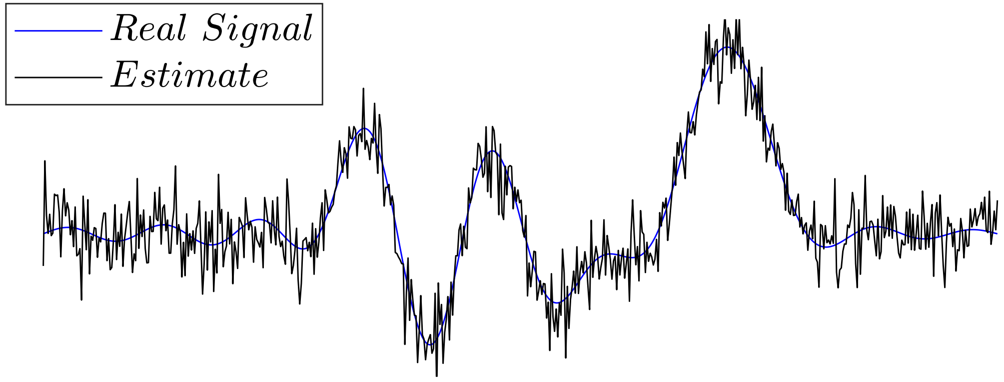
תוחלת המשערך

- <u>שאלה:</u> מה עם תוחלת המשערך? איך היא תלויה בקורלציה?

רעש חסר קורלציה

רעש עם
קורלציה מלאה



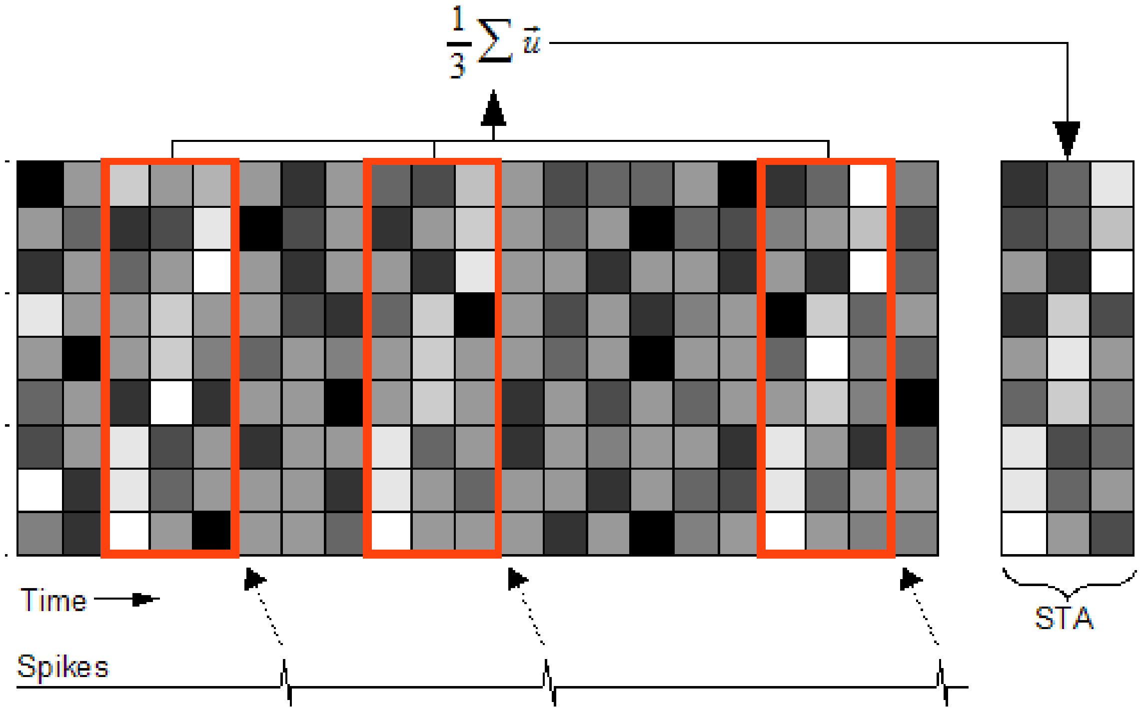


- חסר הטיה בהנחת רעש עם ממוצע אפס!

מה בתכנית?

- מיצוע
  - Spike Triggered Average
- משפט Bussgang
- שערוך ספקטרום פרמטרי
  - מודל AR

Spike-Triggered Average (STA)



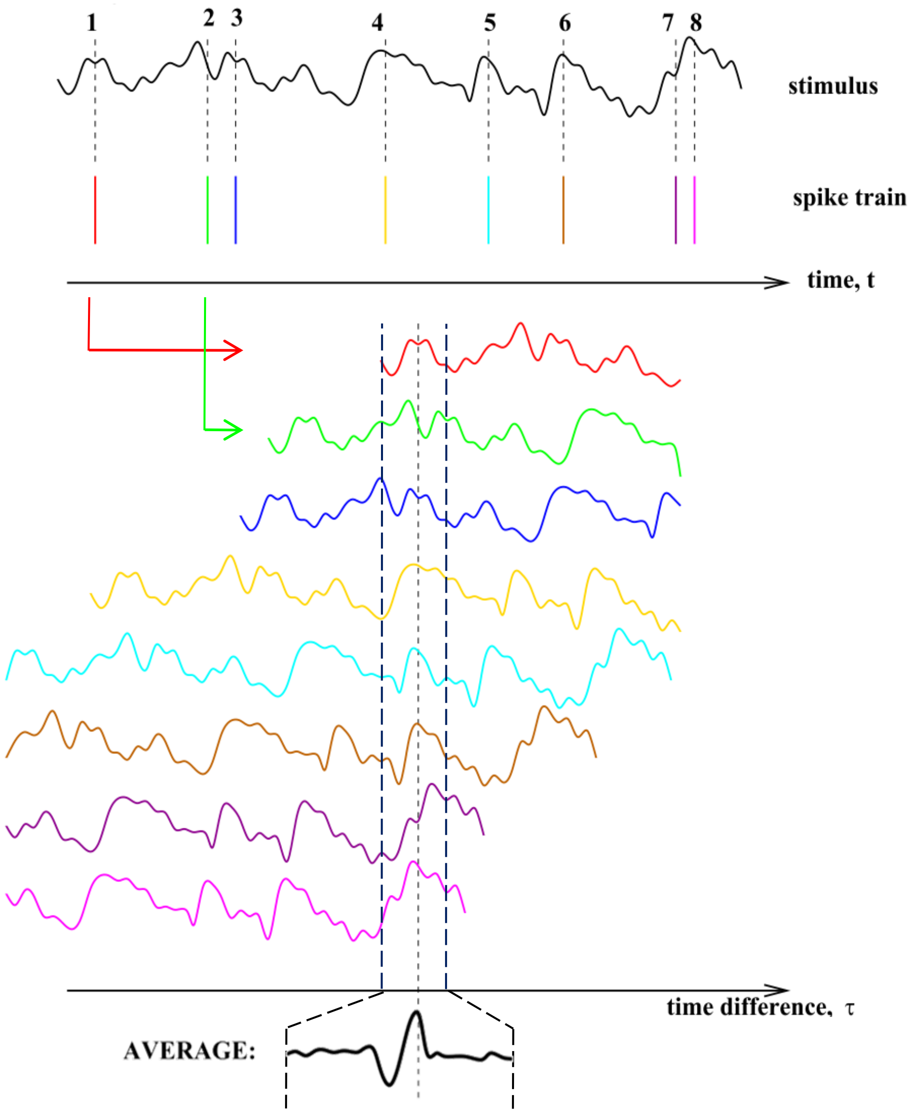
- **הנחה:**

לנוירון יש גירוי אופטימלי אליו הוא "אוהב" להגיב. הנוירון מגיב כאשר הגירוי אליו הוא נחשף דומה לגירוי האופטימלי שלו.

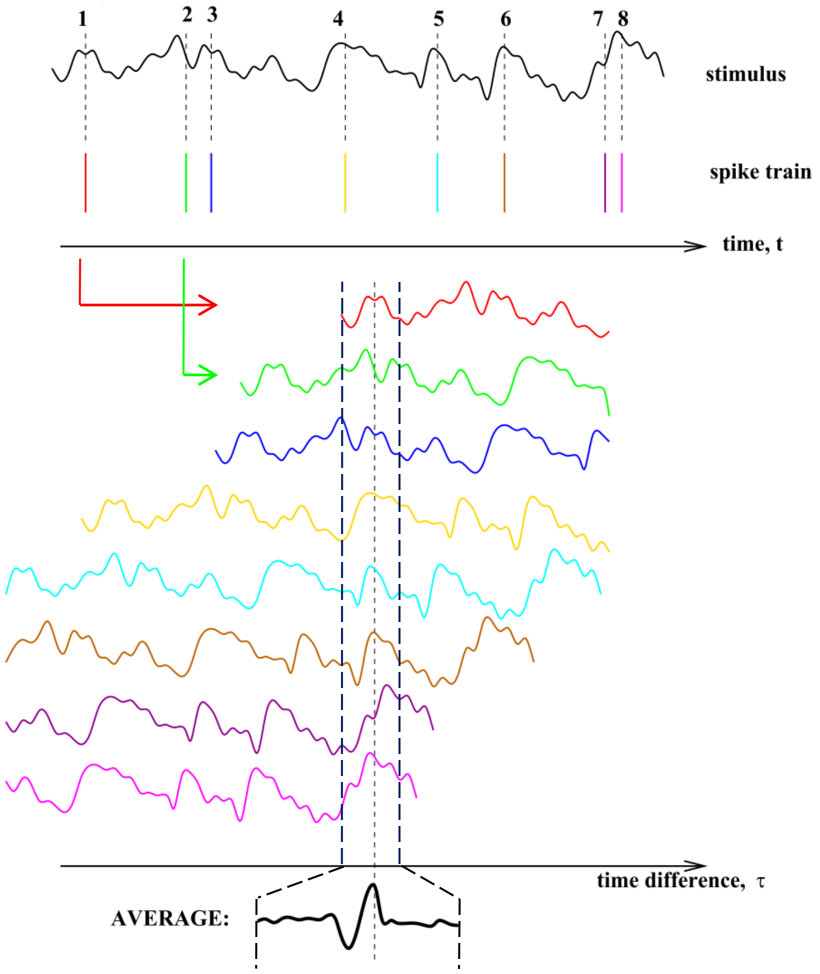
- **שימוש:**

אם נחשוף את הנוירון לגירוי כלשהו לאורך זמן ונבדוק מה היה הגירוי בעת ירי פוטנציאל פעולה נוכל לשערך את הגירוי האופטימלי

Spike-Triggered Average (STA)



הקשר בין קרוס-קורלציה ל- STA

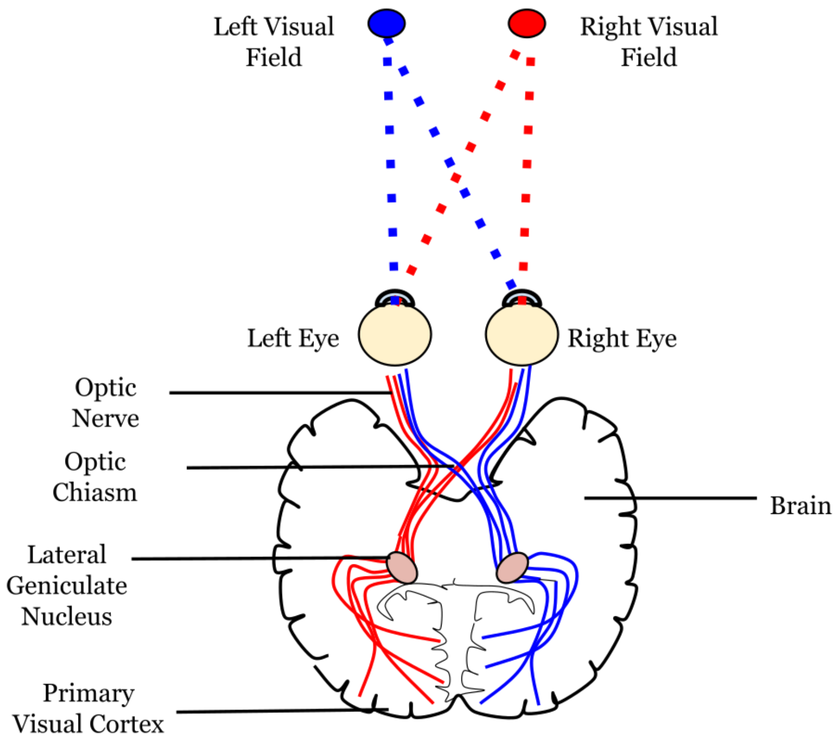


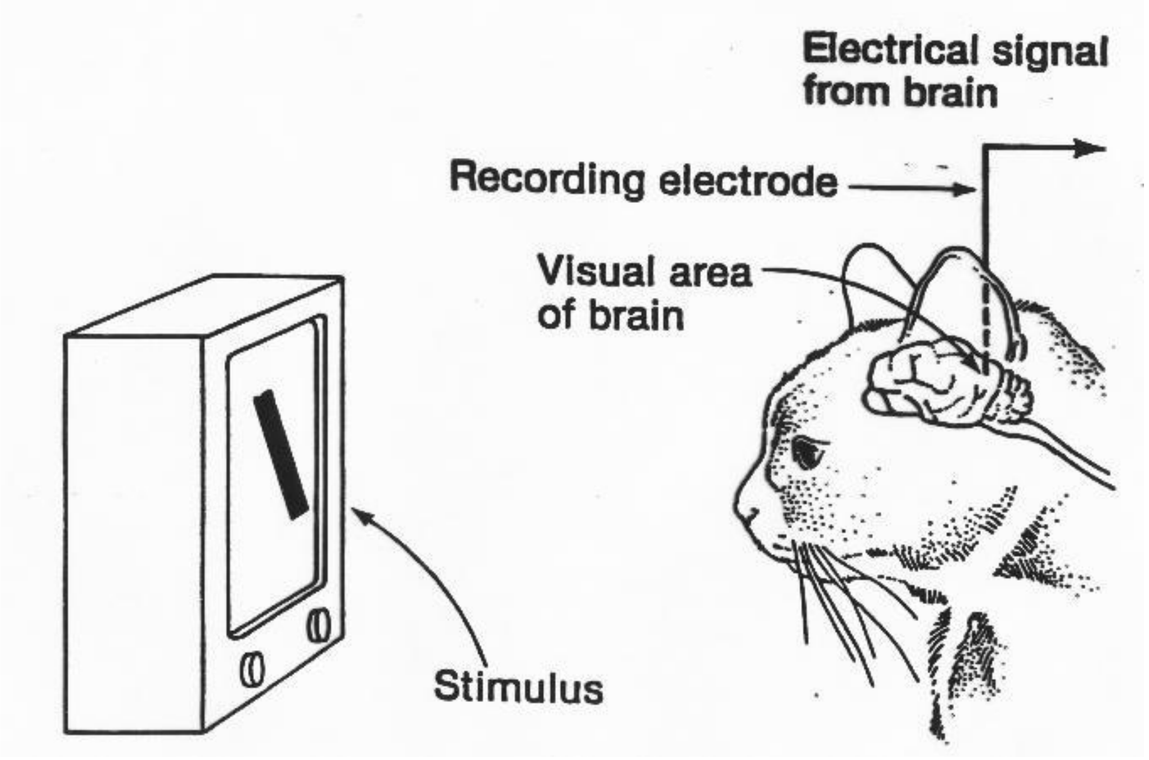
- נשים לב שפעולת ה- STA שקולה לקרוס-קורלציה בין אות הגירוי לבין אות המכיל הלמים היכן שהיה ספייק ואפסים בכל מקום אחר.
- פיתוח מלא בעזרת reverse correlation בספר:

Theoretical neuroscience (Abbott,Dayan) chapter 2.2

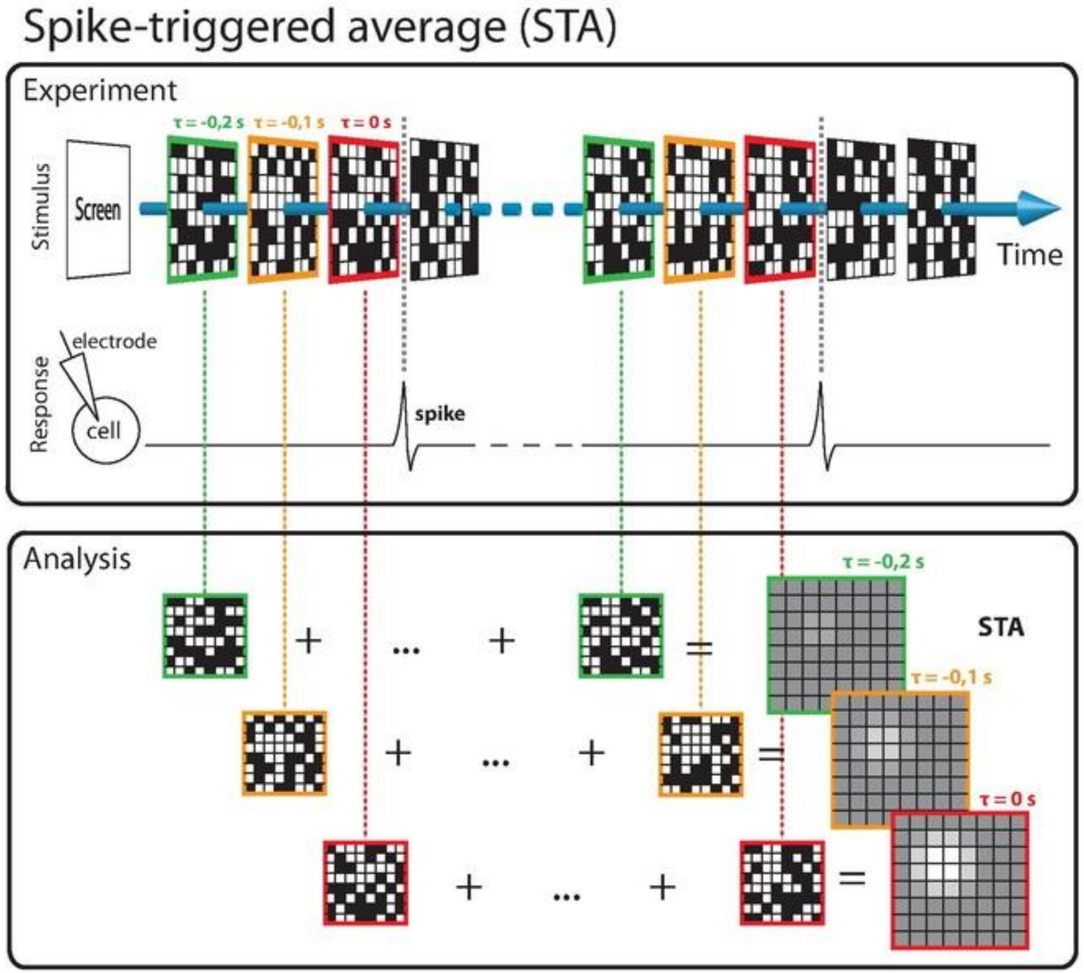
דוגמה בדו-מימד: גילוי תגובה מועדפת על נוירון

- נוירונים באזור הראייתי במוח:





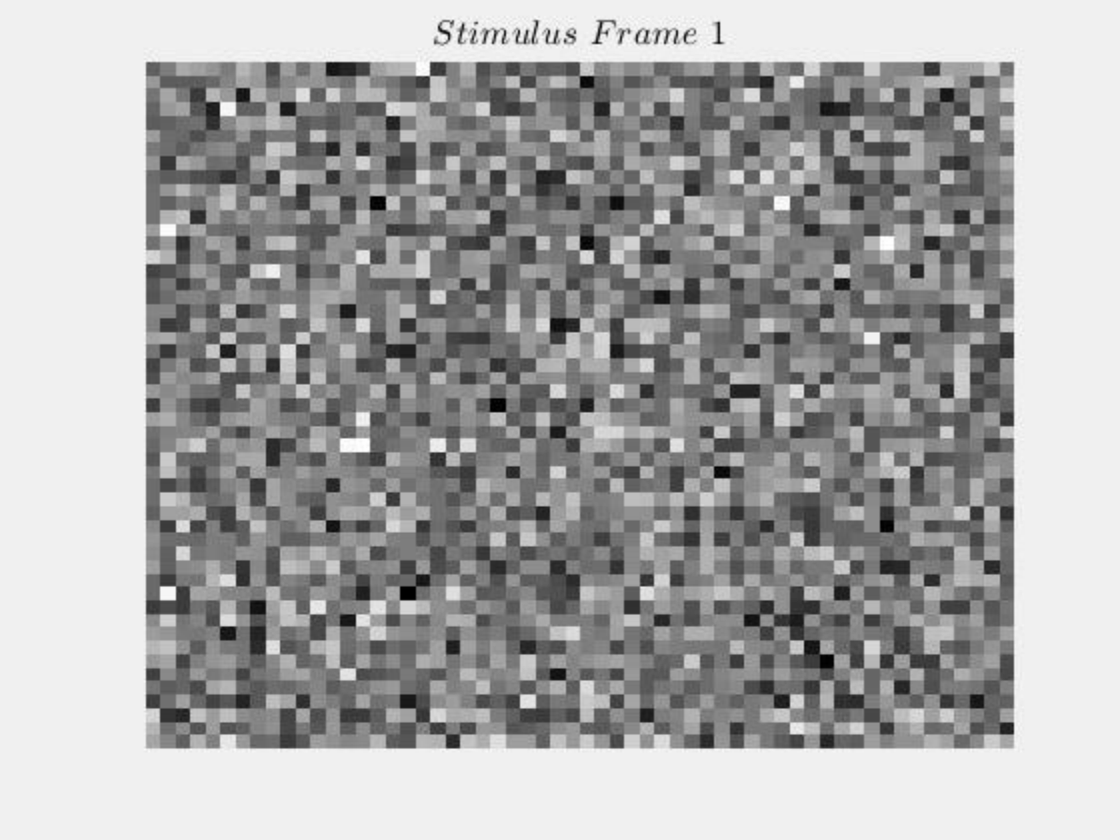
דוגמה בדו-מימד: גילוי תגובה מועדפת על נוירון

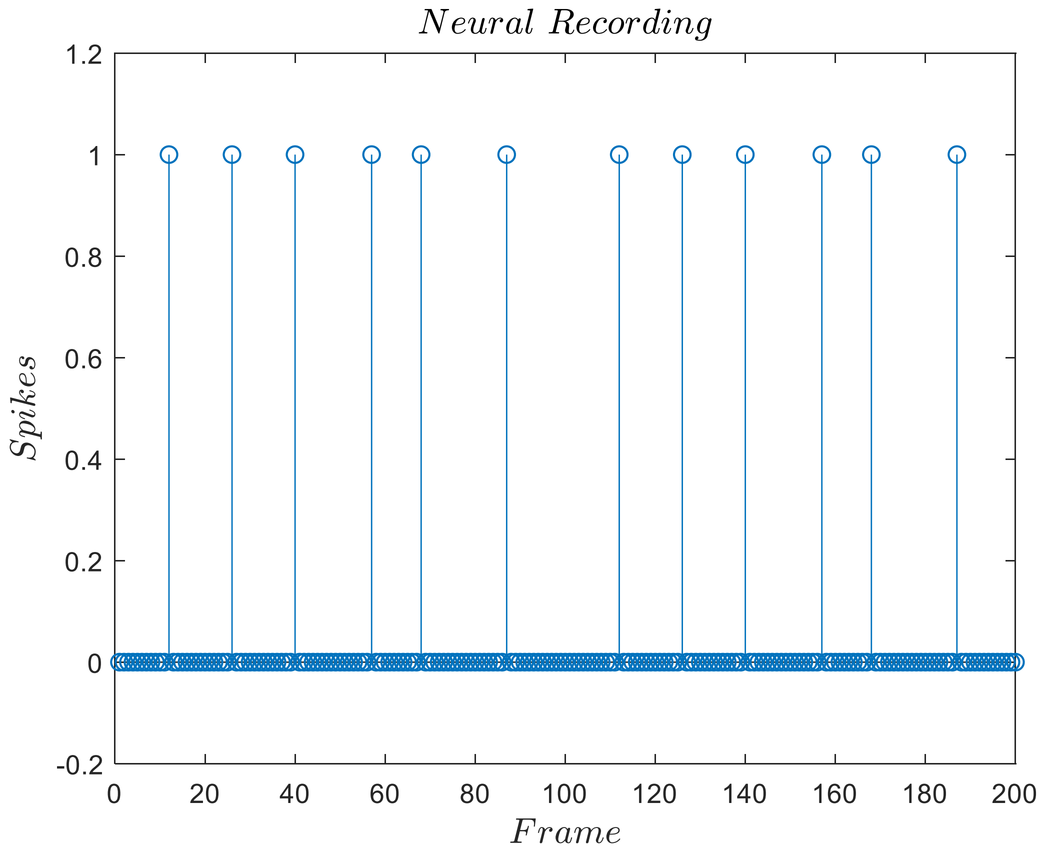


- **הרעיון:**
אם נמצע את התמונות אשר ברגע הקרנתם הנוירון "ירה" פוטנציאל פעולה, נוכל להשערך את התמונה הממוצעת שהוא מגיב אליה.

דוגמה בדו-מימד: גילוי תגובה מועדפת על נוירון

- נתון:





דוגמה בדו-מימד: גילוי תגובה מועדפת על נוירון

```
%% STA Example

% find the index of the first spike (neurons are causal)
ind_first = find(spikes==1,1);

% tau axis in units of frames
[~,tau] = xcorr(spikes,squeeze(stimul_movie_mat(1,1,:)),ind_first);

% create the cross correlation between the stimulus and the spikes
XcorrMat = zeros(m,n,length(tau));
for i=1:m
    for j=1:n
        XcorrMat(i,j,:) = xcorr(squeeze(stimul_movie_mat(i,j,:)),spikes,ind_first);
    end
end

% examine the images for tau in [-ind_first,0] to get the stimulus video
for i=1:(ind_first+1)
    figure();
    imagesc(XcorrMat(:,:,i));
    colormap(gray);
    axis off;
    axis tight;
    daspect([1,1,1]);
    title(['$\tau$ = ' num2str(tau(i)/fs*1000) ' ms'],'interpreter','latex','FontSize',15);
end
```

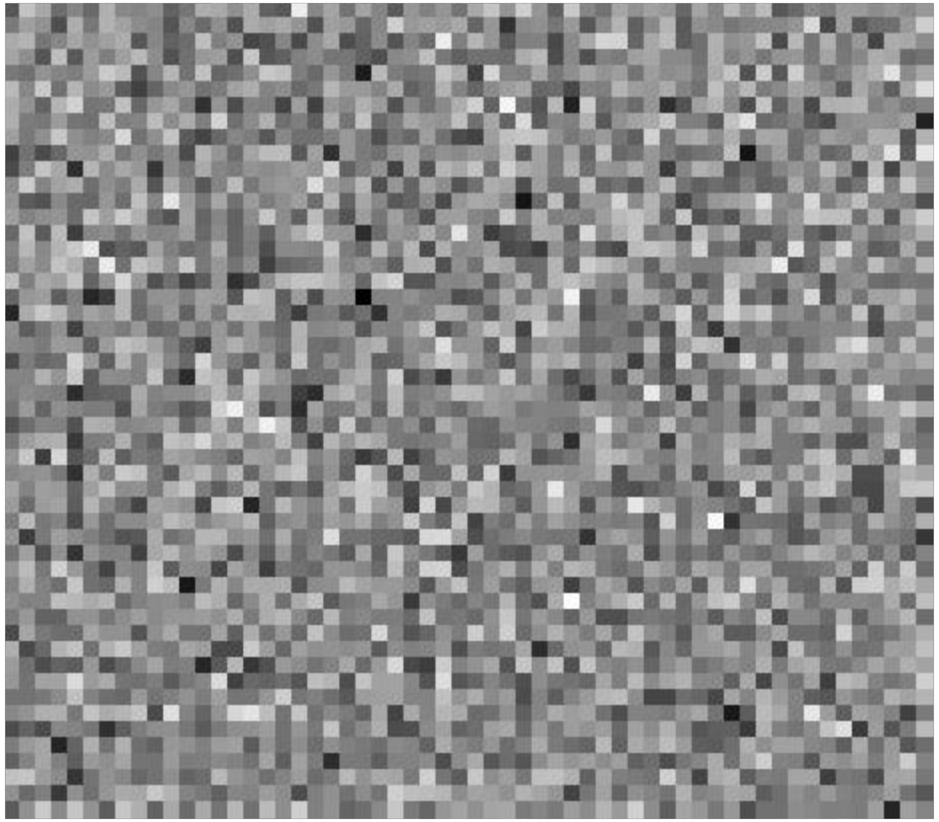
נוירונים הם סיבתיים

דרך נוחה לחלץ את הפרשי הזמנים

חישוב תוצאת הקרוסקורלציה בהפרשי הזמנים הרלוונטים

הצגת התוצאה

דוגמה בדו-מימד: גילוי תגובה מועדפת על נוירון



דוגמה בדו-מימד: גילוי תגובה מועדפת על נוירון

τ=-500 ms

הגירוי המועדף על הנוירון!

τ=-250 ms

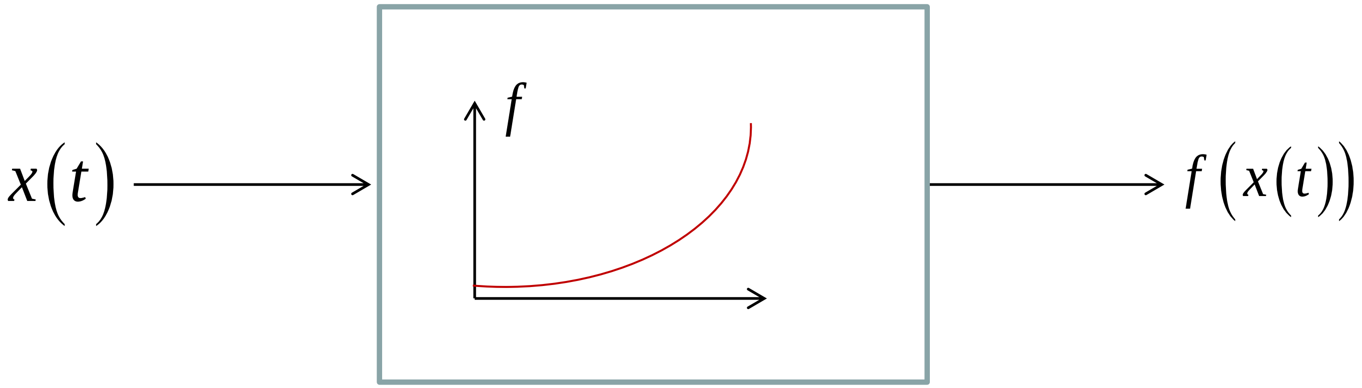
<u>שאלה:</u> מה זמן התגובה של הנוירון?

מה בתכנית?

- ✓ מיצוע
  - ← Spike Triggered Average
- משפט Bussgang
- שערוך ספקטרום פרמטרי
  - – מודל AR

משפט Bussgang

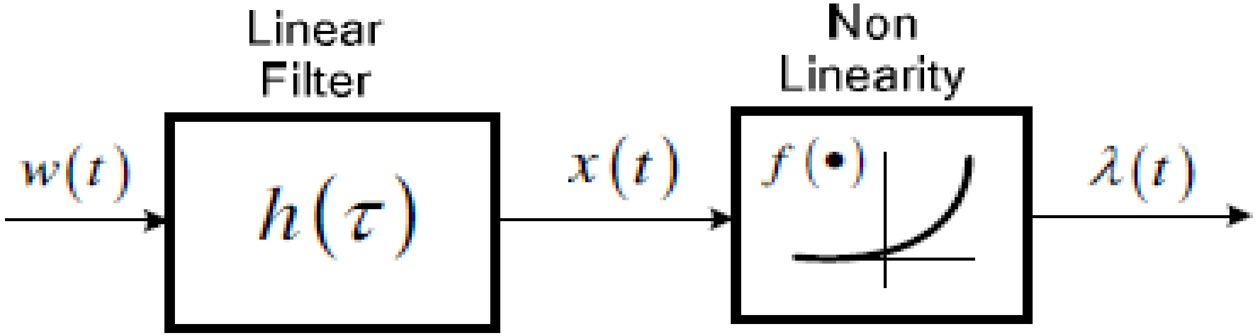
אם אות גאוסי סטציונרי $x(t)$ עובר דרך אי-לינאריות חסרת זכרון (סטאטית) $f\left(x(t)\right)$ אז $\mathbb{E}\left\{x(t+\tau)f\left(x(t)\right)\right\} = k_f \cdot \mathbb{E}\left\{x(t+\tau)x(t)\right\}$,
כאשר k_f הינו סקלר שתלוי באי-לינאריות $f(\bullet)$.



<u>משמעות:</u> טרנספורמציה לא לינארית חסרת זיכרון משפיעה על האוטו-קורלציה של תהליך גאוסי ע"י כפל בקבוע בלבד.

משפט Bussgang

- כללי המשחק:
  - הכניסה למערכת היא אות סטציונרי גאוסי עם תוחלת אפס.
  - המערכת הכוללת מורכבת מפילטר LTI + אי-לינאריות סטאטית:



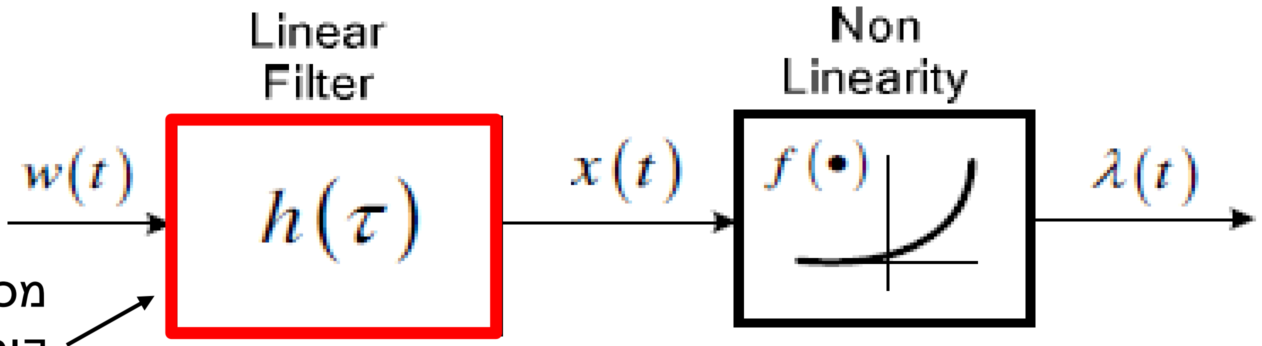
- מטרה:
  - לאפיין את שני חלקי המערכת ממדידה של המוצא והכניסה.

משפט Bussgang - הכללה

עבור שני אותות $w(t), x(t)$ סטציונרים גאוסים במשותף עם תוחלת אפס, הקרוסקורלציה לאחר מעבר אחד מהם $x(t)$ דרך אי-לינאריות חסרת זכרון (סטאטית) $f\left(x(t)\right)$ שווה:

$$\mathbb{E}\left\{w(t+\tau)\cdot f\left(x(t)\right)\right\}=k_f\cdot\mathbb{E}\left\{w(t+\tau)\cdot x(t)\right\}$$

כאשר k_f הינו סקלר שתלוי באי-לינאריות $f(\bullet)$.



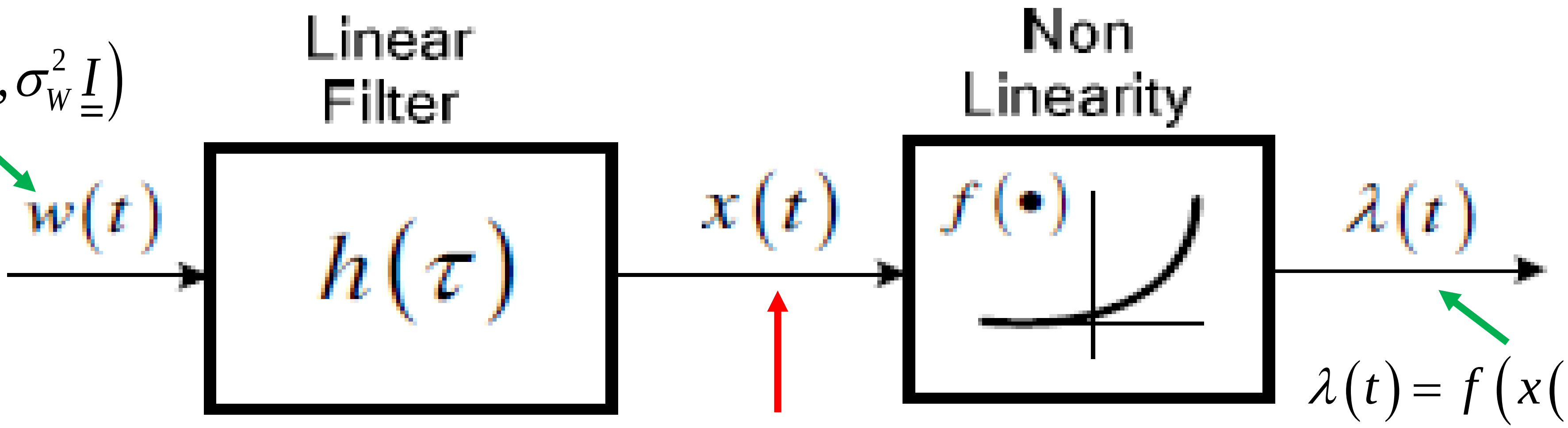
מכתיבה את הקרוס-קורלציה של הכניסה והמוצא

משפט Bussgang – דוגמה

- אפליקציה – אפיון התנהגות של אוכלוסיית נוירונים:

נמדד

$w(t) \sim N\left(\underline{0}, \sigma_W^2 \underline{\underline{I}}\right)$



$x(t) = (w * h)(t)$

$x(t) \sim N\left(\underline{0}, \sigma_W^2 \cdot \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T\right)$

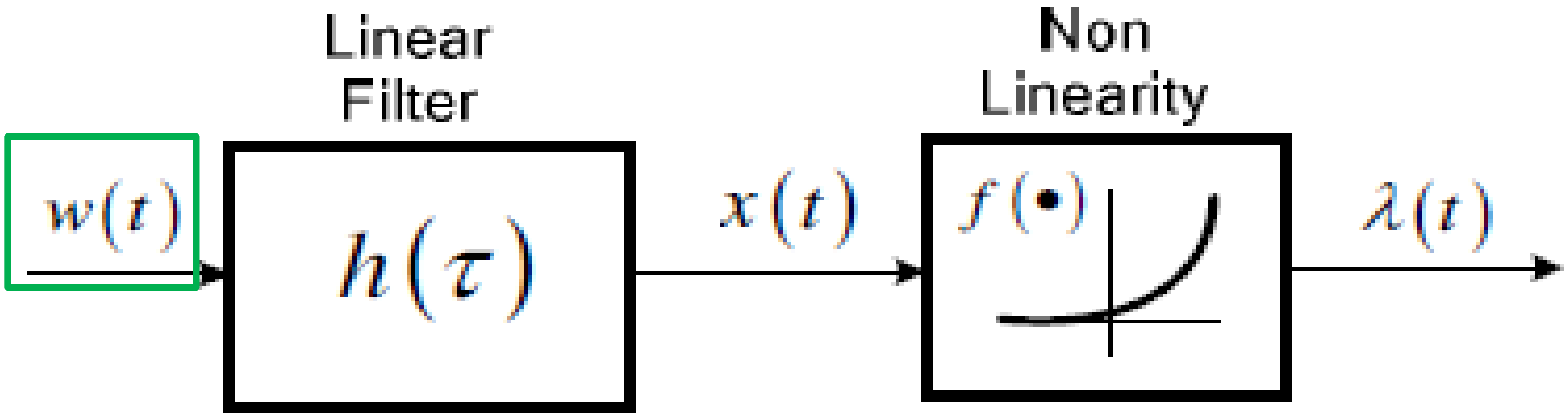
אין אותו!

$\lambda(t) = f\left(x(t)\right) \approx Discrete$

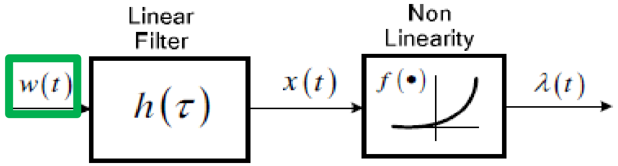
$R_{w\lambda}(\tau) = k_f \cdot \mathbb{E}\left\{w(t+\tau) \cdot x(t)\right\}$

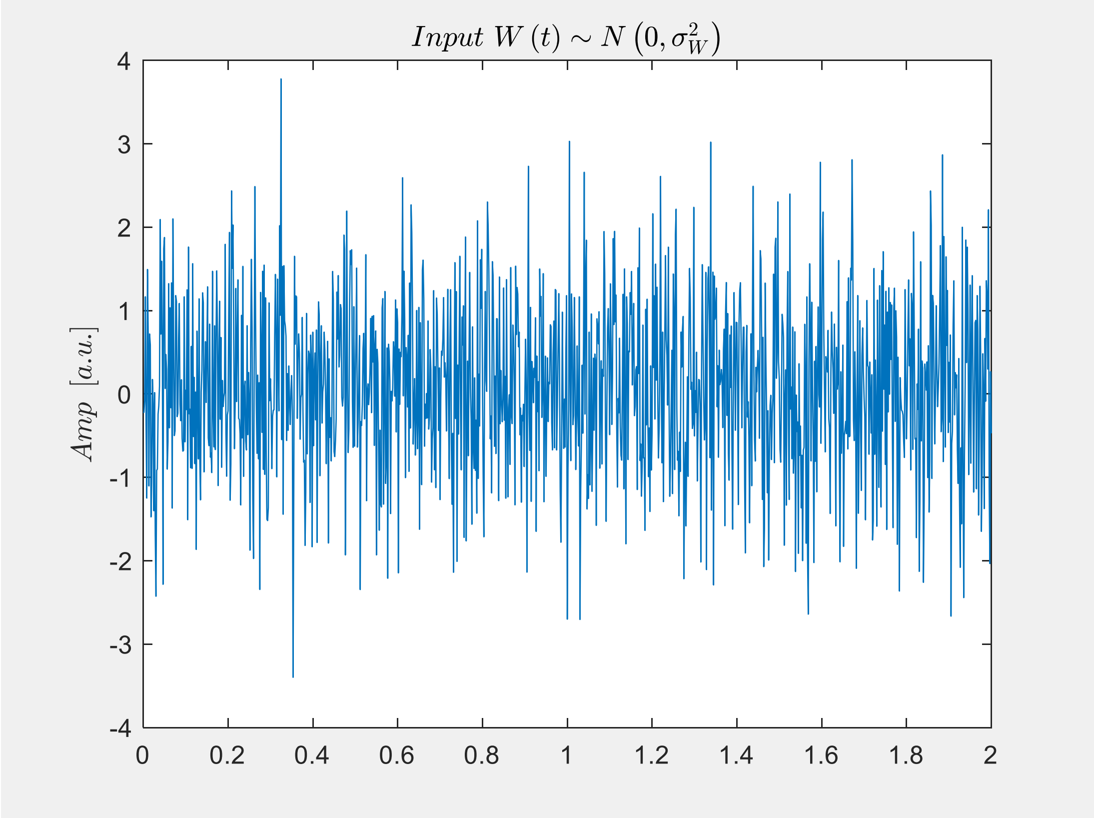
נמדד

משפט Bussgang – דוגמה

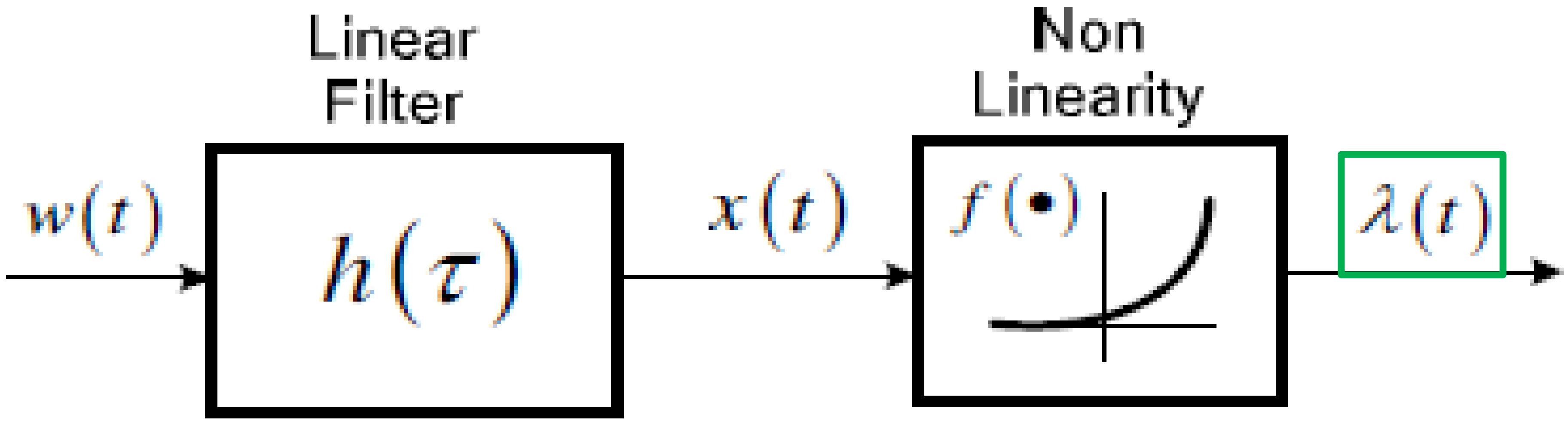


משפט Bussgang – דוגמה

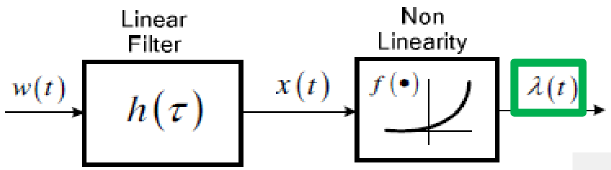


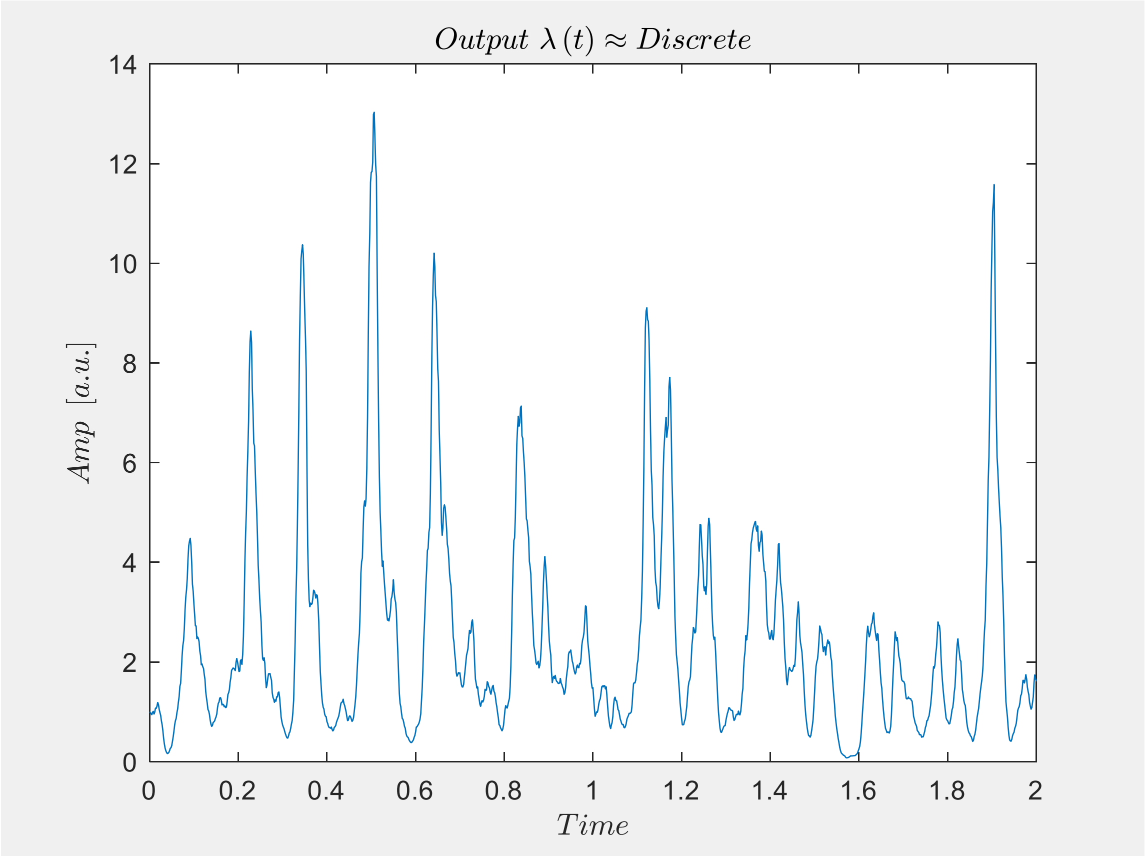


משפט Bussgang – דוגמה

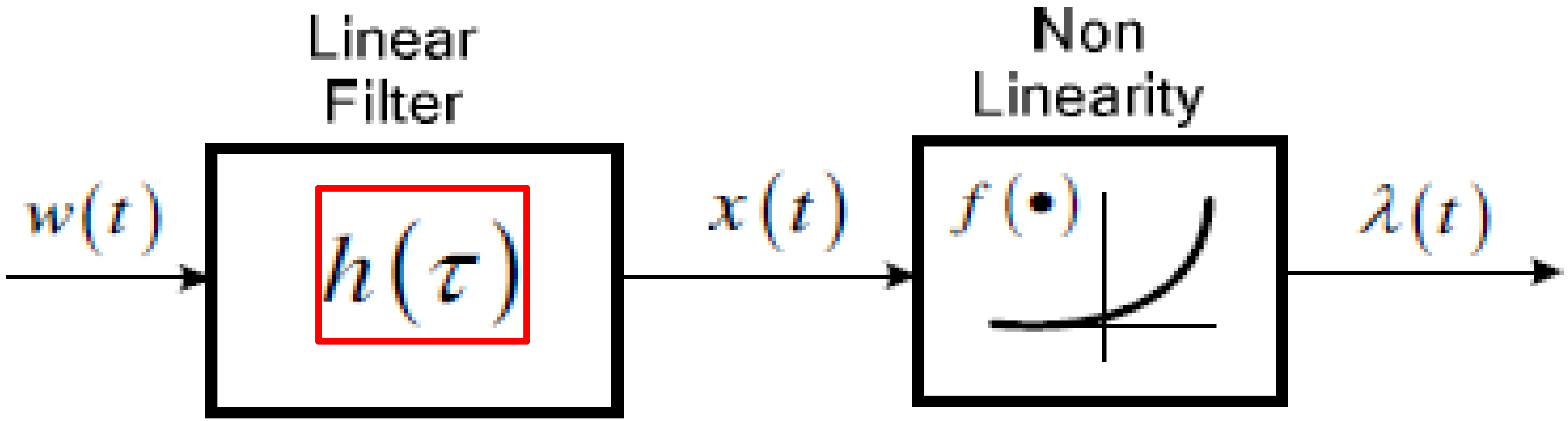


משפט Bussgang – דוגמה

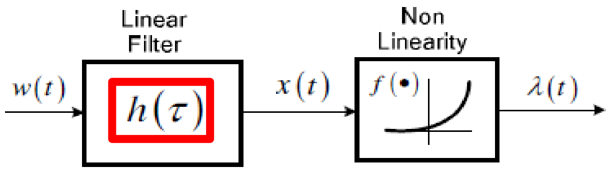


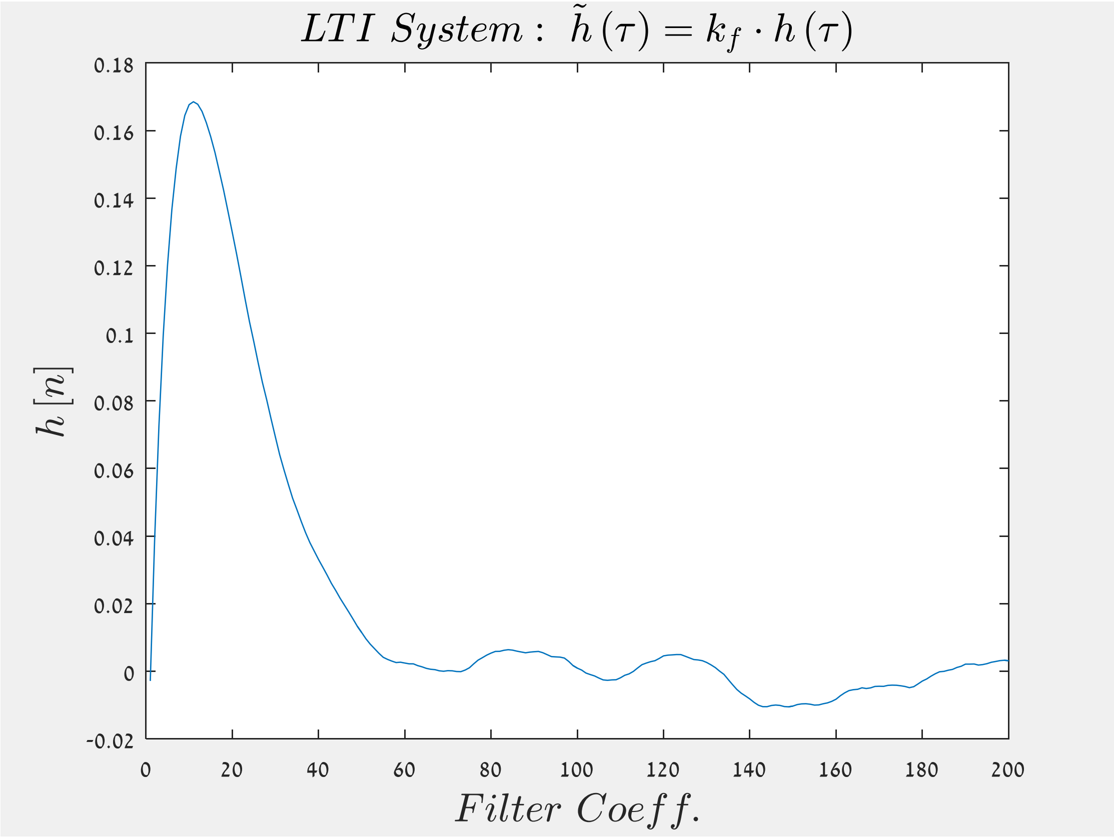


משפט Bussgang – דוגמה

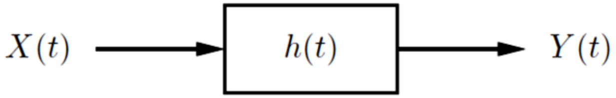


משפט Bussgang – דוגמה





תזכורת מתרגול 4



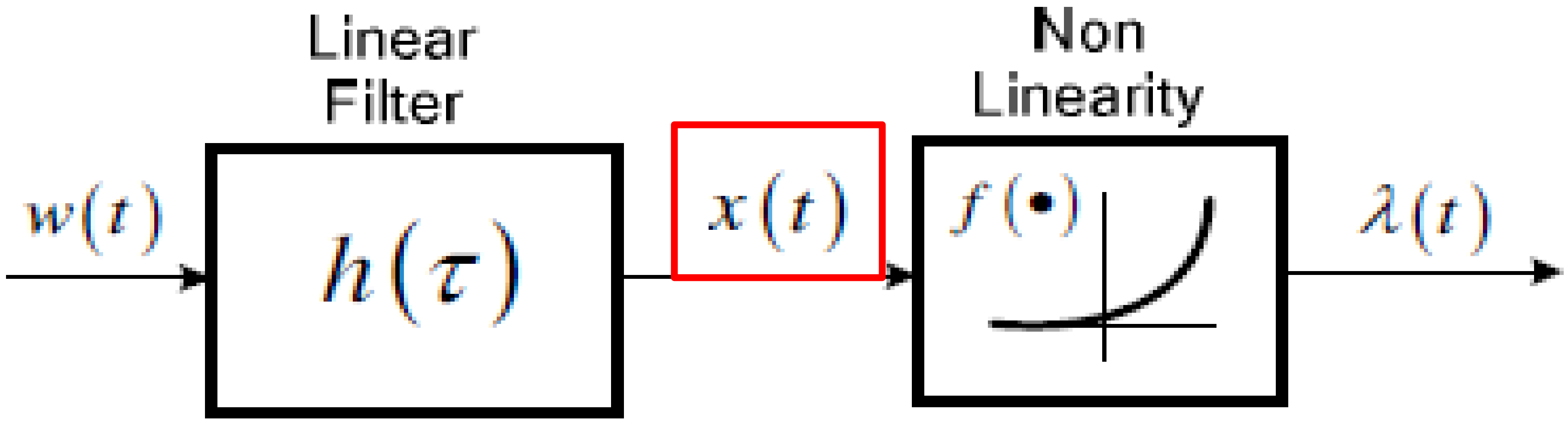
$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{w\lambda}(\tau) = R_{ww}(\tau) * \tilde{h}(-\tau) =$$

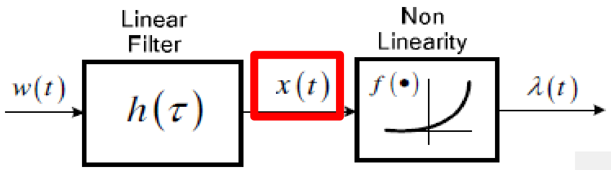
$$= \sigma_w^{\ 2}\delta(\tau) * \tilde{h}(-\tau) = \sigma_w^{\ 2}\tilde{h}(-\tau)$$

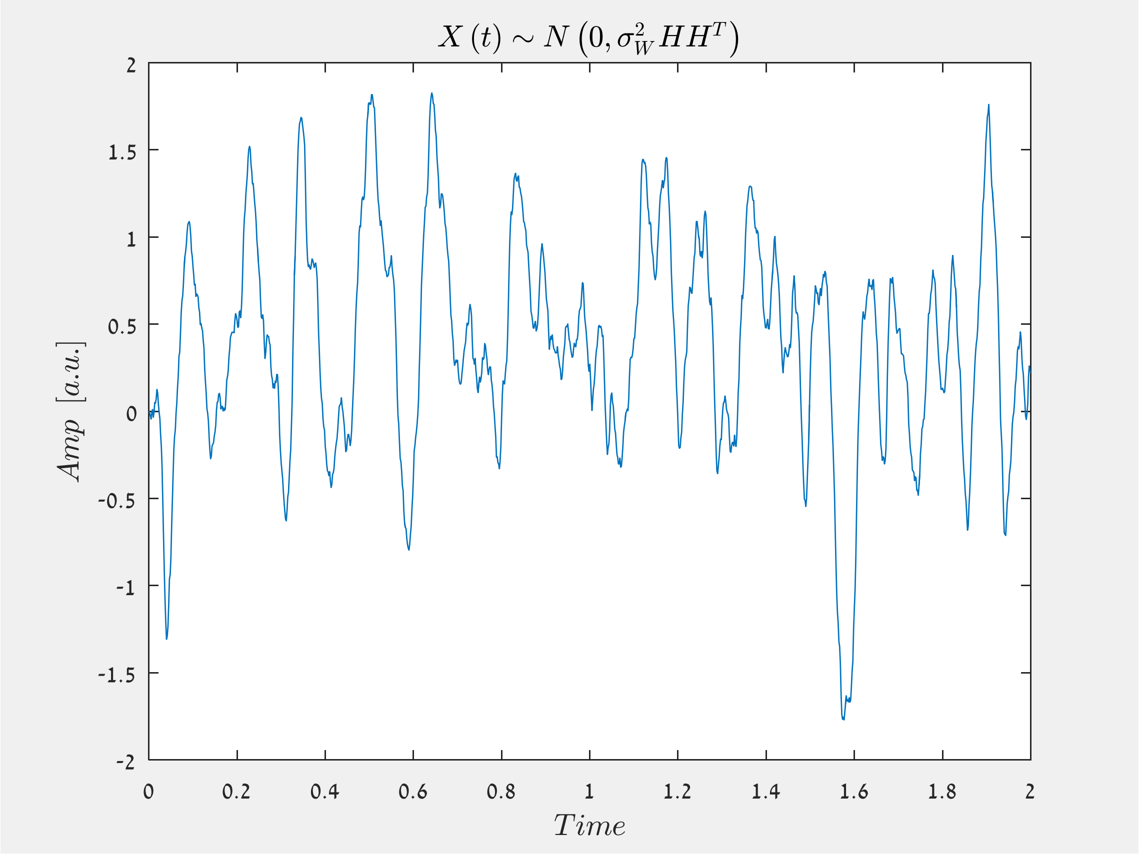
$$\rightarrow \boxed{\tilde{h}(\tau) = \frac{R_{w\lambda}(-\tau)}{\sigma_w^{\ 2}}}$$

משפט Bussgang – דוגמה

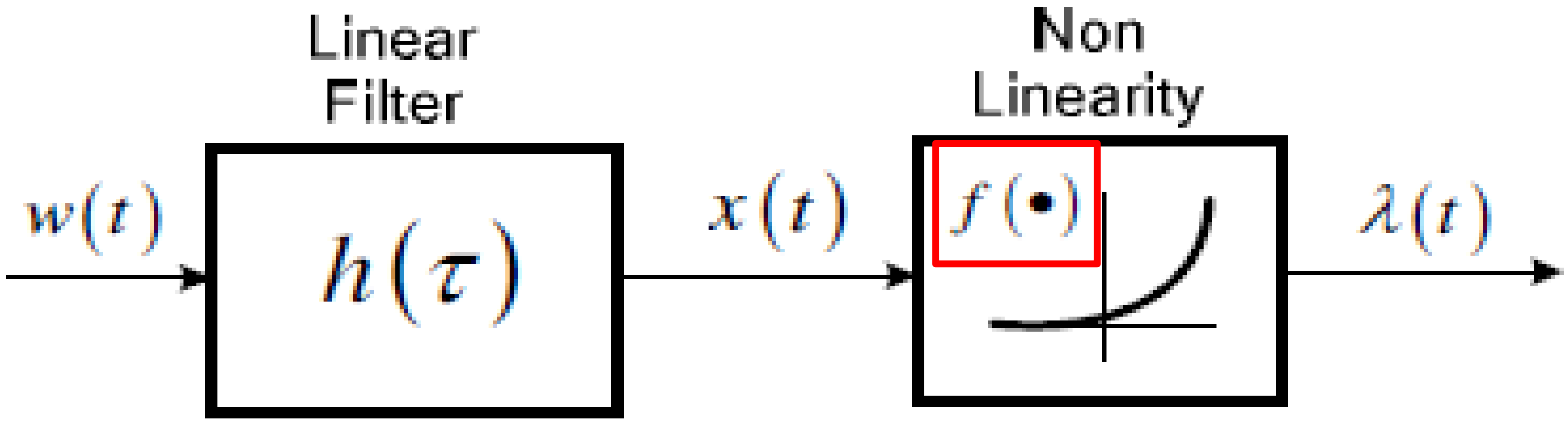


משפט Bussgang – דוגמה

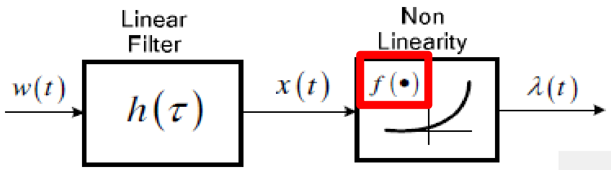


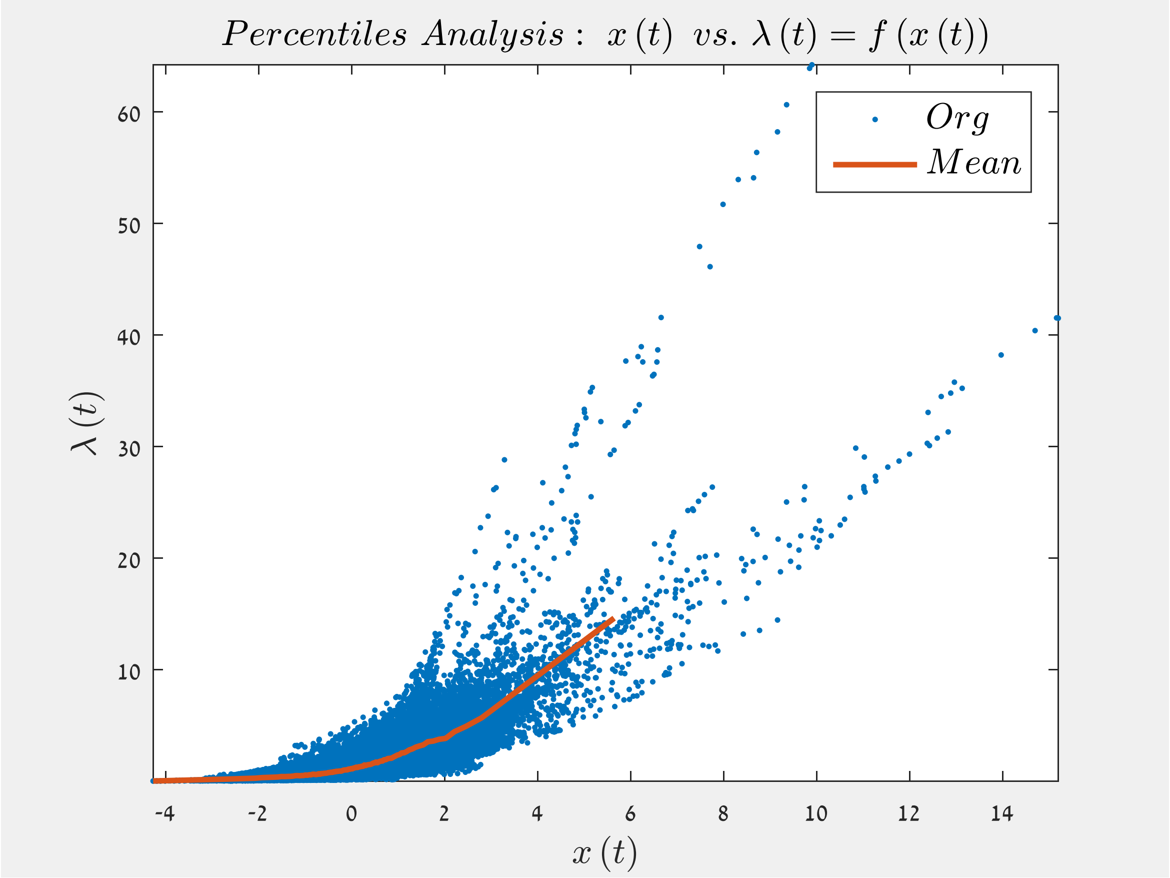


משפט Bussgang – דוגמה

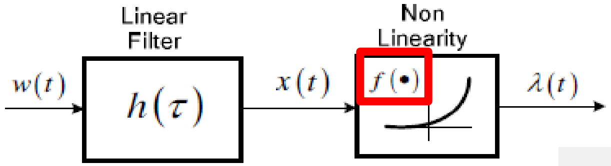


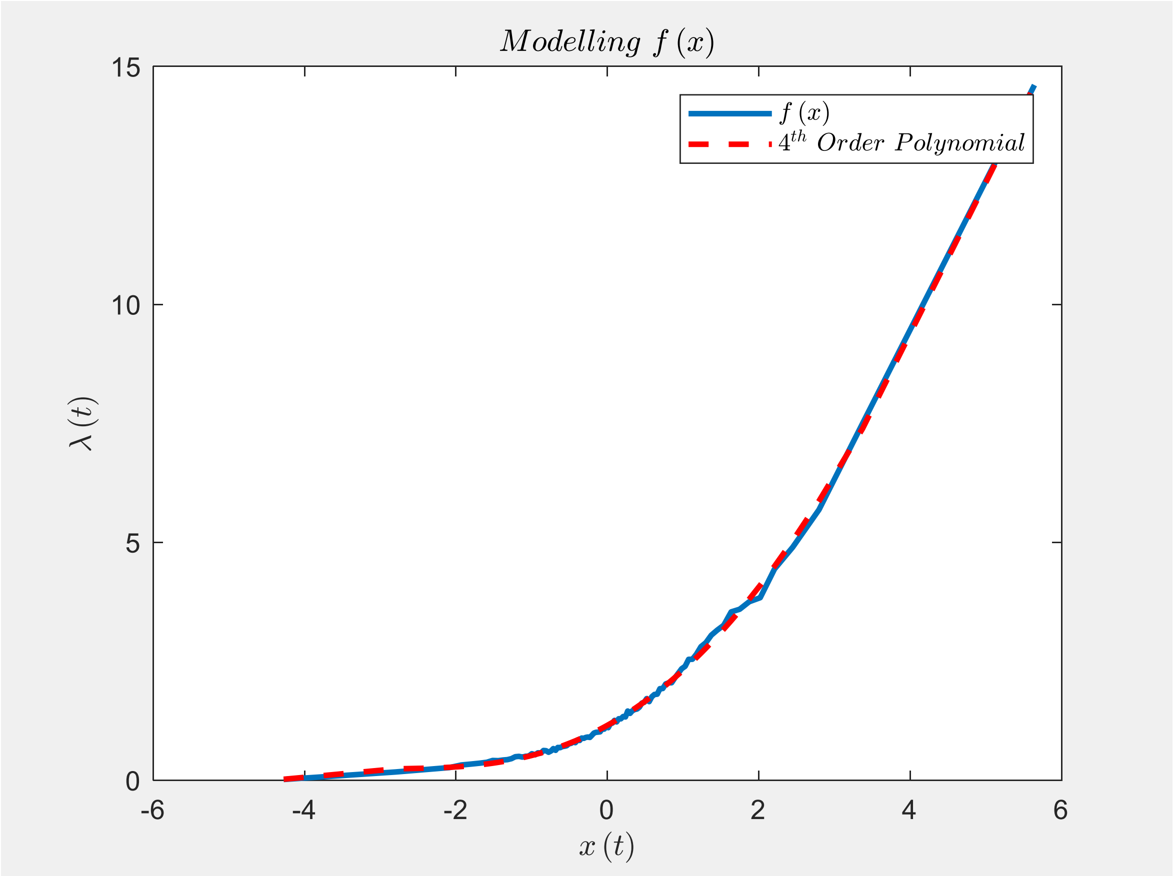
משפט Bussgang – דוגמה



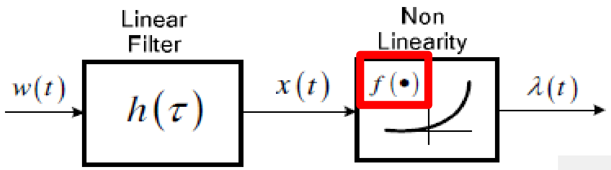


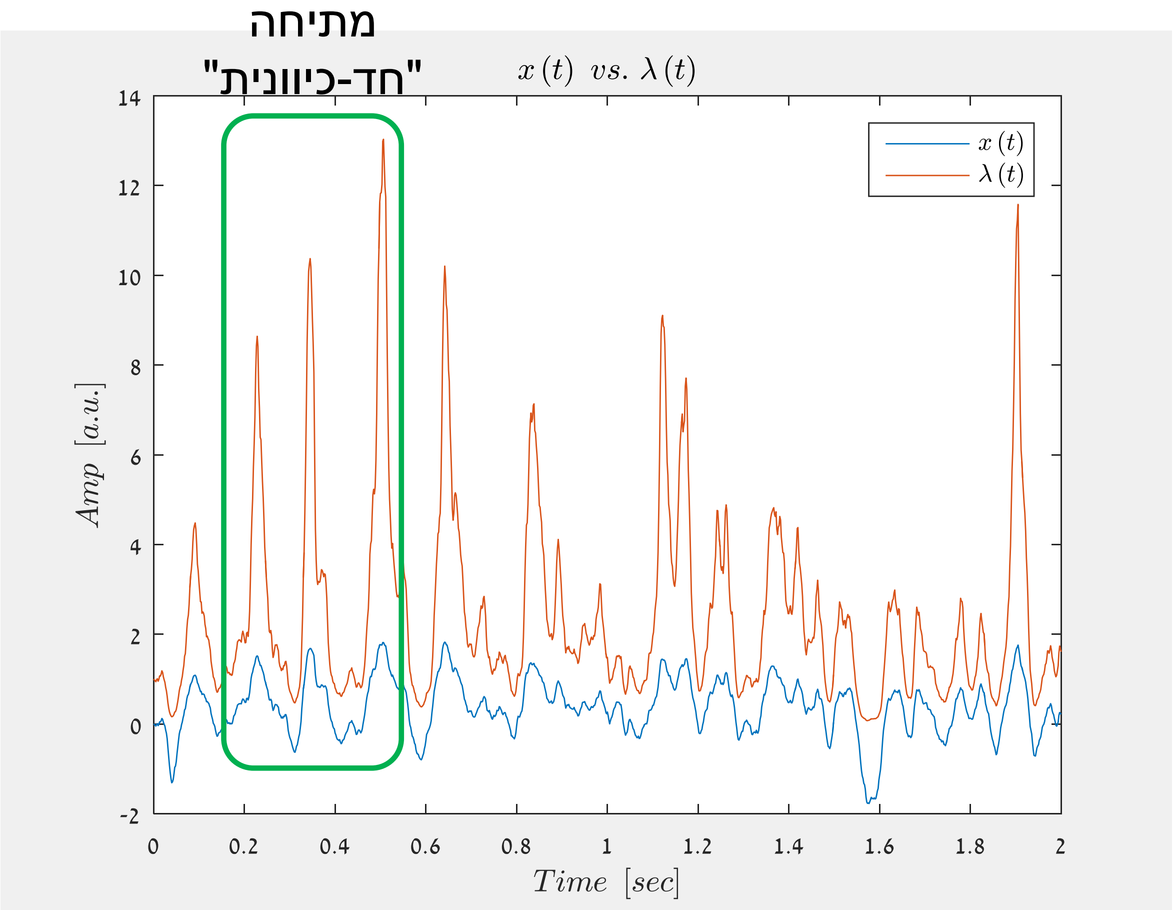
משפט Bussgang – דוגמה





משפט Bussgang – דוגמה





מה בתכנית?

✓ מיצוע
← Spike Triggered Average
✓ משפט Bussgang
- שערוך ספקטרום פרמטרי
  – מודל AR

שערוך פרמטרי של ספקטרום ההספק

- שערוך פרמטרי = שערוך מבוסס מודל.

- מניחים: האות שלנו ניתן לתיאור ע"י מודל מסוים:
  - משערכים את ערכי הפרמטרים של המודל.
  - הספקטרום המשוערך הוא הספקטרום המתאים לערכי הפרמטרים ששערכנו.

- זהו מידע נוסף שיכול להוביל לשערוך טוב יותר.
  - למשל: מודל AR.

מה בתכנית?

✓ מיצוע
← Spike Triggered Average
✓ משפט Bussgang
- שערוך ספקטרום פרמטרי
  – מודל AR

מודל AR - תזכורת

מודל זה מייצג אות שהוא תוצאת מעבר של רעש לבן בפילטר IIR עם קטבים בלבד:

$$\underset{\text{רעש לבן}}{W[n]} \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{1}{1+\sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l}} = \frac{1}{A(z)}} \longrightarrow \underset{\text{אות AR}}{X[n]}$$

מודל AR במישור הזמן מיוצג על ידי משוואת ההפרשים:

$$X[n] = \underbrace{W[n]}_{\text{חלק שאי אפשר לחזות}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{L} a_l X[n-l]}_{\text{חלק שתלוי דטרמיניסטית בעבר}}$$

מודל AR - תזכורת

- לעיתים יהיה לנו נוח לתאר אות כאות AR.
- כדי למדל אות נתון כאות AR צריך למצוא את המקדמים של הפילטר: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_L \end{bmatrix}^T$.
- בהרצאה הוכחתם שניתן לשערך אותם ע"י:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_L \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_{xx}(0) & \hat{R}_{xx}(1) & \cdots & \hat{R}_{xx}(L-1) \\ \hat{R}_{xx}(1) & \hat{R}_{xx}(0) & \cdots & \hat{R}_{xx}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{xx}(L-1) & \hat{R}_{xx}(L-2) & \cdots & \hat{R}_{xx}(0) \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{משוערכת מהאות הנתון}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_{xx}(1) \\ \vdots \\ \hat{R}_{xx}(L) \end{bmatrix}}_{\text{ניחשנו}}$$

שערוך פרמטרי של ספקטרום ההספק

- מודל AR במישור z:

$$X(z) = W(z) - \sum_{k=1}^{L} a_k z^{-k} \cdot X(z)$$

- פונקציית התמסורת:

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{L} a_k z^{-k}} = \frac{1}{A(z)}$$

- הצפיפות הספקטרלית:

$$S_{XX}(z) = \sigma_W^2 \left| H(z) \right|^2 = \frac{\sigma_W^2}{\left| A(z) \right|^2}$$

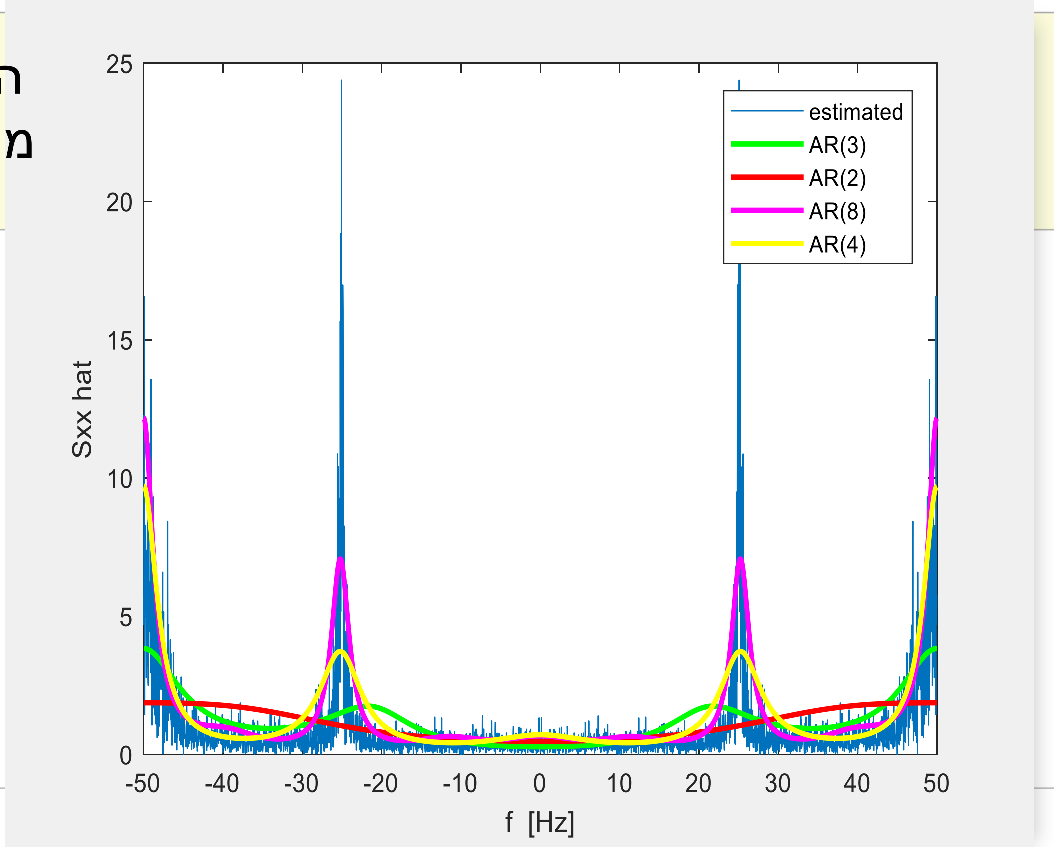
- מימוש במטלב?

שערוך פרמטרי של ספקטרום ההספק

```
%% Part 6
intTau=-points:points;
L=3;
R_hat=toeplitz(Rxx_hat(points+1:points+L));
r_hat=-(  Rxx_hat(points+2:points+L+1)  )';
a_hat=inv(R_hat)*r_hat;

%% Part 7
theta=2*pi*f/fs;
z=exp(-1i*theta);
A=ones(size(z));
for i=1:L
    A=A+a_hat(i)*z.^i;
end
Sxx_ar=1./(abs(A)).^2;
Rxx_ar=abs(fftshift(ifft(Sxx_ar)));

figure(h3)
hold on
plot(tau,Rxx_ar,'g','LineWidth',2)

figure(h4)
hold on
plot(f,Sxx_ar,'g','LineWidth',2)

%% Part 8
```

התאמת מודל AR

ספקטרום של AR



מודל AR - דוגמא

- נתון מודל AR:

$$x(n) = -ax(n-1) + w(n)$$

- $w(n)$ - רעש לבן עם תוחלת אפס ושונות σ^2

1. מצא את האוטוקורלציה של התהליך
2. חשב את ספקטרום ההספק עבור $|a| \to 1$ (קטן מאחד)

סעיף א

על הלוח.

פתרון תיאורטי

- חישוב מקדמי אוטוקורלציה:

$$R_{xx}(0)=E\left[x^2(n)\right]=E\left[x(n)\left(-ax(n-1)+w(n)\right)\right]=$$

$$=-aE\left[x(n)x(n-1)\right]+E\left[x(n)w(n)\right]=$$

$$=-aR_{xx}(1)+\underbrace{E\left[-ax(n-1)w(n)\right]}_{0}+\underbrace{E\left[w^2(n)\right]}_{\sigma^2}=-aR_{xx}(1)+\sigma^2$$

$$R_{xx}(1)=E\left[x(n)x(n-1)\right]=E\left[\left(-ax(n-1)+w(n)\right)\cdot x(n-1)\right]=$$

$$=-a\underbrace{E\left[x^2(n-1)\right]}_{R_{xx}(0)}+\underbrace{E\left[w(n)x(n-1)\right]}_{0}=-aR_{xx}(0)$$

פתרון תיאורטי

- לאחר ההצבה:

$$R_{xx}(0)=\frac{\sigma^2}{1-a^2} \longleftarrow R_{xx}(0)=a^2R_{xx}(0)+\sigma^2$$

- נוסחא רקורסיבית:

$$R_{xx}(k)=E\left[x(n)x(n-k)\right]=E\left[\left(-ax(n-1)+w(n)\right)x(n-k)\right]=$$
$$=-aE\left[x(n-1)x(n-k)\right]+E\left[w(n)x(n-k)\right]=-aR_{xx}(k-1)$$

- סה"כ נקבל:

$$R_{xx}(k)=(-a)^k\cdot R_{xx}(0)=\frac{(-a)^k}{1-a^2}\cdot\sigma^2 \quad \forall k>0$$

- מסימטריה:

$$R_{xx}(k)=R_{xx}(-k)$$

פתרון תיאורטי

- חישוב ספקטרום:

$$X(z) = -az^{-1}X(z) + W(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$S_{xx}(\theta) = \left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 \cdot \left|W\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\sigma^2}{\left|1+ae^{-j\theta}\right|^2} = \frac{\sigma^2}{\left|1+a\cos\theta - ja\sin\theta\right|^2} =$$

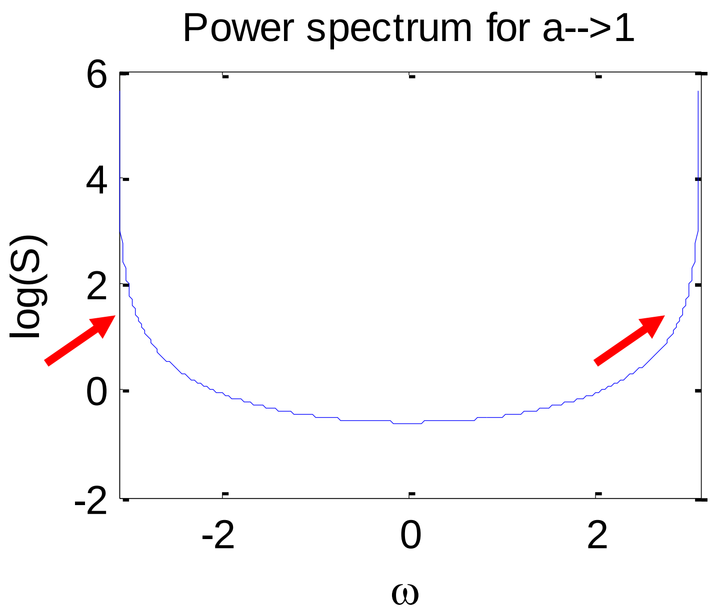
$$= \frac{\sigma^2}{1+a^2\cos^2\theta + 2a\cos\theta + a^2\sin^2\theta} = \frac{\sigma^2}{1+a^2+2a\cos\theta}$$

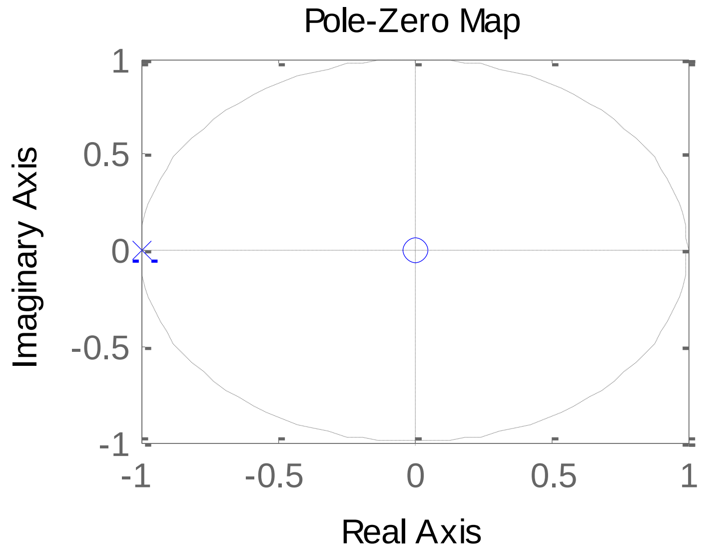
מקרי קצה

- נקח למקרים גבוליים:

עבור $a \to 1$:

$$S_{xx}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2(1+\cos\theta)}$$



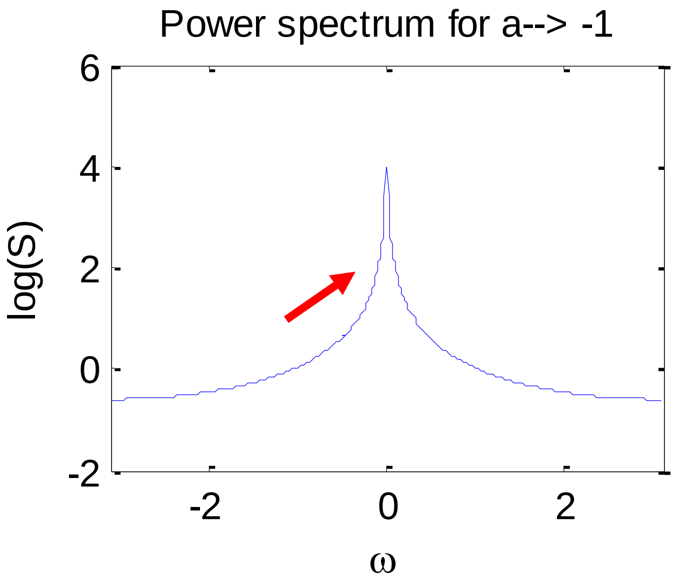


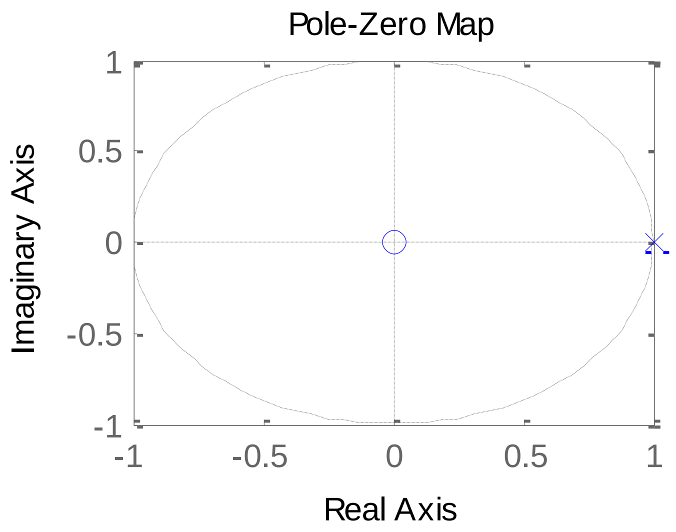
מקרי קצה

- נקח למקרים גבוליים:

עבור $a \to -1$:

$$S_{xx}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2(1-\cos\theta)}$$

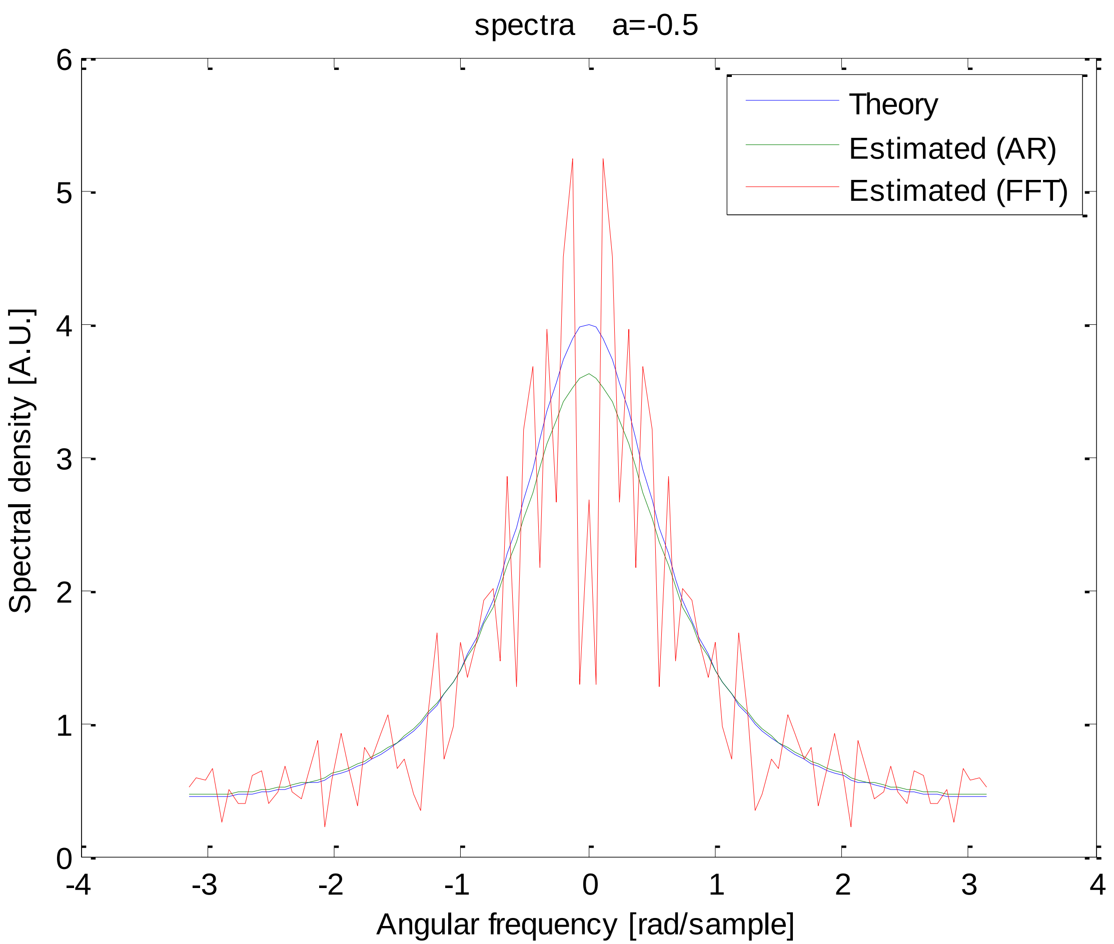




לצורך יציבות:

$$|a| < 1$$

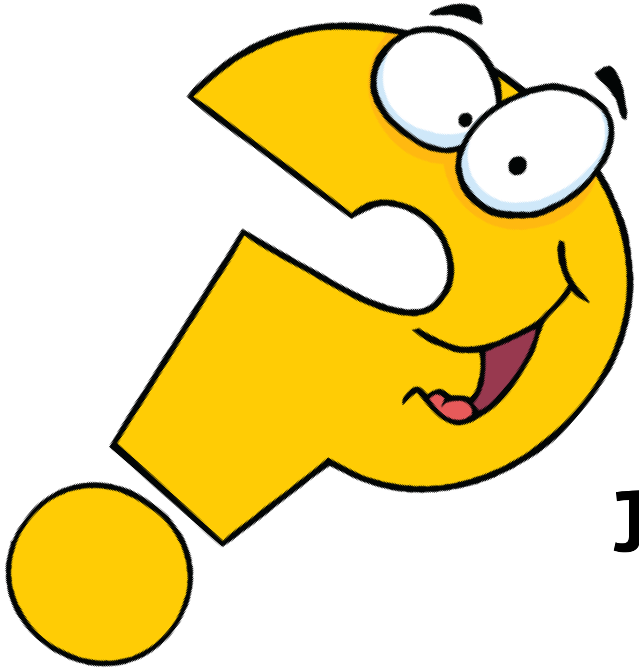
שערוך ספקטרום על סמך AR - סיכום



- בהינתן אות, מייצרים מודל AR (במקרה זה מסדר 1):
  - משערכים את האוטו-קורלציה של האות
  - משערכים את הפרמטר(ים) של המודל
- משערכים ספקטרום בהנחת AR

מה היה לנו היום?

- ✓מיצוע
  - ←Spike Triggered Average
- ✓משפט Bussgang
- ✓שערוך ספקטרום פרמטרי
  - ←מודל AR



שאלות

תירגול 7 - שערוך ספקטרום לא פרמטרי

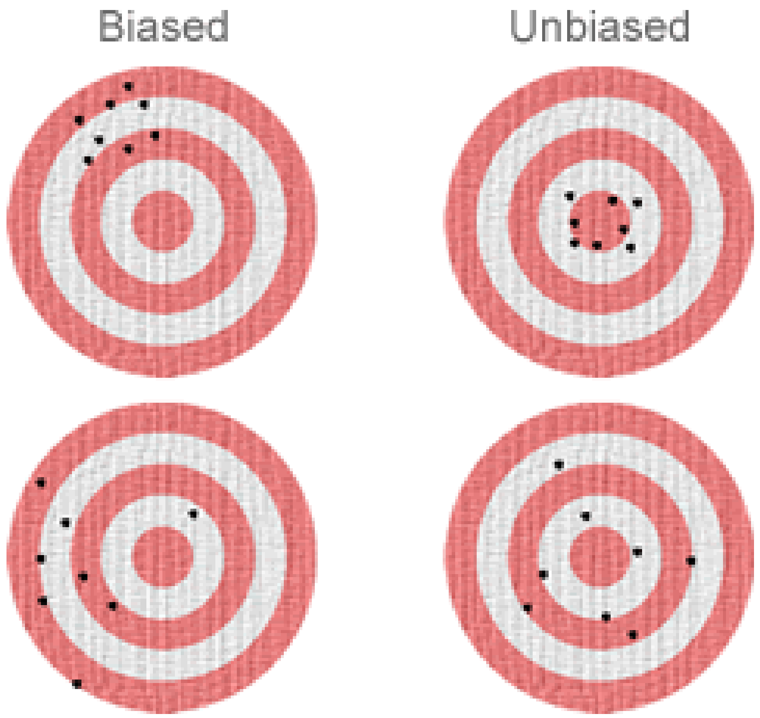
שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- תזכורת + סיגנל רפרנס
- Periodogram
- Tapering
- שיטת Bartlett
  - שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- תזכורת + סיגנל רפרנס
- Periodogram
- Tapering
- שיטת Bartlett
  - שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

תזכורת: מושגי יסוד בשערוך



- הטיה (bias) – $b = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta$

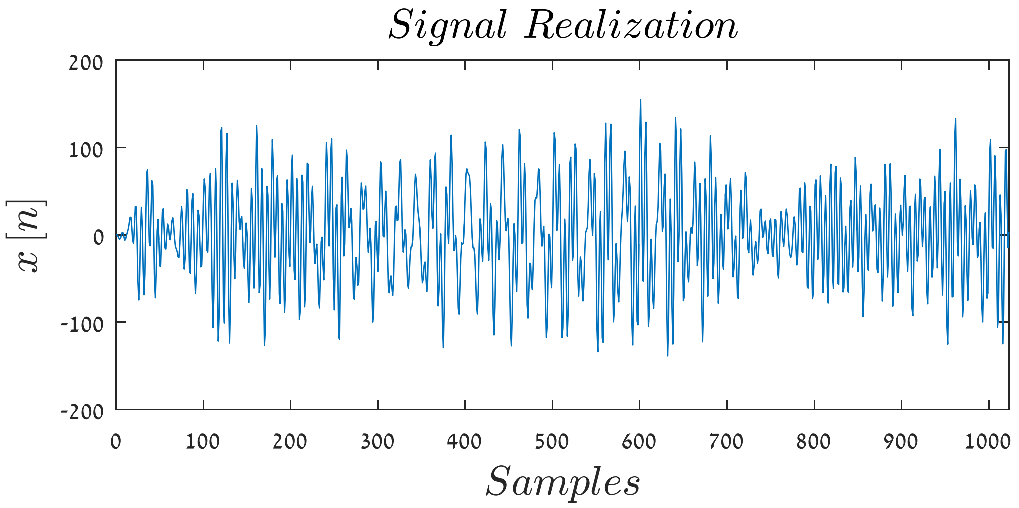
משערך בלתי מוטה $\longleftarrow \quad b = 0$

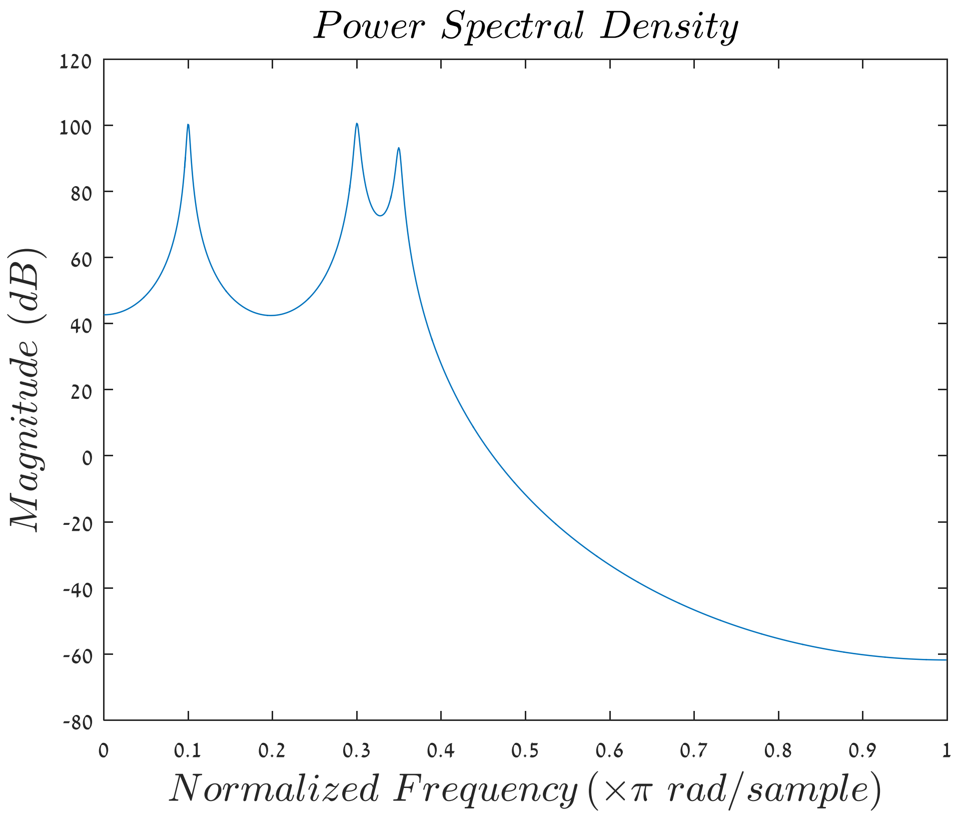
חוסר הטיה אסימפטוטי - $\lim_{N\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

- קונסיסטנטיות - $\lim_{N\to\infty} E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = 0$

סיגנל רפרנס להשוואת ביצועים

- הסיגנל בדיקה שלנו יהיה תהליך AR מסדר 6:





שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- Periodogram
- Tapering
- שיטת Bartlett
  - שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

תזכורת - Periodogram

$x_k(t)$ פונקצית מדגם של תהליך סמ"ר וארגודי

ההתמרה של פונקצית המדגם:
$$X_k(f,T)=\int_0^T x_k(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

משערך לאוטו-קורלציה:
$$R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t+\tau)x_k(t)dt$$

משערך לאוטו-ספקטרום:
$$\boxed{S_{xx}(f,T,k)=\frac{1}{T}\left|X_k(f,T)\right|^2}$$

גרסה בדידה – Periodogram

פונקצית מדגם של תהליך סמ"ר וארגודי $x[n]$

ההתמרה של פונקצית המדגם:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

מוטה

משערך לאוטו-קורלציה:

$$\hat{R}_{xx}[m]=\begin{cases}\boxed{\dfrac{1}{N}}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x[n]\cdot x[n+m] & 0\le m\le N-1\\ \hat{R}_{xx}[-m] & -(N-1)\le m\le 0\end{cases}$$

משערך לאוטו-ספקטרום:

$$\boxed{\hat{S}_{xx}[k]=\frac{1}{N}\left|X[k]\right|^2}$$

Periodogram

- המשערך הקודם שקול לשערוך מוטה של האוטוקורלציה וחישוב DFT לאחר מכן:

$$\boxed{\frac{1}{N}\left(x[n]*x[-n]\right)(m)}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot x\left[m-\left(-n\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot x[n+m]\underset{\substack{0\le n\le N-1\\0\le n+m\le N-1}}{=}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1}x[n]\cdot x[n+m]=\boxed{\hat{R}_{xx}[m]}$$

- התמרת DFT לשני האגפים תתן:

$$\boxed{\hat{S}_{xx}[k]=\frac{1}{N}\left|X[k]\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\hat{R}_{xx}[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}}$$

Periodogram

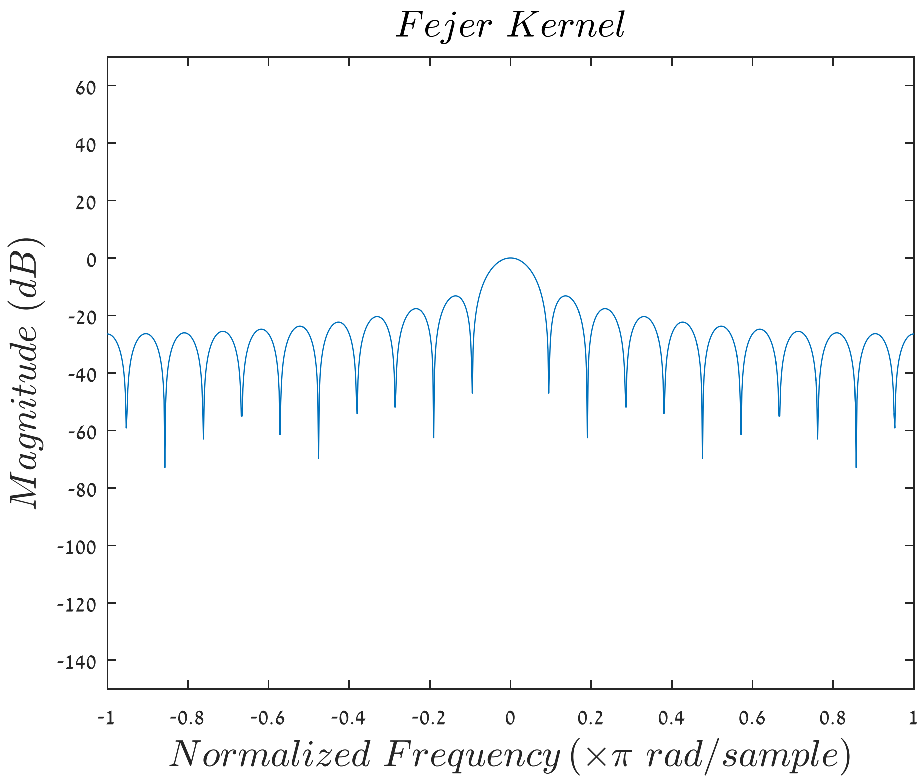
- תוחלת:
  - השתמשנו במספר סופי של ערכי האות = שקול להכפלה בחלון מלבני.

$$E\left[\hat{S}_{xx}[k]\right]=E\left[\frac{1}{N}\left|\tilde{X}[k]\right|^2\right]=$$

$$=E\left[\frac{1}{N}\left|D_N[k]*X[k]\right|^2\right]=ND_N^2[k]*S_{xx}[k]$$

$$\boxed{N\cdot D_N^2[k]=\frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/N)}\right)^2}$$

אומנם המשערך חסר
הטיה אסימפטוטית..



Periodogram

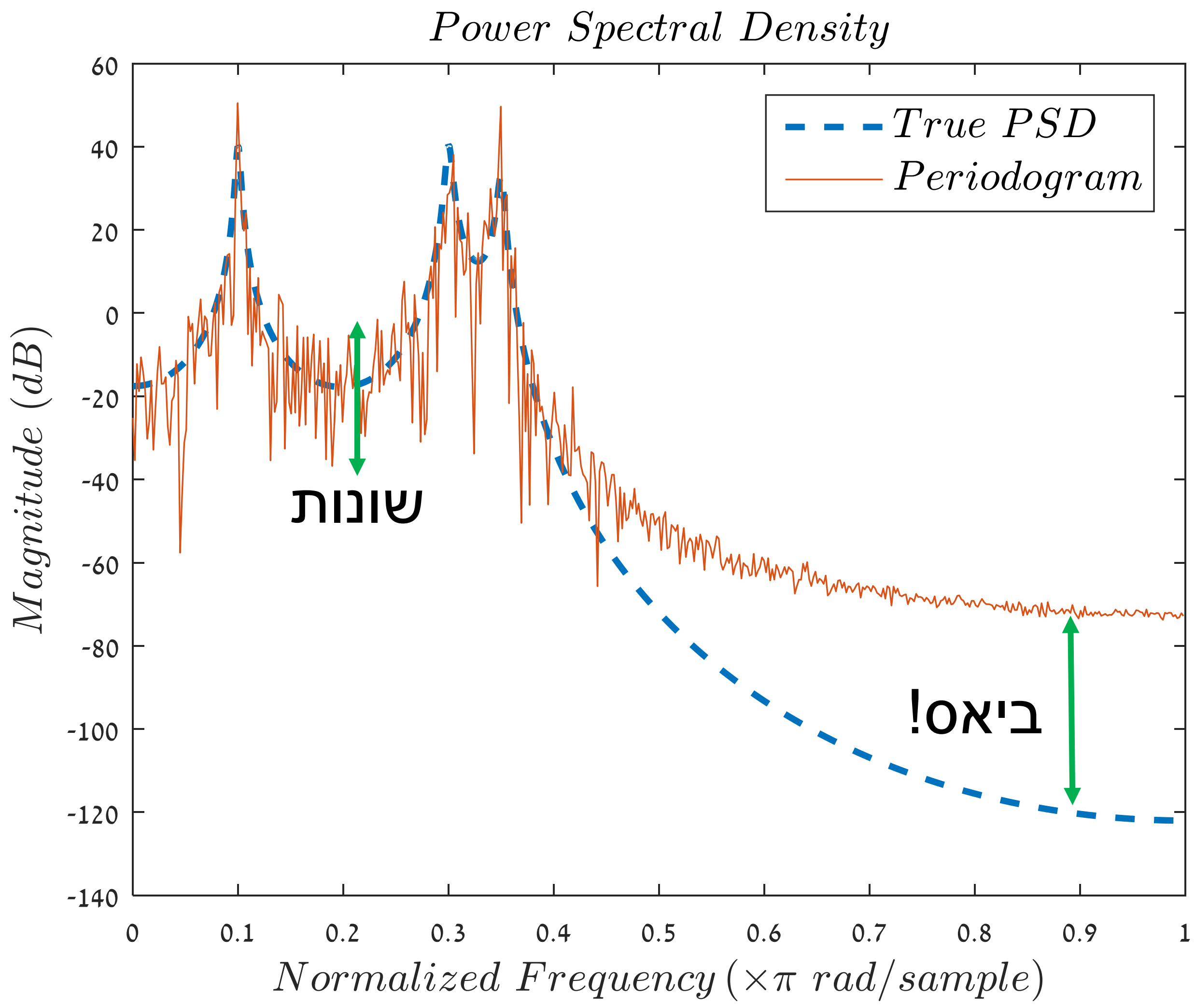
- שונות:
  - אפשר להראות שעבור רעש לבן גאוסי עם שונות σ_x^2 מקבלים:

$$Var\left(\hat{S}_{xx}[k]\right) = \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin\left(2\pi k\right)}{N \sin\left(2\pi k / N\right)} \right) \right] \xrightarrow[N\to\infty]{} \sigma_x^4$$

  - כלומר קיבלנו שהמשערך הוא לא קונסיסטנטי!

- שאלה: איך יראה שיערוך הספקטרום של סיגנל הרפרנס?

השוואה לרפרנס – Periodogram



שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- Tapering
- שיטת Bartlett
  - שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

בעיה ב-Periodogram

- השתמשנו במספר סופי של ערכי האות = שקול להכפלת האות בחלון מלבני.
- בתדר – קיבלנו קונבולוציה עם גרעין Fejer, שהכניס לנו הטיה ורעשים.

- פתרון אפשרי:

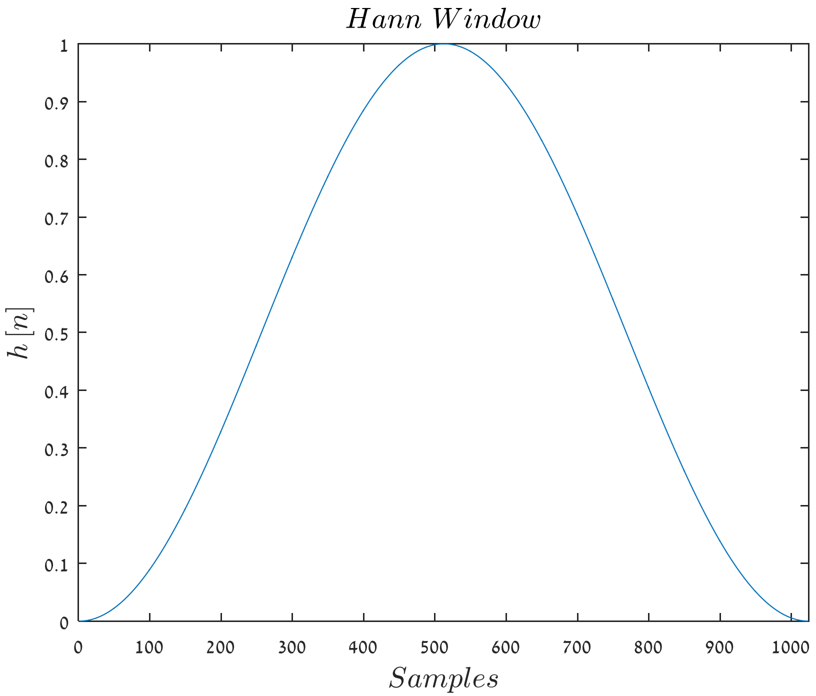
הכפלת האות בחלון אחר שיקטין את הרעשים בתדר.

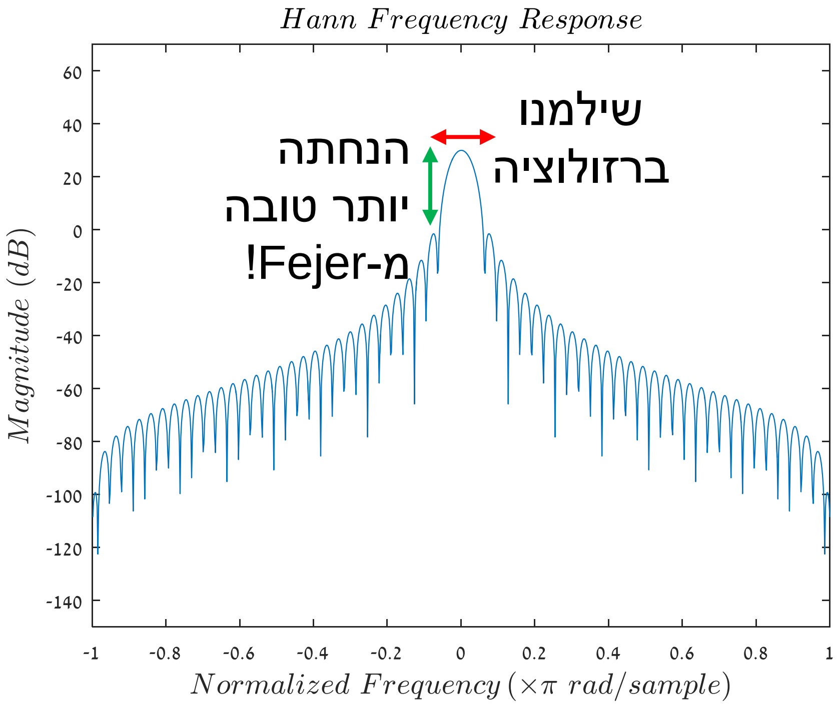
- עדיין חלון בעל אורך סופי ולכן יישאר חלק מהרעש

חלון hann

- חלון hann:

$$w[n]=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) \qquad n=0,\dots,N-1$$





Tapering/ Windowing

- נזכור שניתן לחשב את הספקטרום בשתי דרכים שקולות:

$$\boxed{\hat{S}_{xx}[k]=\frac{1}{N}\left|X[k]\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\hat{R}_{xx}[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}}$$

$$\tilde{x}[n]=x[n]\cdot w_{Hann}[n]$$

$$\tilde{X}[k]=X[k]*W_{Hann}[k]$$

אופציה 1:
Tapering
של האות עצמו

$$\tilde{R}_{xx}[n]=\hat{R}_{xx}[n]\cdot w_{Hann}[n]$$

$$\tilde{S}_{xx}[k]=\hat{S}_{xx}[k]*W_{Hann}[k]$$

אופציה 2: Tapering
של האוטוקורלציה

נקראת גם שיטת
Blackman-Tukey

Tapering – גורם תיקון

- כאשר ביצענו tapering, ההכפלה בחלון הפחיתה את האנרגיה של האות ביחס לחלון מלבני בפקטור:

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_w^2(t)\,dt$$

- אם נרצה לחשב את כמות האנרגיה בתחום תדרים מסוים נצטרך לחלק את הספקטרום בגורם התיקון:

$$U=\begin{cases}1 & 0\le t\le T\\ 0 & o.w.\end{cases} \qquad \frac{\int_0^T U_w^2(t)\,dt}{\int_0^T U^2(t)\,dt}$$

hann - דוגמא לגורם תיקון

$$\tau=\frac{2\pi t}{T},d\tau=\frac{2\pi}{T}dt$$

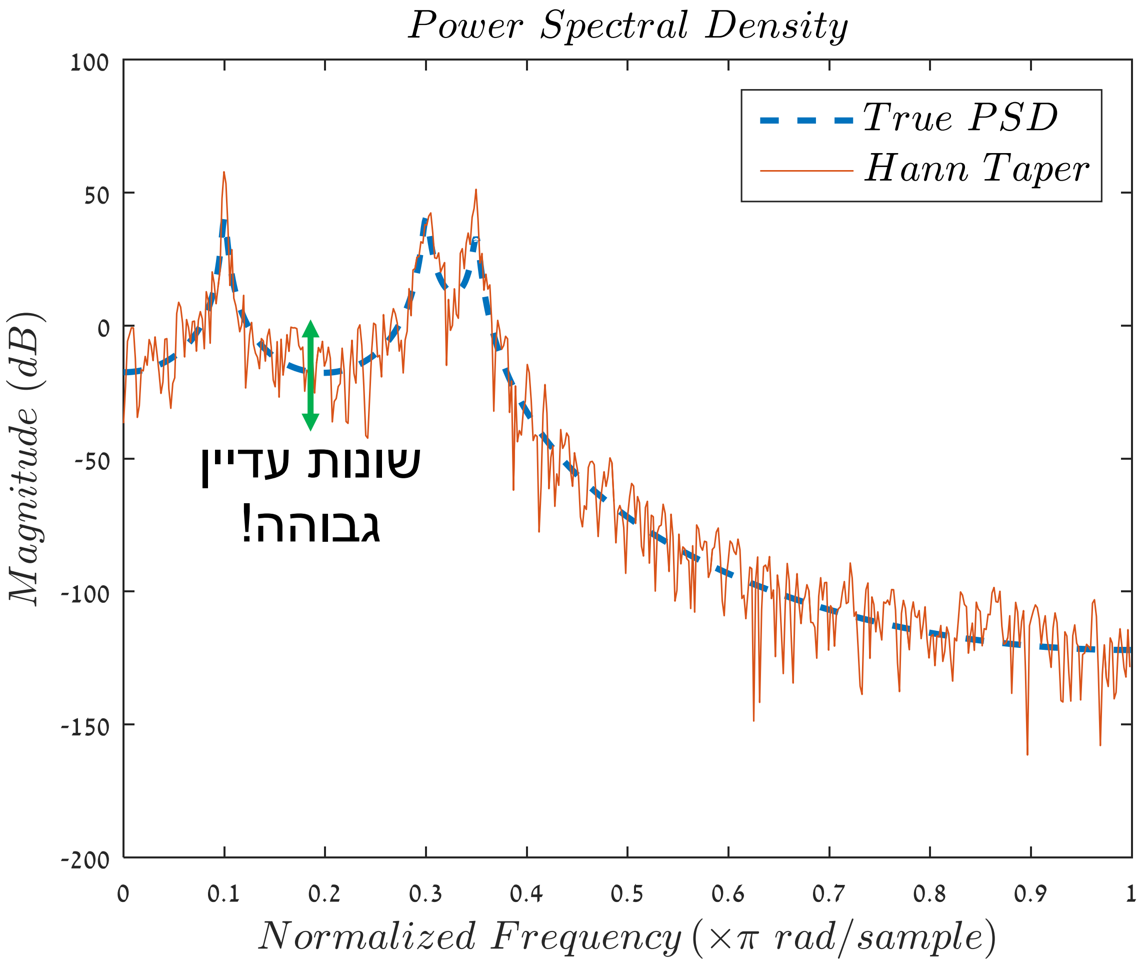
$$\int_0^T U_w^2(t)\,dt=\int_0^T\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\right]^2 dt=$$

$$=\frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left(1-\cos(\tau)\right)^2 d\tau=\frac{T}{8\pi}\int_0^{2\pi}1-2\cos(\tau)+\cos^2(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{T}{8\pi}\left[2\pi-0+\frac{1}{2}\cdot 2\pi-0\right]=\frac{3T}{8}$$

$$\int_0^T U^2(t)\,dt=T\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\int_0^T U_w^2(t)\,dt}{\int_0^T U^2(t)\,dt}=\frac{3}{8}}$$

Tapering – השוואה לרפרנס



שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

בעיה

- רוצים לקבל משערך עם שונות יותר נמוכה.
- נזכר במשערך לממוצע מתוך N מדידות i.i.d:

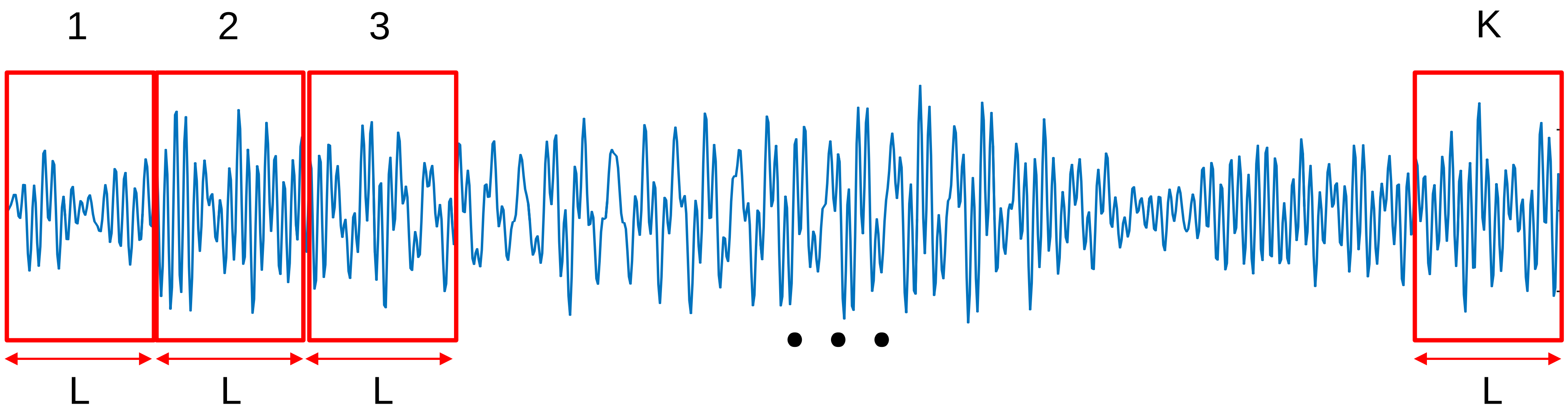
$$\boxed{\hat{s}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)}$$

$$\left.\begin{aligned} E\left[\hat{s}(t)\right] &= s(t) \\ Var\left[\hat{s}(t)\right] &= \frac{\sigma_n^2(t)}{N} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lim_{N\to\infty}\left\{MSE\left(\hat{s}(t)\right)\right\}=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sigma_n^2(t)}{N}\right\}=0$$

- אם רק היו בידינו N מדידות בלתי תלויות של הספקטרום..
- פתרון אפשרי: האות סמ"ר וארגודי, ולכן ניתן לחלק אותו למקטעים!

שיטת Bartlett

- בהינתן אות באורך N, מחלקים אותו ל-K מקטעים באורך L:



- מחשבים ספקטרום בכל מקטע וממצעים את התוצאות:

$$\hat{S}_{xx}[k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left\{\frac{1}{L}\left|X_i[k]\right|^2\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\left|X_i[k]\right|^2$$

שיטת Bartlett

- תוחלת:
  - השתמשנו במספר סופי של ערכי האות = שקול להכפלה בחלון מלבני.

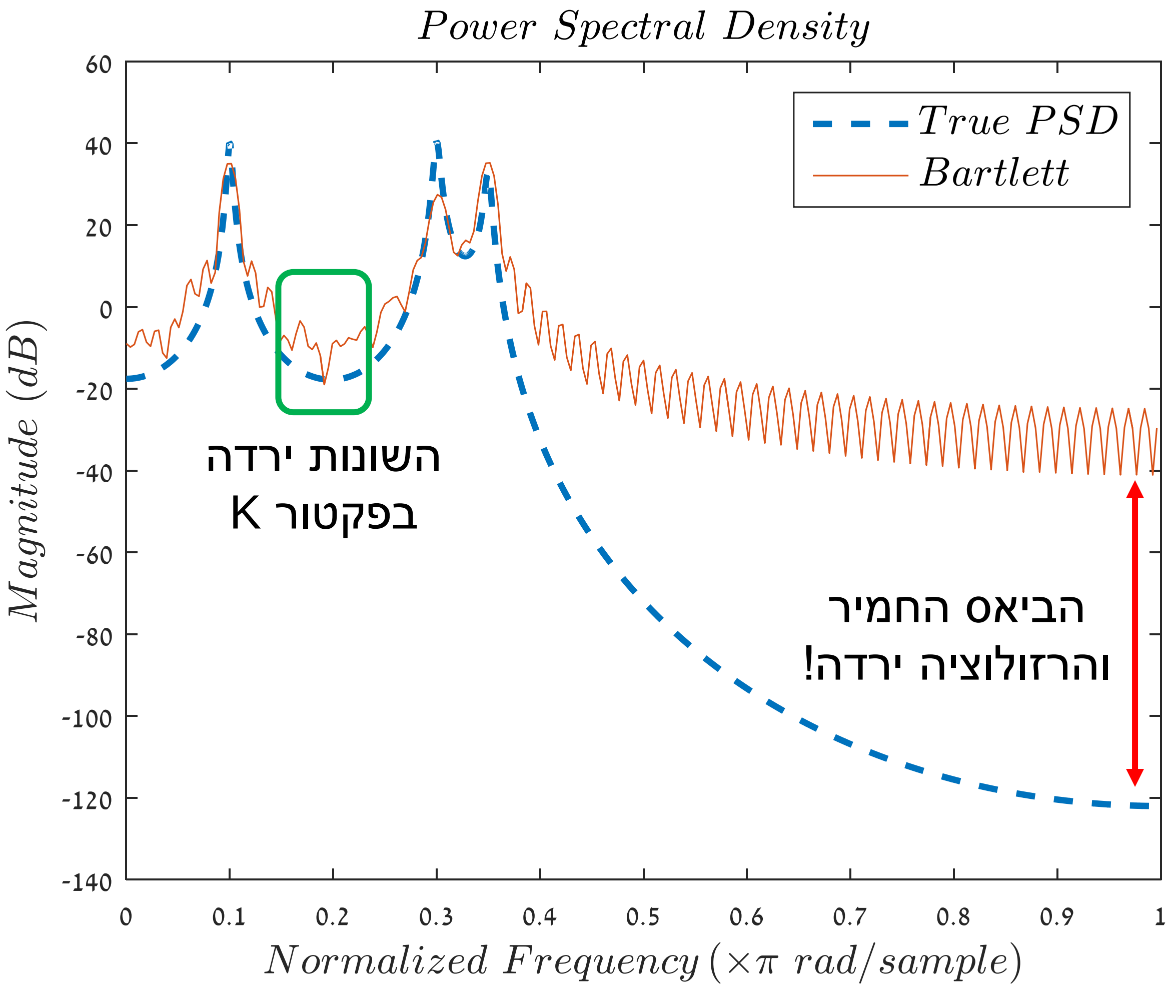
$$E\left[\hat{S}_{xx}[k]\right]=E\left[\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left\{\frac{1}{L}\left|X_i[k]\right|^2\right\}\right]=E\left[\frac{1}{L}\left|D_L[k]*X[k]\right|^2\right]=S_{xx}[k]*\frac{1}{L}\left(\frac{\sin\left(\pi k\right)}{\sin\left(\pi k/L\right)}\right)^2$$

- שונות:
  - אפשר להראות שעבור רעש לבן גאוסי עם שונות σ_x^2 מקבלים:

$$Var\left(\hat{S}_{xx}[k]\right)=\frac{1}{K}\sigma_x^4\left[1+\left(\frac{\sin\left(2\pi k\right)}{L\sin\left(2\pi k/L\right)}\right)\right]\xrightarrow[L\cdot K\to\infty]{}0$$

משערך
קונסיסטנטי!

שיטת Bartlett – השוואה לרפרנס



$$L = \frac{N}{K} \quad - length\ of\ \ PSD$$

$$\Rightarrow \Delta f' = \frac{1}{L \cdot T_s} =$$

$$= \frac{K}{N \cdot T_s} = \boxed{K \cdot \Delta f}$$

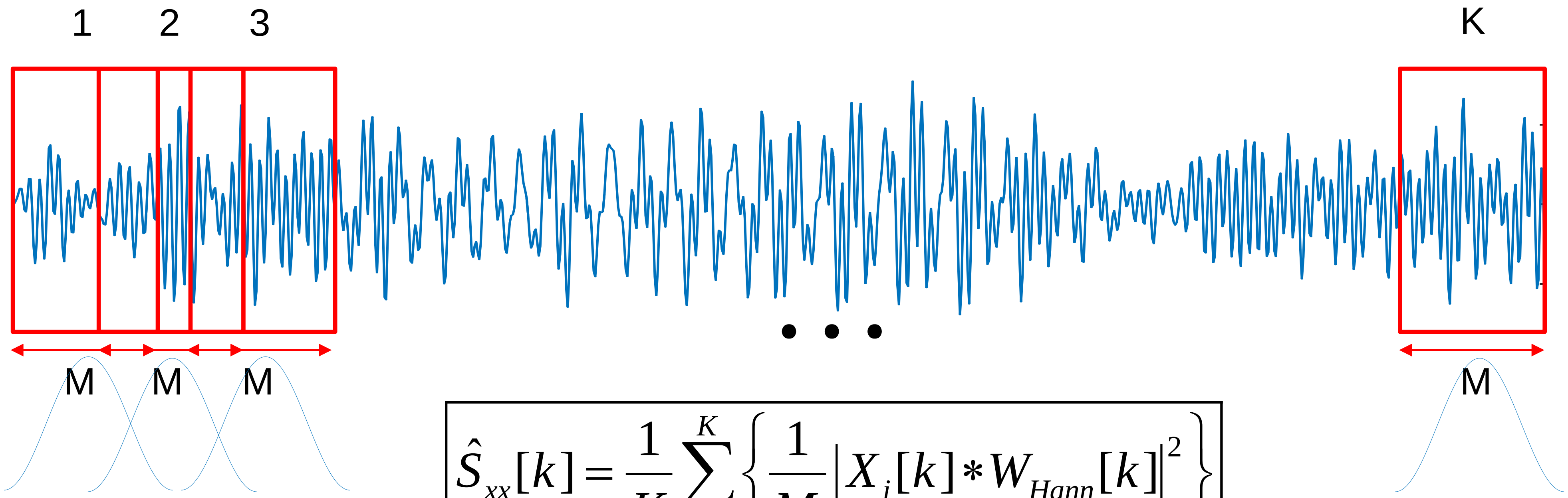
הפסדנו
פקטור K
ברזולוציה

שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

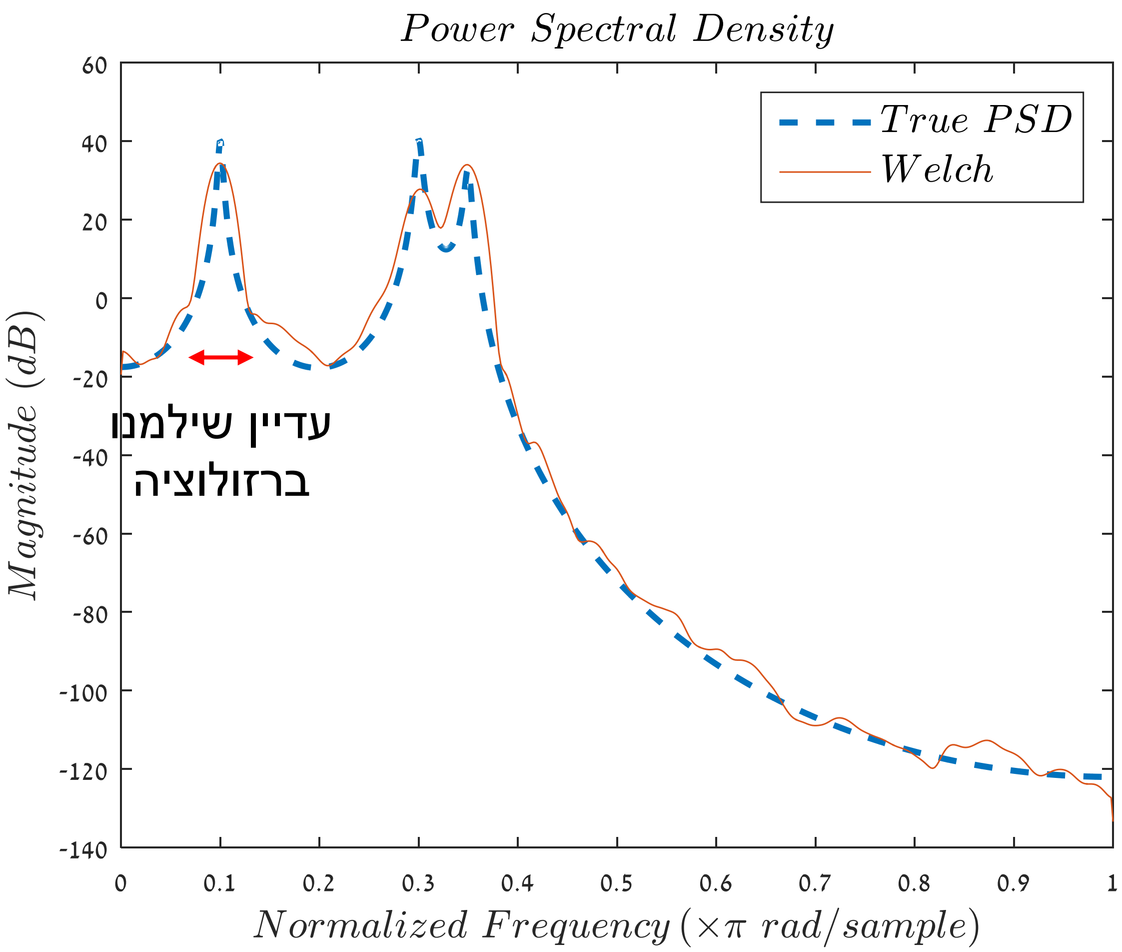
שדרוג Welch

- שתי תוספות עיקריות לשיטת Bartlett:
  - Tapering לכל מקטע כדי לקבל משערך לא מוטה
  - חפיפה בין מקטעים כדי לאפשר רזולוציה גבוהה יותר בתדר



$$\hat{S}_{xx}[k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left\{\frac{1}{M}\left|X_i[k] * W_{Hann}[k]\right|^2\right\}$$

שדרוג Welch – השוואה לרפרנס



לא נוכיח – אבל ניתן להראות שמשערך זה קונסיסטנטי.

תרגיל קצר ממבחן

1. (7 נק') נתון אות EEG באורך 60 שניות הדגום בתדר 60 Hz (כאשר ידוע כי התדר הגבוה ביותר בו הינו 30Hz). נחשב את הצפיפות הספקטרלית ע"י התמרת פורייה של האוטוקורלציה. מהי הרזולוציה המקסימלית שניתן להשיג בתדר (ללא מיצוע), בהנחה שאורך קטע האוטוקורלציה שחושב הוא 1440 דגימות ?

א. $\boxed{\frac{1}{24}[Hz]}$ ב. $\frac{1}{60}[Hz]$ ג. $\frac{1}{30}[Hz]$ ד. $\frac{1}{1440}[Hz]$ ה. $\frac{1}{288}[Hz]$

המשך תרגיל

2. אם מחשבים את הצפיפות הספקטרלית לפי התמרת פוריה של האות עצמו, מה תהיה הרזולוציה המקסימלית שניתן להשיג ללא מיצוע?

א. $\frac{1}{24}[Hz]$ ב. $\boxed{\frac{1}{60}[Hz]}$ ג. $\frac{1}{30}[Hz]$ ד. $\frac{1}{1440}[Hz]$ ה. $\frac{1}{288}[Hz]$

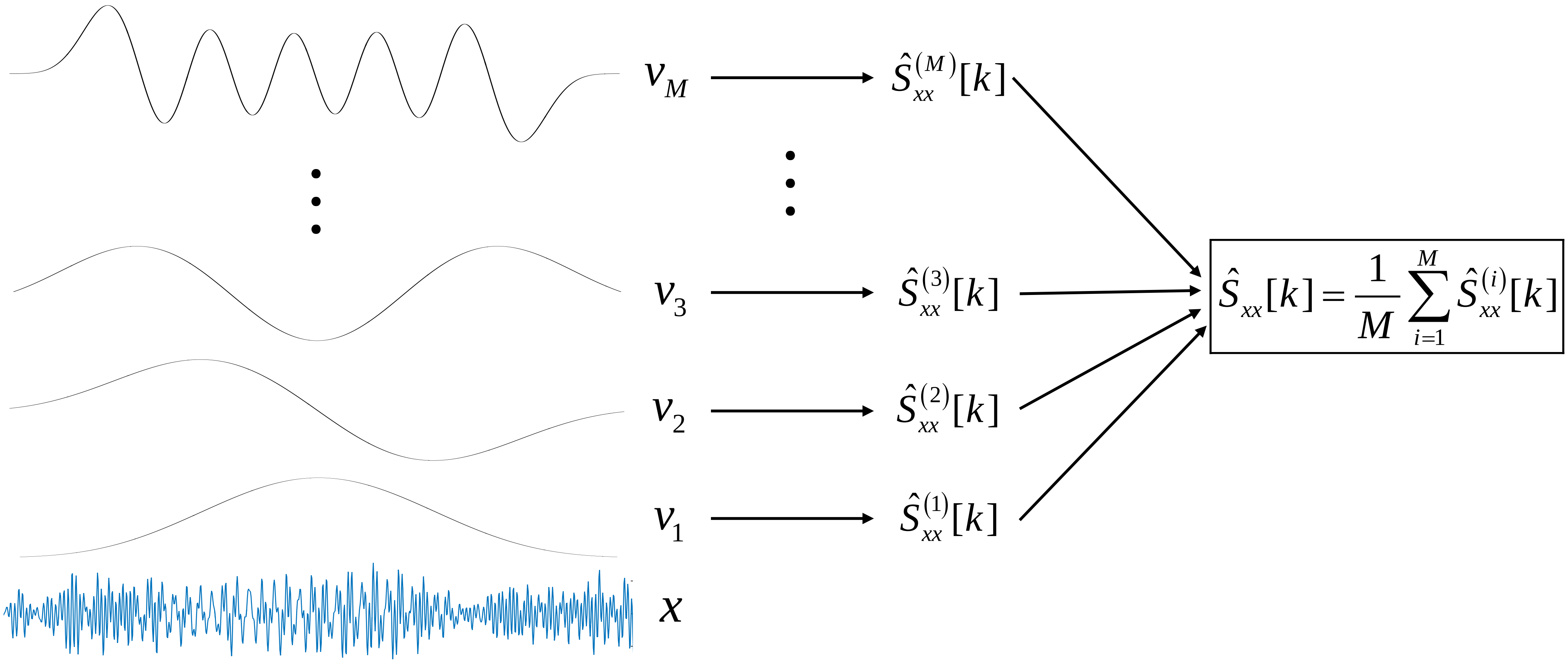
שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

מוטיבציה - Multi tapering

- נרצה למזג את היכולת של שיטות הtapering והמיצוע:
  - מניעת זליגה בתדר.
  - הקטנת השגיאה בספקטרום.
  - לפגוע כמה שפחות ברזולוציה בתדר.
- אם נשתמש בחלונות מונעי זליגה שהם <u>אורתוגונליים</u> זה לזה, נקבל אחרי התמרת FFT מדידות "בלתי תלויות" של הספקטרום עם זליגה מופחתת.
- נמצע מדידות אלו לקבלת ספקטרום פחות מורעש.

Multi-tapering



Multi-tapering – ממוצע משוקלל

- $X_m[k]$ - התמרת פורייה של האות שמוכפל בחלון $v_m = f(N,W,n)$:

$$X_m[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v_m[n]x[n]\exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

- לרוב מחשבים ממוצע משוקלל מכיוון שיש חלונות שנותנים מידע טוב יותר מאחרים:

$$\hat{S}_{XX}[k] = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sum_{m=1}^{M}\mu_m\left|X_m[k]\right|^2}{\sum_{m=1}^{M}\mu_m}$$

μ_m- משקל מתאים לכל חלון.
מחשבים אותו יחד עם החלונות.

לחילופין, ניתן להציב $\mu_m = 1 \quad \forall m$.

שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- Multi-Tapering
  - חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

חלונות DPSS – Multi-tapering

Discrete Prolate Spheroidal Sequences

- ניתן להראות שהחלונות האופטימלים אשר יביאו את השגיאה הריבועית הממוצעת של משערך הספקטרום למינימום נתונים ע"י פתרון בעיית האופטימיזציה הבאה:

$$v_i\left[n\right] = \arg\max_{v[n]} \left[\frac{\int_{-W}^{W} \left|V\left(f\right)\right|^2 df}{\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \left|V\left(f\right)\right|^2 df} \right] \qquad subject\ to: v_i^T \cdot v_j = \delta_{ij}$$

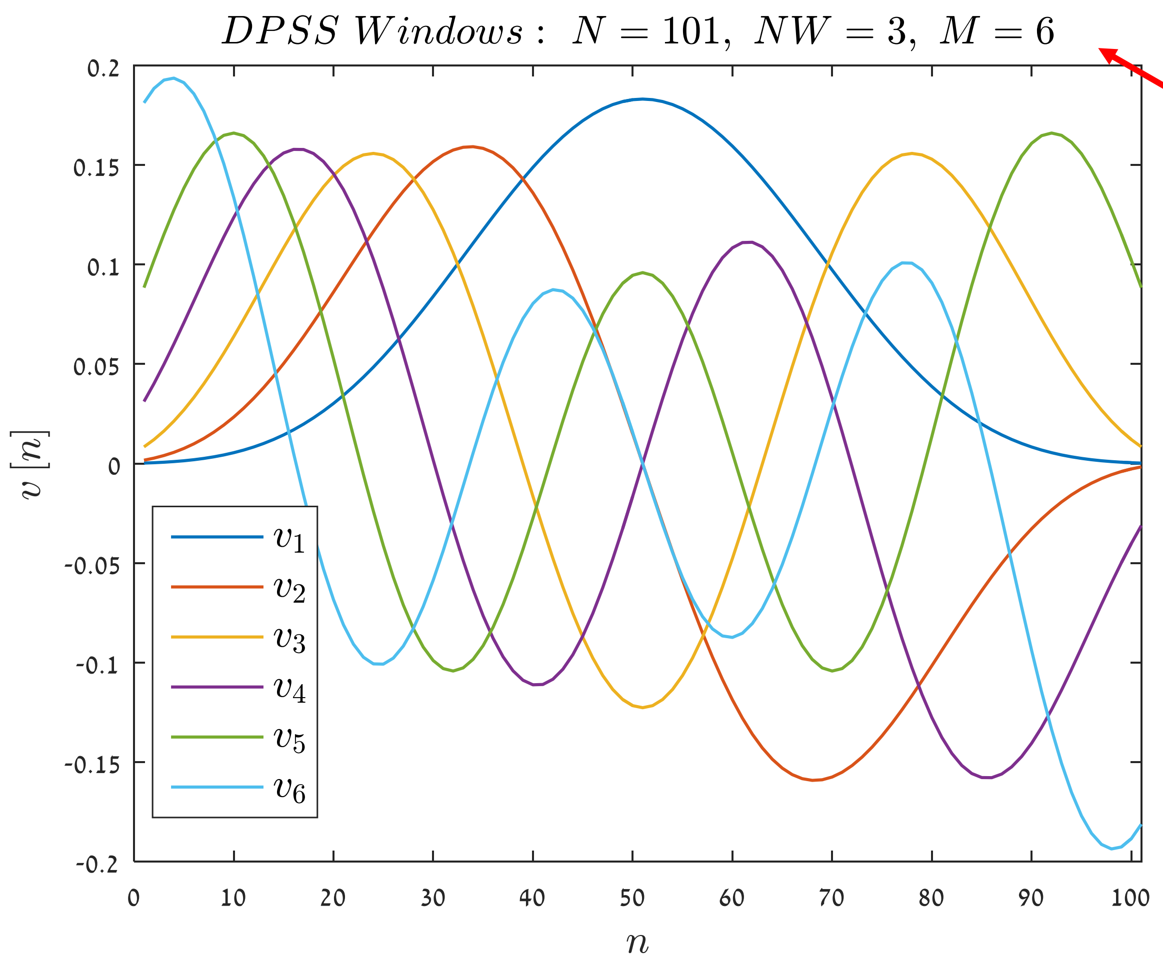
- כאשר W הוא תדר מנורמל: $0 \le W < \frac{1}{2}$.
- $W = \frac{1}{2}$ מתאים לחצי מתדר הדגימה.

חלונות DPSS – Multi-tapering

- כמה הערות:
  - עבור אות באורך N ניתן לקבל לכל היותר M=2NW-1 חלונות מונעי זליגה "איכותיים".
  - החלונות המתקבלים מרוכזים בתדר בתחום [-W,W]. (מזכירים LPF)
  - המכפלה NW נקראת מכפלת הזמן-תדר, ובמובן מסויים מקבילה לעקרון האי-וודאות של הייזנברג.
  - ערכים אופיינים שבד"כ משתמשים בהם: $NW = 2.5 / 3.5 / 4$

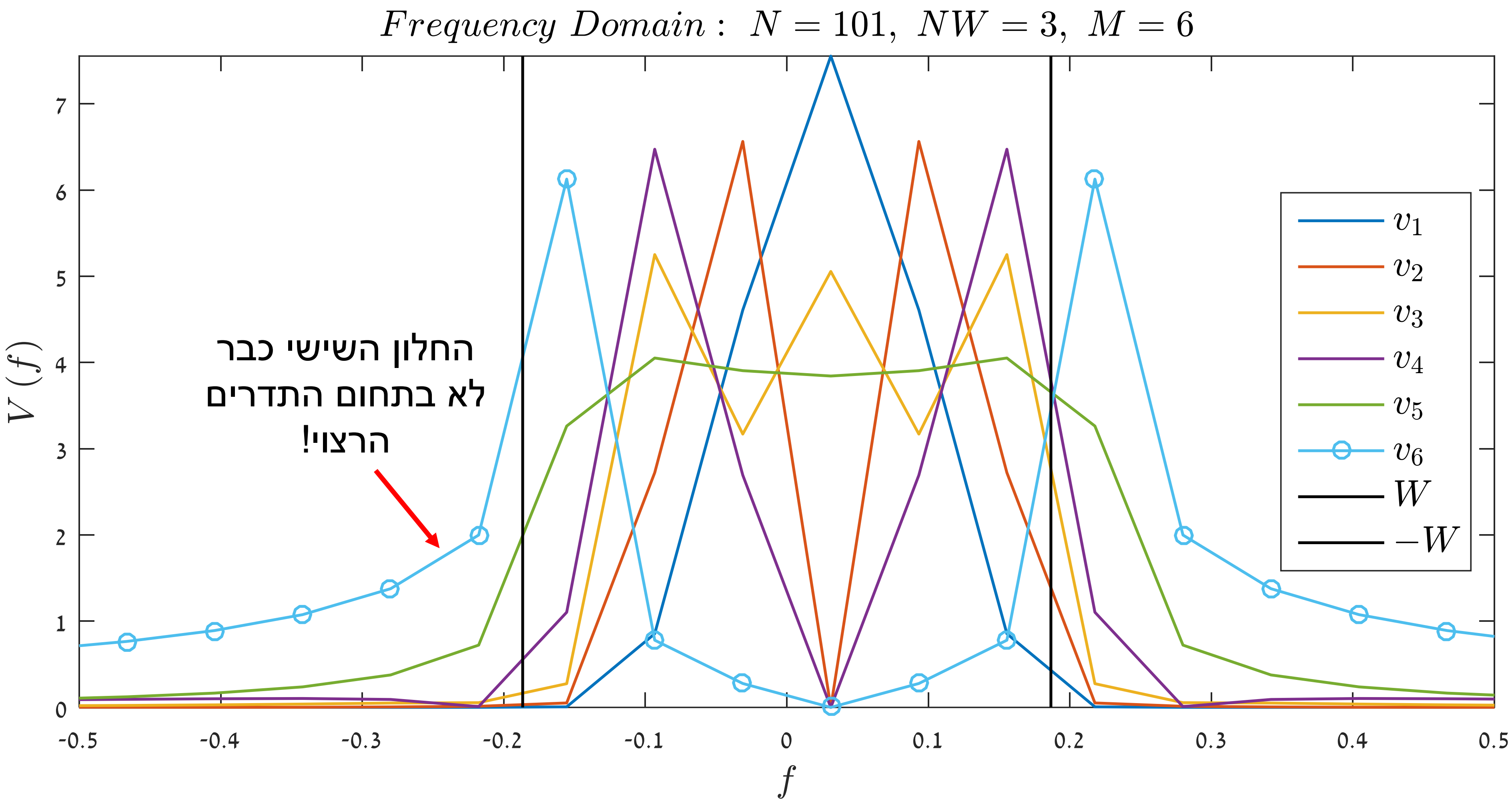
- מימוש במטלב ע"י הפונקציה dpss.

חלונות DPSS – דוגמת מטלב



$$M = 6 \geq 2NW - 1 =$$
$$= 2\cdot 3 - 1 = 5$$

חלונות DPSS – דוגמת מטלב



סדר הפעולות – Multi-tapering

האות המקורי $x[n]$ או המשערך
לאוטו קורלציה שלו $\hat{R}_{XX}$.

הכפלה ב- M חלונות
אורתוגונליים

ביצוע התמרת פורייה לכל אחד
מהאותות הבת"ס המתקבלים

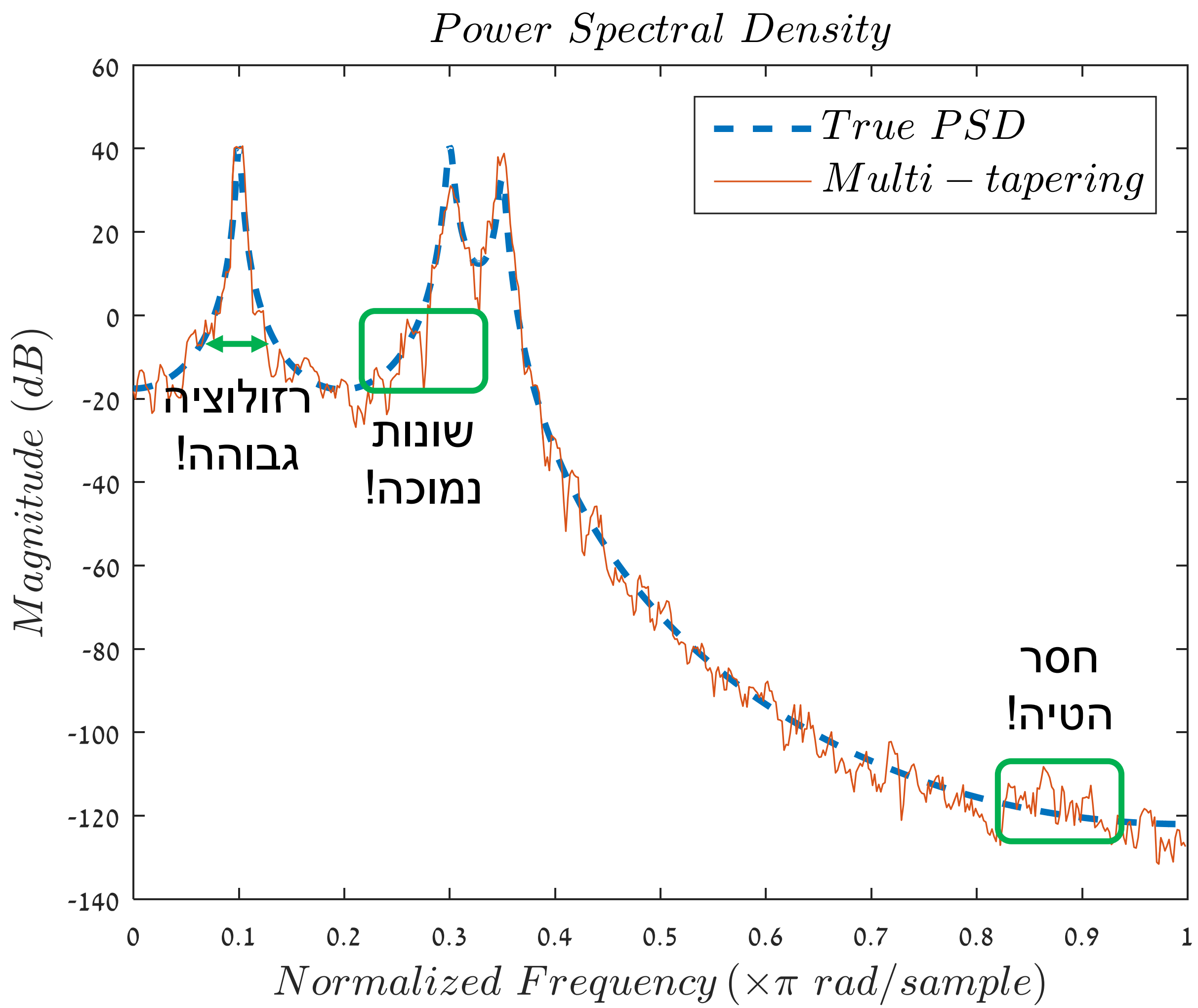
M משערכים בלתי תלויים
לספקטרום $\hat{S}_{XX,m}$.

מיצוע של M המשערכים

משערך לספקטרום, בעל שגיאה
מופחתת $\hat{S}_{XX}$.

דבר ראשון: ייצור M
חלונות מונעי זליגה
במטלב בעזרת
הפונקציה dpss.

השוואה לרפרנס – Multi-tapering



שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- ✓ Multi-Tapering
  - ← חלונות DPSS
- זיהוי סינוס
  - התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

התפלגות $\chi^2_{(n)}$

הגדרה:

- בהינתן n משתנים אקראיים $X_1,\ldots,X_n$ בת"ס ומפולגים גאוסית עם תוחלת 0 ושונות 1.

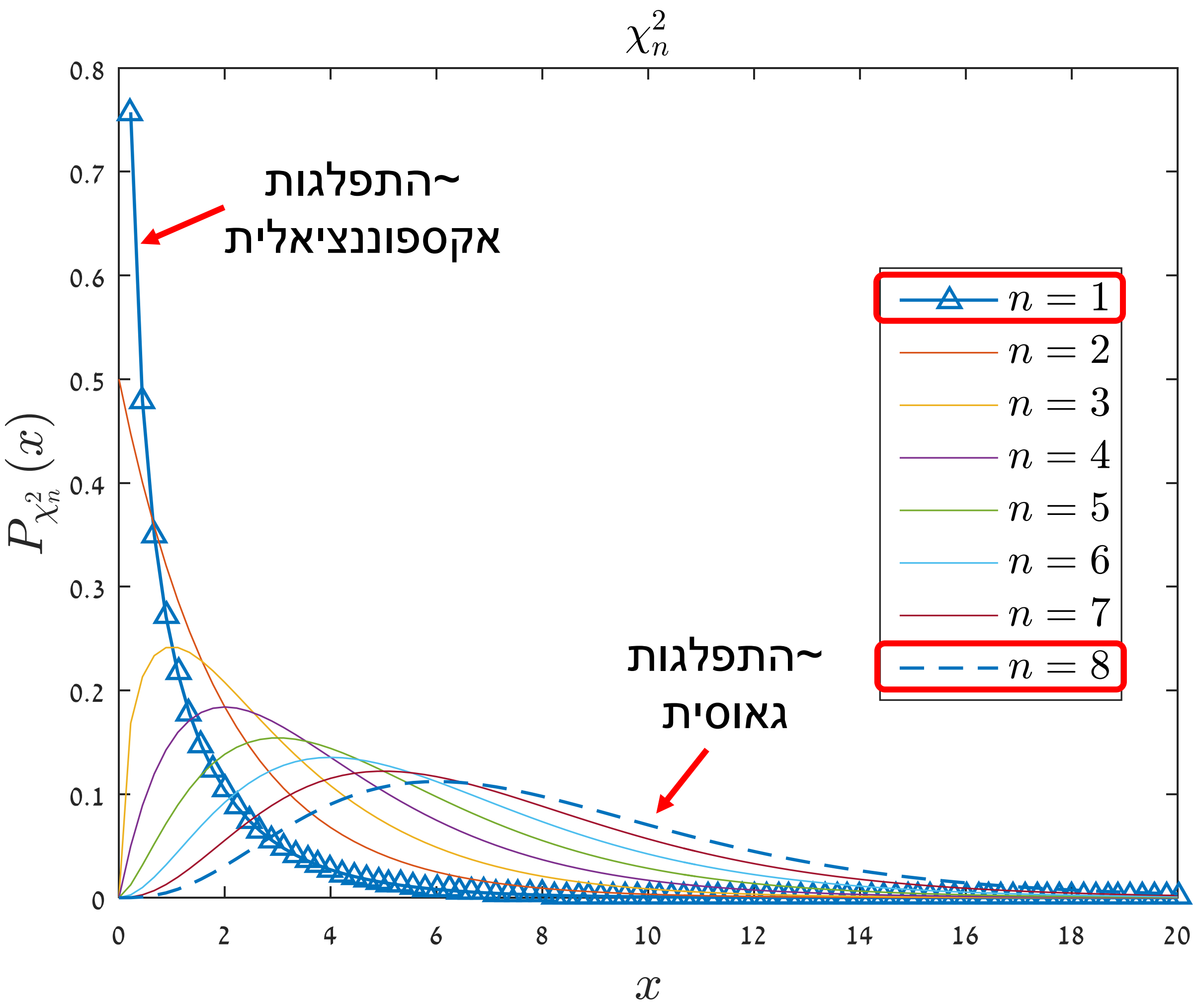
- המ"מ $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ מפולג $\chi^2_{(n)}$ עם n דרגות חופש.
- עבור $X_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ ניתן להגדיר התפלגות חי בריבוע לפי:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

התפלגות $\chi^2_{(n)}$

אם $X_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$

אז $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$



התפלגות $\chi^2_{(n)}$

אם $X_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$

אז $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$

- מה התוחלת של X?

$$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right]=n$$

- והשונות?

$$Var[X]=E\left[(X)^2\right]-n^2=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)^2\right]-n^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} E\left(Z_i^4\right)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E\left(Z_i^2\cdot Z_j^2\right)-n^2=$$

$$E\left[Z^4\right]=3\sigma^4=3\cdot 1^2$$

$$=n\cdot 3\cdot 1^2+n(n-1)1^2-n^2=3n+n^2-n-n^2=2n$$

התפלגות F

- הגדרה: נניח נתונים שני מ"מ בלתי תלויים, מפולגים חי-בריבוע עם d1 ו- d2 דרגות חופש:

$$U_2 \sim \chi^2_{(d_2)} \qquad U_1 \sim \chi^2_{(d_1)}$$

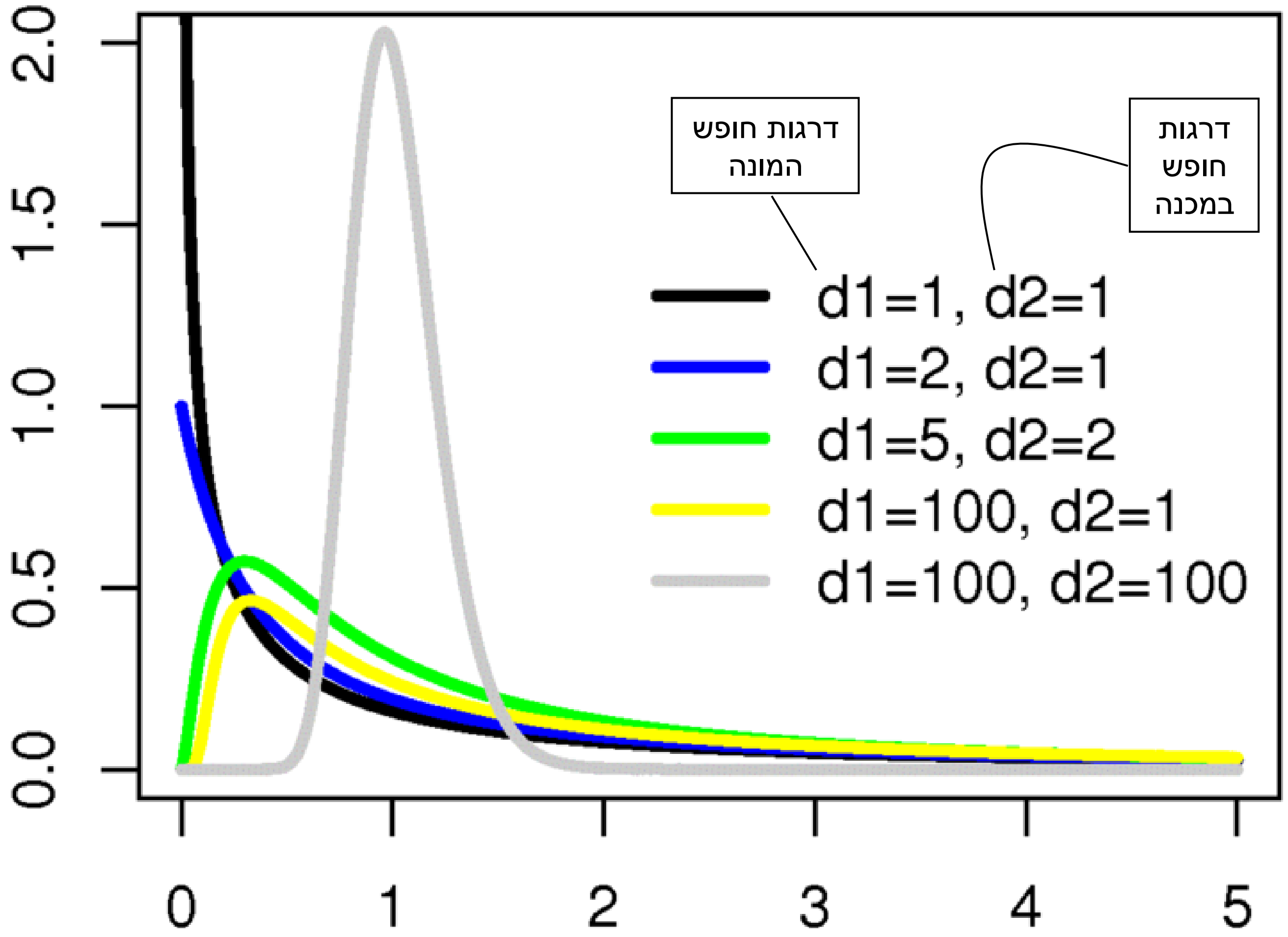
- המ"מ Y שמוגדר ע"י המנה שלהם מפולג F, עם דרגות חופש (d1,d2):

$$\boxed{Y = \frac{U_1 / d_1}{U_2 / d_2} \sim F_{(d_1, d_2)}}$$

- איך הפילוג הזה נראה כפונקציה של דרגות החופש?

התפלגות F

$$f_F(y)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{k}{m}\right)^{k/2}\frac{y^{k/2-1}}{\left(1+\frac{ky}{m}\right)^{\frac{k+m}{2}}}\qquad ,y>0$$



שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- • שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- ✓ Multi-Tapering
  - ← חלונות DPSS
- • זיהוי סינוס
  - ← התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - – שערוך ובדיקת מובהקות
- • ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - – רווח סמך
  - – Periodogram ו-Bartlett
  - – השגיאה הסטנדרטית

זיהוי סינוס ע"י Multi tapering

- נניח שמחפשים רכיב סינוסואידלי <u>שתדירותו ידועה</u> f_0 .
- נניח גם שבתחום צר $\left[f_0-W, f_0+W\right]$ אין שום דבר חוץ מרעש לבן. בתדרים קרובים יש מידע חשוב.
- נבחן שתי השערות:

"אין סינוס"

$$H_0: \quad x[n]=\boxed{e[n]}$$

רעש לבן

"יש סינוס"

$$H_1: \quad x[n]=\boxed{C_0}\boxed{e^{j2\pi f_0 n}}+e[n]$$

הרכיב הסינוסואידלי

$\boxed{C_0=A_0e^{j\phi_0}}$ - אמפליטודה ופאזה שרוצים לשערך.

זיהוי סינוס – תחת השערה H1

- התמרת פורייה של אות מוכפל בחלון: $X_m[k]=\sum_{n=0}^{N-1} v_m[n]x[n]\exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right)$
- נניח ש- $x[n]$ מכיל רכיב סינוסואידלי (H_1): $X_m[k]=C_0V_m\left[k-\frac{f_0\cdot N}{f_s}\right]+E_m[k]$
- ספציפית ב- $k_{f_0}=\frac{f_0\cdot N}{f_s}$: $X_m\left[k_{f_0}\right]=C_0V_m[0]+E_m\left[k_{f_0}\right]$

זיהוי סינוס – חישוב אמפליטודה ופאזה

- קיבלנו M משוואות ליניאריות:

$$\underline{X} = \underline{V} \cdot C_0$$

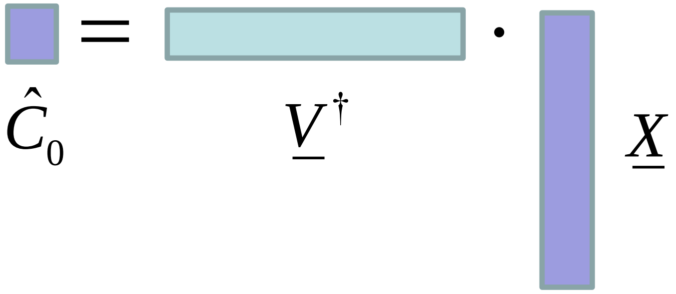
$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1\left[k_{f_0}\right] \\ \vdots \\ X_M\left[k_{f_0}\right] \end{bmatrix} \qquad \underline{V} = \begin{bmatrix} V_1[0] \\ \vdots \\ V_M[0] \end{bmatrix}$$

- איך נשערך את C_0? **שערוך LS!**

$$\underline{X} = \underline{V} \cdot C_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{C}_0 = \underbrace{\left(\underline{V}^T \underline{V}\right)^{-1} \underline{V}^T}_{V^\dagger} \underline{X}$$

Over-determined system

Pseudo inverse



אחלה.. איך נבדוק את עצמנו סטטיסטית?

F-test

- נתעניין בסטטיסטי הבא:

$$F\left(f_0\right)=\left(M-1\right)\frac{\left\|\hat{C}_0\underline{V}\right\|^2}{\left\|\underline{E}\right\|^2}=\frac{\left(M-1\right)\left|\hat{C}_0\right|^2\sum_{m=1}^{M}\left|V_m[0]\right|^2}{\sum_{m=1}^{M}\left|X_m\left[k_{f_0}\right]-\hat{C}_0\cdot V_m[0]\right|^2}$$

- לא נוכיח זאת, אבל ניתן להראות שהסטטיסטי מתפלג F:

$$F\left(f_0\right)\propto F_{2,2M-2} \longrightarrow$$

התפלגות F מסדר 2,2M-2

- נדחה את השערת האפס, אם:

- מקובל לקחת רמת מובהקות: $\alpha=\dfrac{1}{N}$

$$\boxed{F\left(f_0\right)>\frac{b\left(1-\alpha^{\frac{2}{b}}\right)}{2\alpha^{\frac{2}{b}}},\quad b=2M-2}$$

נוסחה סגורה לשברון

הערה לגבי רכיב סינוסואידלי ממשי

- כאשר משערכים הפרעה שהיא קוסינוס (או סינוס) ממשי מקבלים:

$$A_0\cos\left(2\pi f_0 n+\phi\right)=\frac{A_0}{2}e^{j2\pi f_0 n+\phi}+\frac{A_0}{2}e^{-\left(j2\pi f_0 n+\phi\right)}$$

יש להתחשב בפקטור $\frac{1}{2}$ הזה

- לחילופין, ניתן לשערך שתי הפרעות במקום אחת, ולהחסיר את שתיהן. ההשערה החלופית החדשה תהיה:

$$H_1:\quad x\left[n\right]=\boxed{C_0^l e^{-j2\pi f_0 n}}+\boxed{C_0^r e^{j2\pi f_0 n}}+e\left[n\right]$$

"הפרעה שמאלית"

"הפרעה ימנית"

- איך ישתנה סטטיסטי המבחן?

F-test – רכיב סינוסואידלי ממשי

- הסטטיסטי כעת יהיה נתון ע"י:

$$F\left(f_0\right)=\left(M-1\right)\frac{\left\|\hat{C}_0\underline{V}\right\|^2}{\left\|\underline{E}\right\|^2}=\frac{\left(M-1\right)\left(\left|\hat{C}_0^r\right|+\left|\hat{C}_0^l\right|\right)^2\sum_{m=1}^{M}\left|V_m[0]\right|^2}{\sum_{m=1}^{M}\left|X_m\left[k_{f_0}\right]+X_m\left[k_{-f_0}\right]-\hat{C}_0^r\cdot V_m[0]-\hat{C}_0^l\cdot V_m[0]\right|^2}$$

- דחיית השערת האפס עדיין תהיה נתונה ע"י כלל ההחלטה שראינו קודם:

$$F\left(f_0\right)>\frac{b\left(1-\alpha^{\frac{2}{b}}\right)}{2\alpha^{\frac{2}{b}}},\quad b=2M-2$$

זיהוי סינוס – דוגמה

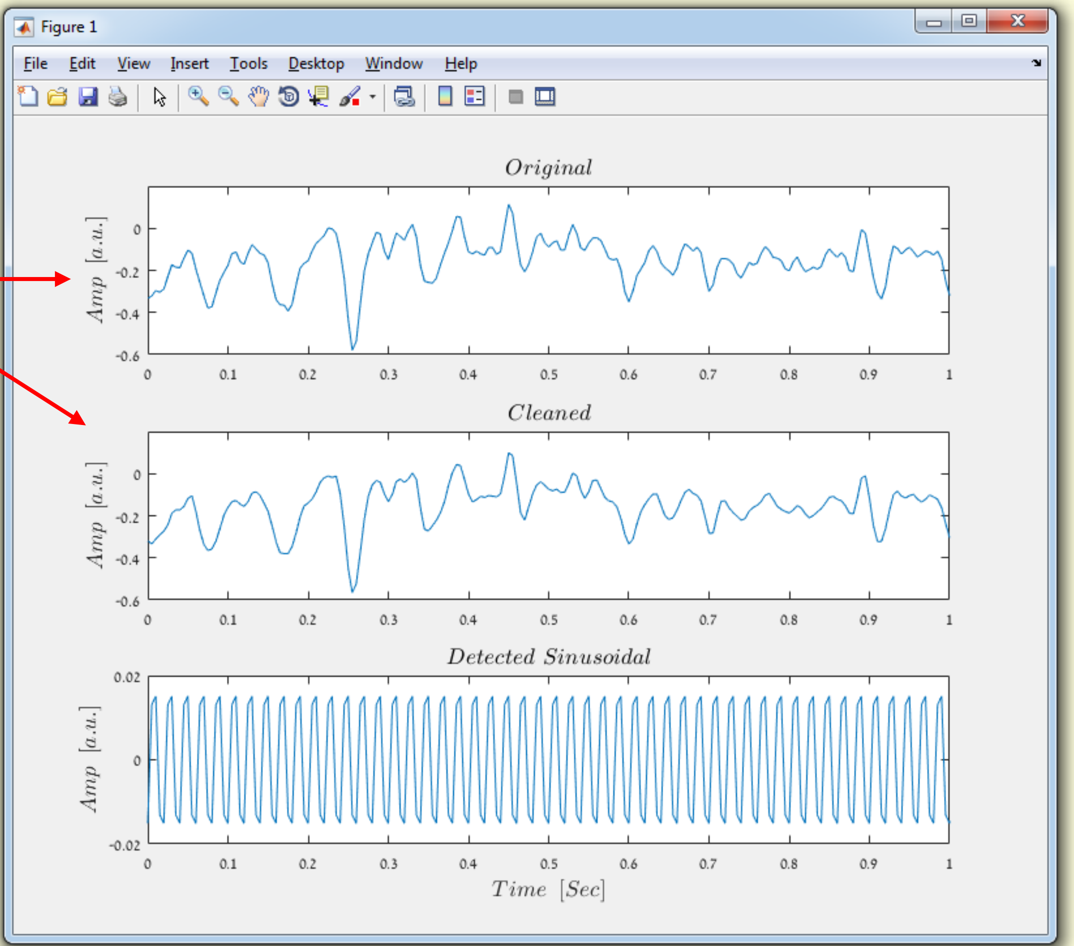
```
%% Sinusoidal Example for Tutorial

% start with a clean slate
close all;clearvars;clc;

% load the data and create time and frequency axes
data = load('eeg.mat');
eeg = data.EEG;
N = length(eeg); % signal length in sampels
fs = 200; % sampling frequency in Hz
faxis = (0:N-1)./N*fs - fs/2; % frequency axis in Hz
t = (0:N-1)./fs; % time axis in secs

% sinusoidal interference frequency
fsin = 50; % Hz

% dpss windows specification and generation
W = 3/N; % half bandwidth parameter
NW = N*W; % time - half bandiwth parameter
M = 2*NW - 1; % number of windows
windows = dpss(N,NW,M); % generate the DPSS windows

% calculate fft of the windowed signal and the windows
Vf = fftshift(fft(windows,[],1),1); % FFT of the windows
Xf = fftshift(fft(repmat(eeg,1,M).*windows,[],1),1); % FFT of windowed signals

% estimate the right and left constants C0r and C0l
C0r = pinv(Vf(faxis==0,:).')*Xf(faxis==fsin,:).';
C0l = pinv(Vf(faxis==0,:).')*Xf(faxis==-fsin,:).';

% simulate the appropriate complex exponentials and subtract them
simexp = C0r*exp(1j*2*pi*fsin*t') + C0l*exp(1j*2*pi*(-fsin)*t');
eegsub = eeg - simexp;
```

תדר הפרעה נתון

חלונות DPSS

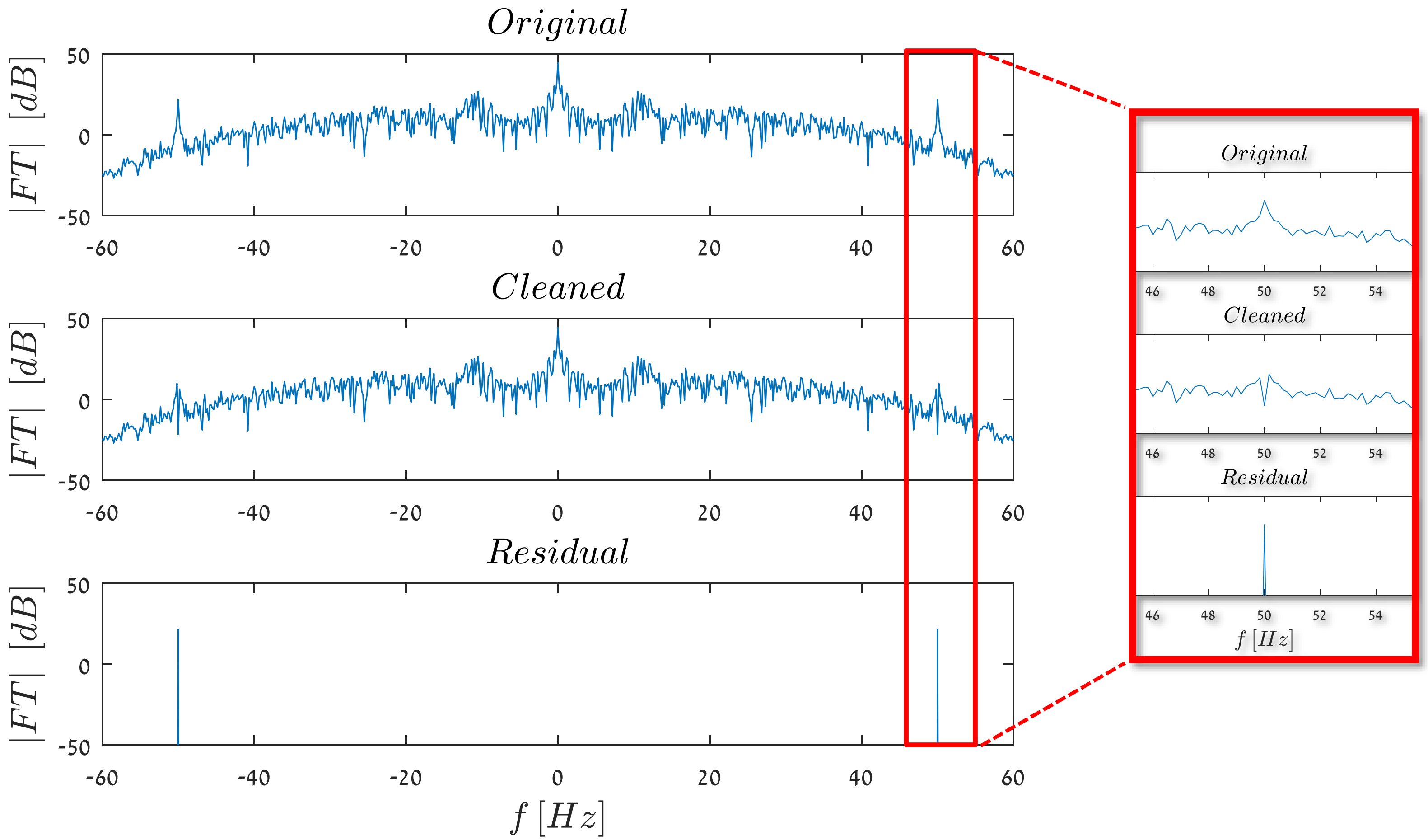
שערוך מקדמים

איך נוודא את התוצאה?



האות הנקי מתקבל ע"י החסרת ההפרעה המסומלצת

זיהוי סינוס - דוגמה



זיהוי סינוס - דוגמה

```matlab
% statistic percentile closed formula from tutorial 8
Ff0 = (M-1)*((abs(C0r)+abs(C0l))^2)*sum(abs(Vf(faxis==0,:)).^2)/sum(abs(Xf(faxis==-fsin,:) ...
    + Xf(faxis==fsin,:) - C0r*Vf(faxis==0,:) - C0l*Vf(faxis==0,:)).^2);
b = 2*M - 2; % F distribution second degrees of freedom
alpha = 1/N; % Confidence level

% check if the H0 rejection criteria is satisfied
cond = b*(1-alpha^(2/b))/(2*alpha^(2/b)); % rejection condition
if Ff0 > cond
    rejectH0 = 1;
else
    rejectH0 = 0;
end

% print result
if rejectH0
    fprintf('Null Hypothesis Rejected, and Sinus Detected!\n');
else
    fprintf('Null Hypothesis Accepted: Not a Sinus..\n');
end
```

סטטיסטי המבחן

רמת המובהקות

סף דחיית השערת האפס

עבור הנתונים של הבעיה מקבלים:

$$F\left(f_0\right) = 63.50 > \frac{b\left(1-\alpha^{\frac{2}{b}}\right)}{2\alpha^{\frac{2}{b}}} = 19.54$$

שאלה: אז דוחים או לא דוחים?

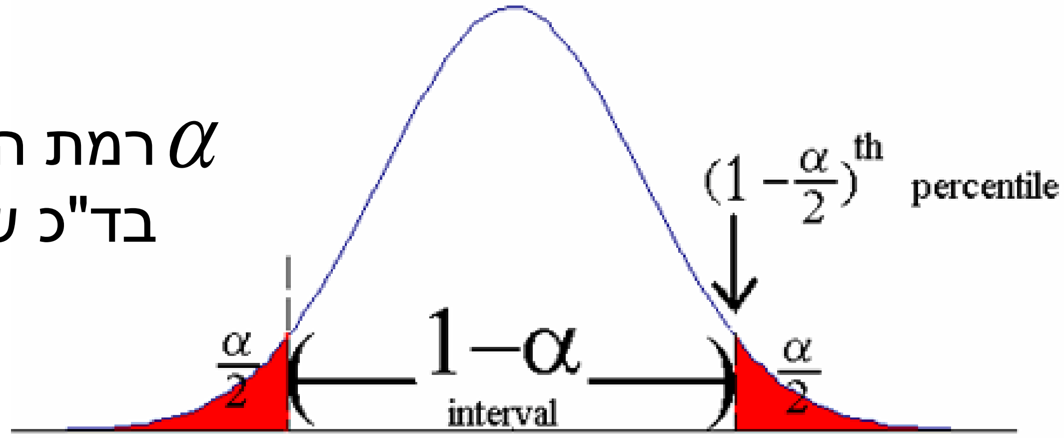
שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- ✓ Multi-Tapering
  - ← חלונות DPSS
- ✓ זיהוי סינוס
  - ← התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - ← שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

Confidence Interval – רווח סמך

- רווח סמך – טווח הערכים שכולל במידת ודאות "גדולה" את ערכו האמיתי של המ"א שאנחנו משערכים.

α רמת הביטחון.
בד"כ שווה ל-0.05/0.01.



- בדרך כלל משמש לבדוק מה רמת הביטחון שלנו בתוצאת המשערך או לבנות תחום ביטחון למ"א\פרמטר שאנו מעוניינים בו.

Confidence Interval – רווח סמך

- הגדרה:

עבור מ"מ X כלשהו, השברון X_α הינו הערך המקיים:

$$P\left(X < X_\alpha\right) = \alpha$$

השברונים $X_{\frac{\alpha}{2}}$, ו- $X_{1-\frac{\alpha}{2}}$ מקיימים:

$$P\left(X_{\frac{\alpha}{2}} < X < X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$\left[X_{\frac{\alpha}{2}}, X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ כלומר תחום הערכים
מכיל את המ"מ X
בהסתברות $1-\alpha$

ספקטרום חד-צדדי – Periodogram

נזכור שהאוטו-קורלציה היא סימטרית וממשית בד"כ ונגדיר:

- ספקטרום חד צדדי: $$G_{xx}\left(f\right)=2\cdot\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{T}\left|X_k\left(f,T\right)\right|^2\right]$$
- עבור זמן בדיד מקבלים משערך: $$\boxed{\hat{G}_{xx}[k]=\frac{2}{N}\left|X[k]\right|^2}$$
- הרזולוציה בתדר היא: $$\Delta f=\frac{1}{N\cdot T_s}=\frac{1}{T_{total}}$$

המקרה הגאוסי – Periodogram

- ניתן לפרק את התמרת פוריה לרכיבים ממשי ומדומה:

$$X(f,T) = X_R(f,T) + i \cdot X_I(f,T)$$

<u>עבור המקרה הגאוסי:</u>

- אם נתייחס לשני הרכיבים כחסרי קורלציה עם תוחלת אפס, אזי אם האות גאוסי גם הם גאוסיים.

$$\left| X(f,T) \right|^2 = X_R^2(f,T) + X_I^2(f,T)$$

- שאלה: איך מתפלג סכום של מ"מ גאוסיים בת"ס בריבוע?

תזכורת: התפלגות $\chi^2_{(n)}$

- עבור מדגם מקרי i.i.d:

$$X_1,\ldots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$$

- לאחר תקנון:

$$\frac{X_1-\mu}{\sigma},\ldots,\frac{X_n-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- פילוג חי-בריבוע:

$$U=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$E\left[U\right]=n$$

$$Var\left(U\right)=2n$$

שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- ✓ Multi-Tapering
  - ← חלונות DPSS
- ✓ זיהוי סינוס
  - ← התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - ← שערוך ובדיקת מובהקות
- ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - ← רווח סמך
  - Periodogram ו-Bartlett
  - השגיאה הסטנדרטית

Periodogram – המקרה הגאוסי
רווח סמך

נניח: $x \sim N\left(0,\sigma_X^2\right) \to X_R, X_I \sim N\left(0,\sigma_X^2\right)$

$$G_{xx}\left(f\right) = 2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\left|X\left(f,T\right)\right|^2\right] =$$
$$= 2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[X_R^2\left(f,T\right)+X_I^2\left(f,T\right)\right] = 2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\sigma_X^2\left(f,T\right)+\sigma_X^2\left(f,T\right)\right] =$$
$$= 4\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sigma_X^2\left(f,T\right)$$

נבחן את היחס הבא:

$$\frac{\hat{G}_{xx}\left(f,T\right)}{G_{xx}\left(f\right)} = \lim_{T\to\infty}\frac{\frac{2}{T}\left|X\left(f,T\right)\right|^2}{\frac{4}{T}\sigma_X^2\left(f,T\right)} = \frac{1}{2}\frac{X_R^2\left(f,T\right)+X_I^2\left(f,T\right)}{\sigma_X^2\left(f\right)} \sim \frac{\chi_{(2)}^2}{2}$$

$$\frac{\hat{G}_{xx}(f,T)}{G_{xx}(f)} \sim \frac{\chi^2_{(2)}}{2}$$

Periodogram – המקרה הגאוסי
רווח סמך

- נזכור שעבור מ"מ X המתפלג $\chi^2_{(2)}$ השברונים $\chi^2_{(2),1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{(2),\frac{\alpha}{2}}$ מקיימים:

$$P\left(\chi^2_{(2),\frac{\alpha}{2}} < X < \chi^2_{(2),1-\frac{\alpha}{2}}\right) = p = 1-\alpha$$

- עבור רמת מובהקות α כלשהי:

$$P\left(\frac{1}{2}\chi^2_{(2),\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{G}_{xx}(f)}{G_{xx}(f)} < \frac{1}{2}\chi^2_{(2),1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\longrightarrow P\left(\frac{2\hat{G}_{xx}(f)}{\chi^2_{(2),1-\frac{\alpha}{2}}} \le G_{xx}(f) \le \frac{2\hat{G}_{xx}(f)}{\chi^2_{(2),\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow$$

כלומר, ההסתברות ש- $G_{xx}(f)$
נמצא בטווח ערכים זה היא $p = 1-\alpha$
טווח הערכים נקרא רווח הסמך

Periodogram – המקרה הגאוסי
רווח סמך

- מתכון:
  - – מוצאים משערך לספקטרום: $\hat{G}_{xx}\left(f\right)$.
  - – בוחרים רמת מובהקות: α.
  - – מוצאים שברונים מתאימים: $\chi^2_{(2),\frac{\alpha}{2}}$ ו- $\chi^2_{(2),1-\frac{\alpha}{2}}$.
    ניתן לעשות זאת במטלב ע"י chi2inv(p,n).
    $\frac{\alpha}{2}/1-\frac{\alpha}{2}$ $\quad$ 2
  - – מוצאים רווח סמך ל- $G_{xx}\left(f\right)$ על בסיס $\chi^2_{(2),\frac{\alpha}{2}}$, $\chi^2_{(2),1-\frac{\alpha}{2}}$ ו- $\hat{G}_{xx}\left(f\right)$.

מה יקרה כשנמצע?

Bartlett – המקרה הגאוסי
רווח סמך

- מה יקרה ברגע שהמשערך ספקטרום שלנו הוא ממוצע של K משערכי Periodogram?

$$\boxed{\hat{S}_{xx}[k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left\{\frac{1}{L}\left|X_i[k]\right|^2\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\left|X_i[k]\right|^2}$$

תחת הנחת הגאוסיות
קיבלנו לפני 3 שקפים:

$$G_{xx}\left(f\right) = 4\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sigma_X^2\left(f,T\right)$$

$$\frac{\hat{G}_{xx}\left(f,L\right)}{G_{xx}\left(f\right)} = \lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\frac{2}{L}\cdot\left|X_i\left(f,L\right)\right|^2}{\frac{4}{L}\sigma_X^2\left(f,L\right)} = \frac{1}{2K}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{K}X_{i,R}^2\left(f,L\right)+X_{i,I}^2\left(f,L\right)}{\sigma_X^2\left(f,L\right)} \sim \frac{\chi_{(2K)}^2}{2K}$$

$$\frac{\hat{G}_{xx}(f,L)}{G_{xx}(f)} \sim \frac{\chi^2_{(2K)}}{2K}$$

המקרה הגאוסי – Bartlett
רווח סמך

- נזכור שעבור מ"מ X המתפלג $\chi^2_{(2n)}$ השברונים $\chi^2_{(2n),1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{(2n),\frac{\alpha}{2}}$ מקיימים:

$$P\left(\chi^2_{(2n),\frac{\alpha}{2}} < X < \chi^2_{(2n),1-\frac{\alpha}{2}}\right) = p = 1-\alpha$$

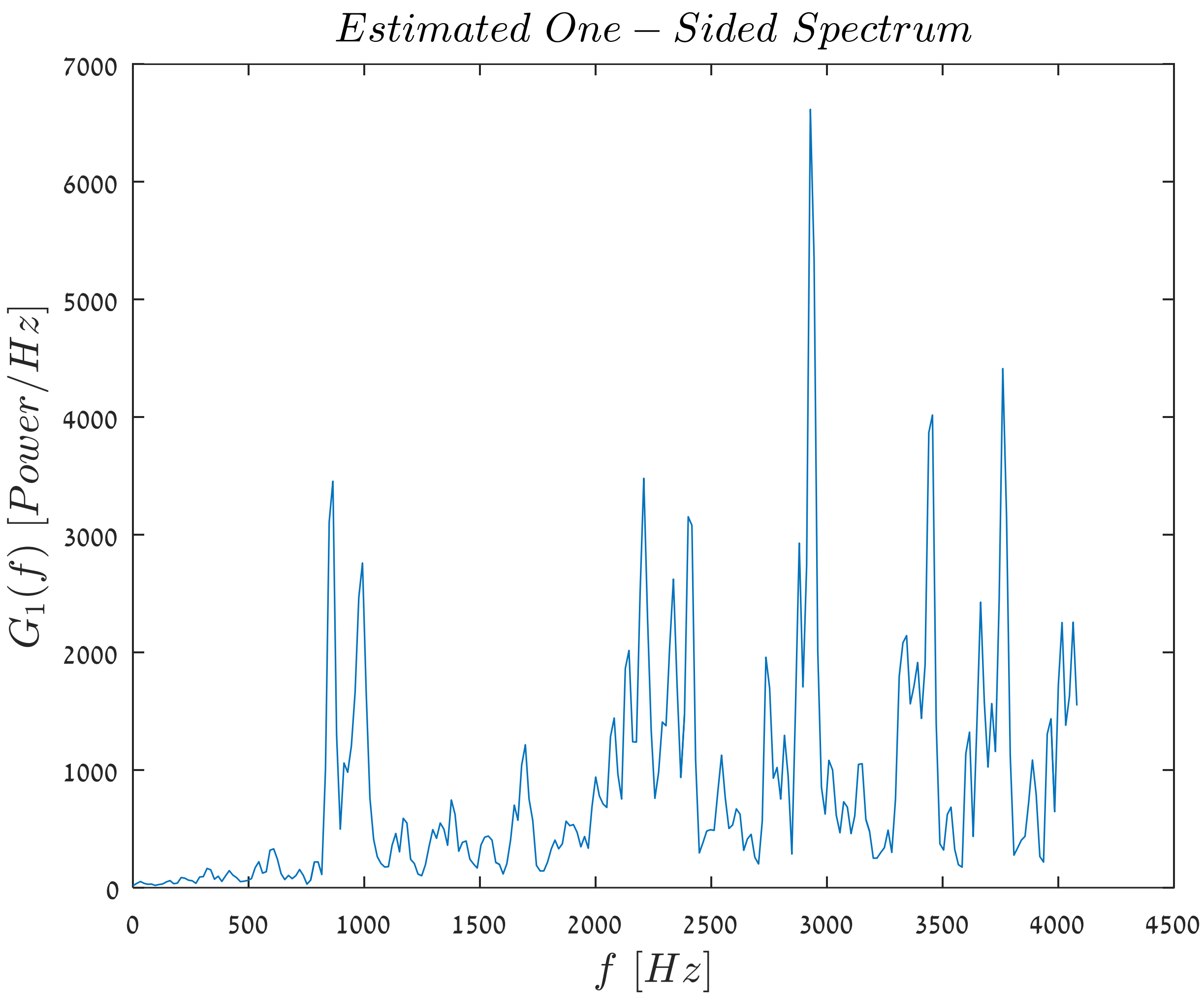
- עבור רמת מובהקות α כלשהי:

$$P\left(\frac{1}{2K}\chi^2_{(2K),\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{G}_{xx}(f)}{G_{xx}(f)} < \frac{1}{2K}\chi^2_{(2K),1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\longrightarrow P\left(\frac{2K\hat{G}_{xx}(f)}{\chi^2_{(2K),1-\frac{\alpha}{2}}} \le G_{xx}(f) \le \frac{2K\hat{G}_{xx}(f)}{\chi^2_{(2K),\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow$$

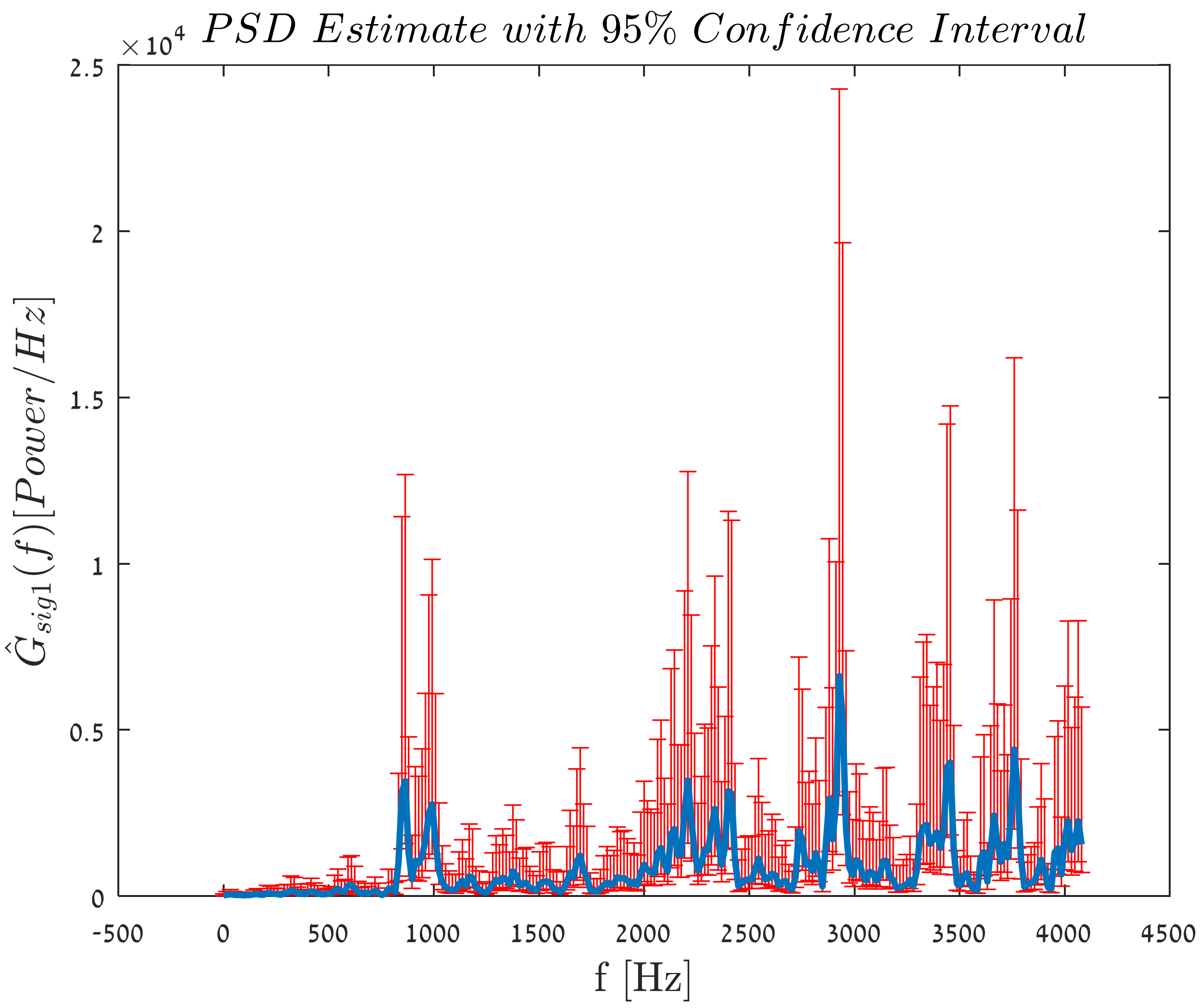
כלומר, ההסתברות ש- $G_{xx}(f)$
נמצא בטווח ערכים זה היא $p = 1-\alpha$
טווח הערכים נקרא רווח הסמך

רווח סמך - דוגמה



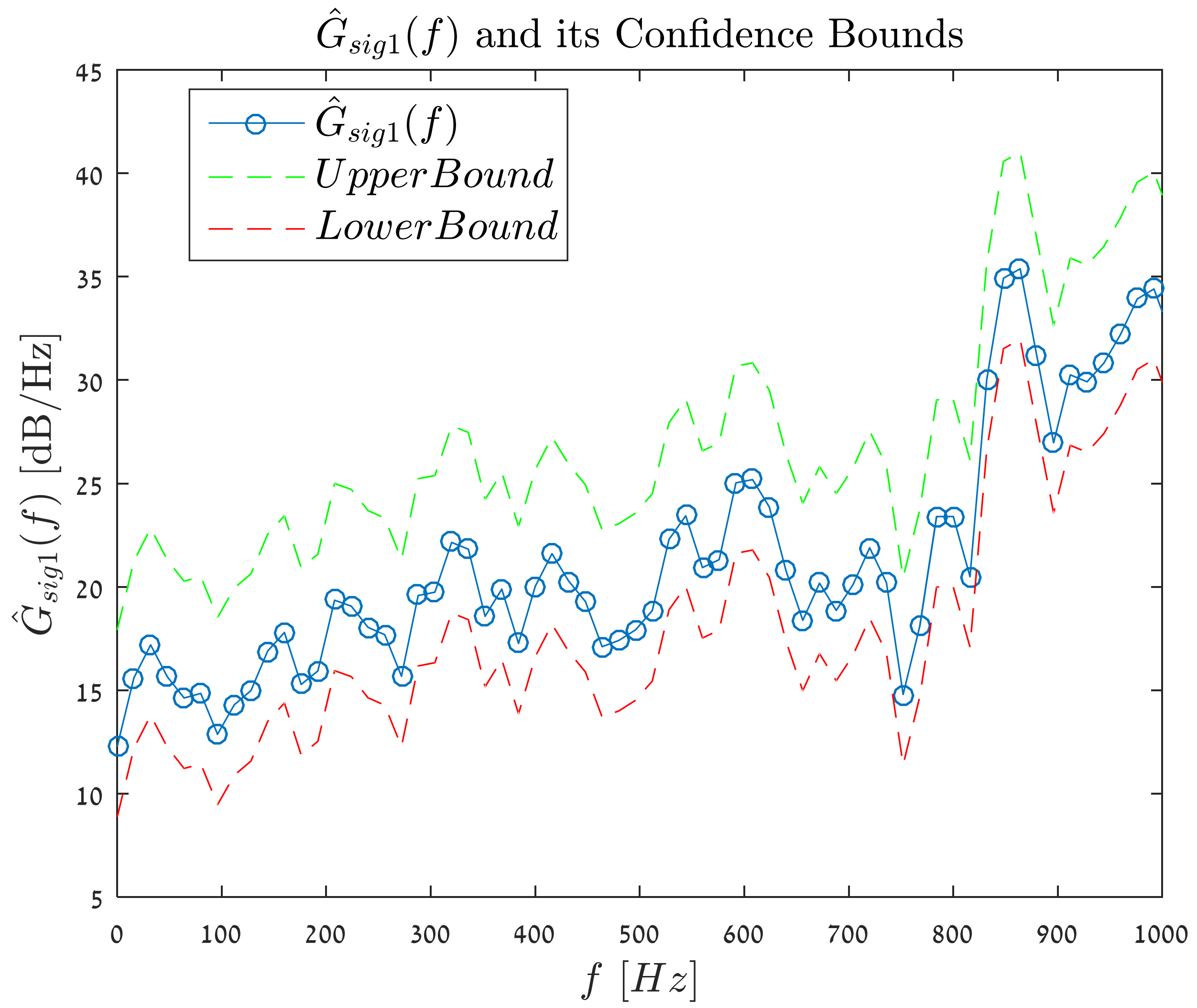
נניח נתון משערך Bartlett הבא:

רווח סמך - דוגמה



הצגת רווח סמך
של 95% עם
:errorbars

רווח סמך - דוגמה



הצגת רווח סמך
של 95% עם
גבולות תוחמים
ב-dB:

שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- • שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- ✓ Multi-Tapering
  - ← חלונות DPSS
- ✓ זיהוי סינוס
  - ← התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - ← שערוך ובדיקת מובהקות
- • ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - ← רווח סמך
  - ← Periodogram ו-Bartlett
  - – השגיאה הסטנדרטית

$$\frac{\hat{G}_{xx}(f,T)}{G_{xx}(f)} \sim \frac{\chi^2_{(2)}}{2}$$

"השגיאה הסטנדרטית"

- נגדיר (CV) coefficient of variation:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_X}{E[X]}$$

- עבור התפלגות $\chi^2_{(n)}$:

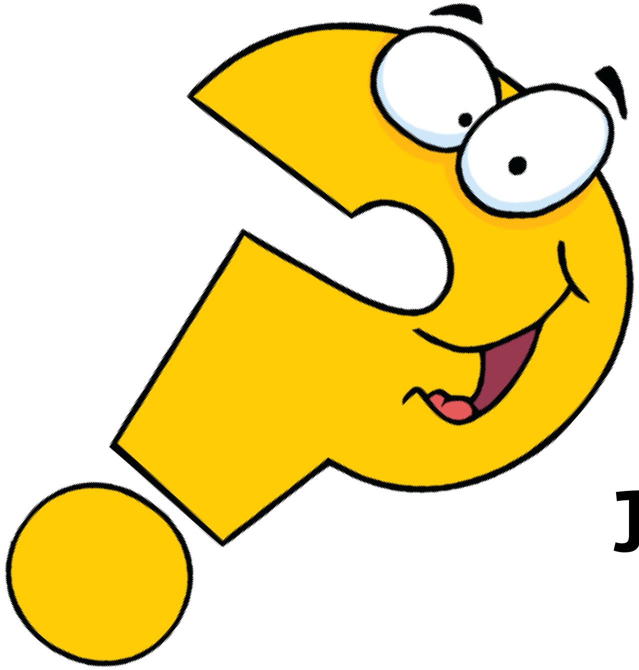
$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_X}{E(X)} = \frac{\sqrt{2n}}{n} = \sqrt{\frac{2}{n}}$$

- דוגמה: עבור שערוך Periodogram של $\hat{G}_{xx}(f)$:

$$\varepsilon_r = \frac{\sqrt{\operatorname{var}\left(\hat{G}_{xx}(f)\right)}}{E\left(\hat{G}_{xx}(f)\right)} = \frac{\sqrt{\operatorname{var}\left(\frac{\hat{G}_{xx}(f)}{G_{xx}(f)}\right)}}{E\left(\frac{\hat{G}_{xx}(f)}{G_{xx}(f)}\right)} = \frac{\sqrt{\operatorname{var}\left(\chi^2_{(2)}\right)}}{E\left(\chi^2_{(2)}\right)} = 1$$

שערוך ספקטרום לא פרמטרי

- ✓ תזכורת + סיגנל רפרנס
- ✓ Periodogram
- ✓ Tapering
- שיטת Bartlett
  - ← שדרוג Welch
- ✓ Multi-Tapering
  - ← חלונות DPSS
- ✓ זיהוי סינוס
  - ← התפלגות חי-בריבוע והתפלגות F
  - ← שערוך ובדיקת מובהקות
- ✓ ניתוח סטטיסטי במקרה הגאוסי
  - ← רווח סמך
  - ← Periodogram ו-Bartlett
  - ← השגיאה הסטנדרטית



שאלות

תרגול 8 – ניתוח אותות לא סטציונרים

מה נלמד?

- סיכום אנליזה סטציונרית
- אנליזה לא סטציונרית
  - סגמנטציה אדפטיבית
  - Spectrogram
  - קורלציה רגעית
  - פונקצית Ambiguity
  - Wigner-Ville Distribution
  - סינון Cross-terms
  - הסיגנל האנליטי

מה נלמד?

- סיכום אנליזה סטציונרית
- אנליזה לא סטציונרית
  - סגמנטציה אדפטיבית
  - Spectrogram
  - קורלציה רגעית
  - פונקצית Ambiguity
  - Wigner-Ville Distribution
  - סינון Cross-terms
  - הסיגנל האנליטי

Background:

Filters, Estimators,
Auto- cross- correlation functions

T1-T3

Stationary Signal Analysis

T5

Simulation of correlated Gaussian processes

- AR
- FIR

LTI & R_{xy}

- h(τ) estimation
- Delay estimation
- Removal of EEG artifacts

T4

LTI & Correlations

- R_{xx}, R_{xy} estimation and FFT for S_{xx}, S_{xy} estimation

AR model

- Regular signals
- Yule-Walker equations

T7

Spectral Analysis:

- Non-parametric
  - Tapering
  - Multi-tapering
    - Sinus detection

T6

- Averaging between trials
  - Uncorrelated noise
  - Correlated noise
  - Spike triggered average
- Bussgang
- S_{xx}, S_{xy} estimation
  - Parametric (AR)

נוותר על כל
הטוב הזה?

Run(s) Test

T1

Non-Stationary

ניתוח של אותות סטציונרים למקוטעין

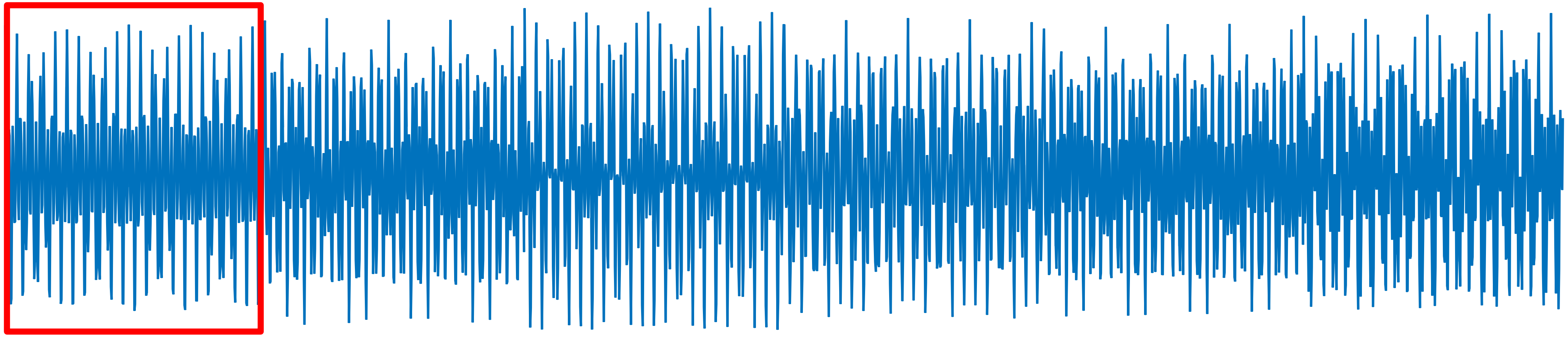
- למדנו שיטות רבות לניתוח אותות סטציונרים.
- כיצד נשתמש בשיטות אלו לניתוח אותות לא סטציונרים?
  - ננסה לחלק את האות למקטעים שבהם הוא סטציונרי בקירוב (למשל ב-EEG ניתן להניח שבמקטעים קצרים יחסית האות הוא סטציונרי).
  - בצורה כזו נוכל להשתמש בשיטות לעיבוד אותות סטציונרים עבור מקטעים קצרים של אותות שאינם סטציונרים.

מה נלמד?

- ✓ סיכום אנליזה סטציונרית
- אנליזה לא סטציונרית
  - סגמנטציה אדפטיבית
  - Spectrogram
  - קורלציה רגעית
  - פונקצית Ambiguity
  - Wigner-Ville Distribution
  - סינון Cross-terms
  - הסיגנל האנליטי

סגמנטציה אדפטיבית

1. בחירת חלון ייחוס מתאים:
   - איזון בין חלון ארוך לשיערוך מדוייק או חלון קצר לשיפור רזולוציה זמנית.
   - חלון נע sliding-window או חלון גדל growing-window (עומס חישובי).



חלון רפרנס

שערוך מודל AR $\underline{\hat{a}}_L$

- משערכים מודל AR עבור החלון בתחילת האות.
- תזכורת: אות AR הוא רעש לבן שעובר בפילטר IIR.

מודל AR - תזכורת

- הפילטר ההופכי הוא פילטר FIR בעל פ' תמסורת:

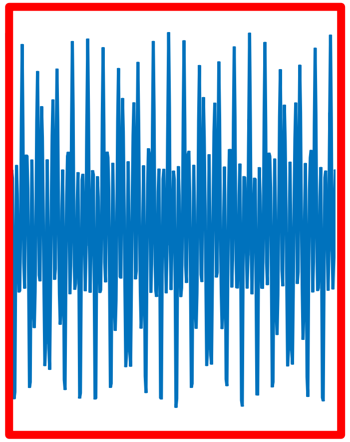
$$H_w(z) = H^{-1}(z) = A(z)$$

$$\xrightarrow[\text{אות AR}]{X[n]} \boxed{H_w(z) = 1 + \sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l} = A(z)} \xrightarrow[\text{רעש לבן יוצר!}]{W[n]}$$

- נהוג לקרוא למסננת ההופכית "המסננת המלבינה" או ה-Whitening Filter.

סגמנטציה אדפטיבית

2. נשערך את הרעש היוצר של האות בחלון הרפרנס ע"י העברתו במסננת המלבינה:



חלון רפרנס

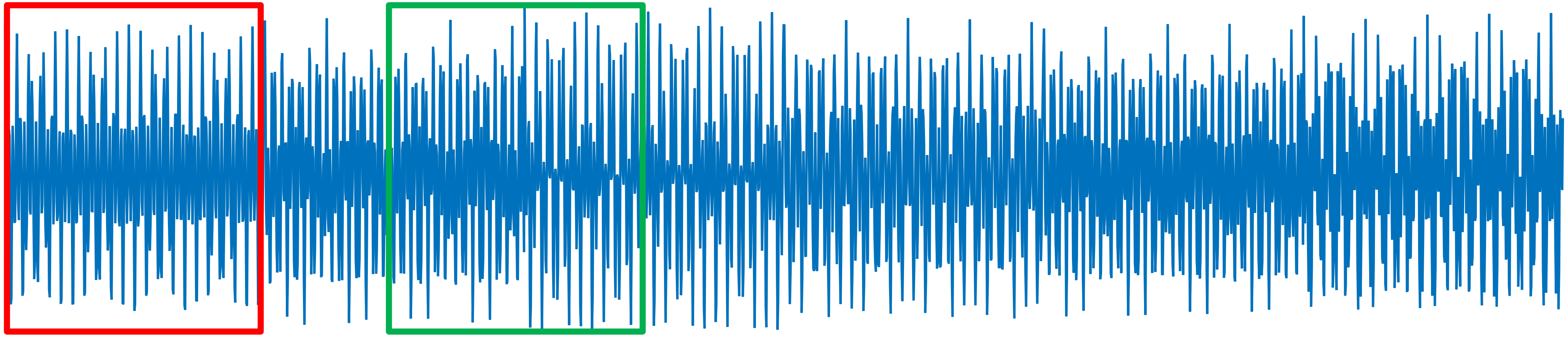
$$H_w(z)=1+\sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l} = A(z)$$

$e_{ref}[n]$

רעש לבן יוצר
בחלון הרפרנס

סגמנטציה אדפטיבית

3. נבחן אם חלון המבחן מתאים לאותו מודל AR כמו חלון הרפרנס:



שערוך מודל AR $\underline{\hat{a}}_L$

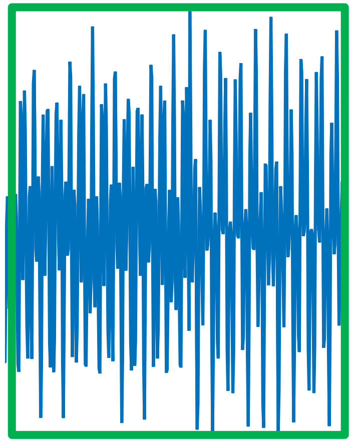
מתאים למודל AR של הרפרנס?

איך נבחן זאת?

נכניס אותו למסננת המלבינה ונראה אם מקבלים רעש לבן!

סגמנטציה אדפטיבית

3. נשערך את הרעש היוצר של האות בחלון המבחן ע"י העברתו במסננת המלבינה ששערכנו מחלון **הרפרנס**:



חלון מבחן

$$H_w(z) = 1 + \sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l} = A(z) \xrightarrow{e_{test}[n]}$$

רעש לבן יוצר
בחלון המבחן,
בהנחה שהוא
מתאים למודל
AR ששוערך
בחלון **הרפרנס**!

סגמנטציה אדפטיבית

4. כדי לבחון אם אכן קיבלנו רעש לבן בחלון המבחן, נחשב את האוטוקורלציה של מוצא המסננת המלבינה. מה נצפה לקבל?
   – נצפה לקבל ~דלתא עם אותה שונות כמו של הרעש היוצר בחלון הרפרנס.

- קריטריון קצת יותר רובסטי:
  – נחשב את האוטוקורלציה של הרעשים שקיבלנו משני החלונות: $e_{ref}[n],\ e_{test}[n]$.
  – נקבע מרווח של M דגימות מהאפס, ונחשב את הסטייה בין שתי האוטוקורלציות ביחס לאוטוקורלציה באפס של חלון הרפרנס:

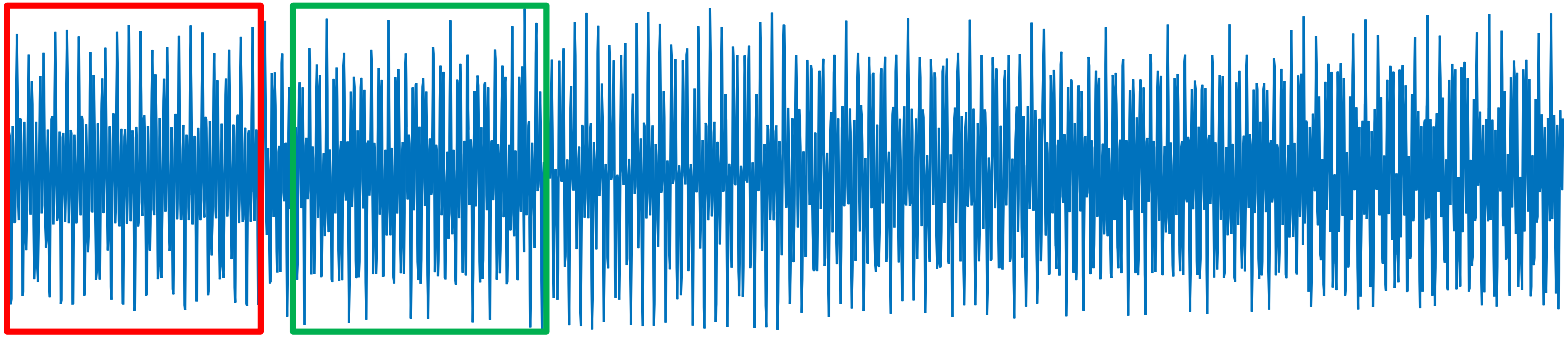
בד"כ משהו באזור ה-4 לא יותר.

$$S=\sum_{k=0}^{\boxed{M}}\left[\frac{R_{fixed}(k)-R_{moving}(k)}{R_{fixed}(0)}\right]^2=\Delta_1(n)$$

  – מעל לסף מסוים T נקבע שהתחלף סגמנט. (לפעמים בוחרים להתעלם מחציות רגעיות)

סגמנטציה אדפטיבית

5. ברגע שמתחלף סגמנט, החלון מבחן הופך להיות חלון הרפרנס עבור החלק הנשאר מהאות:



חלון רפרנס

$\underline{\hat{a}}_L$ שערוך מודל AR

חלון מבחן

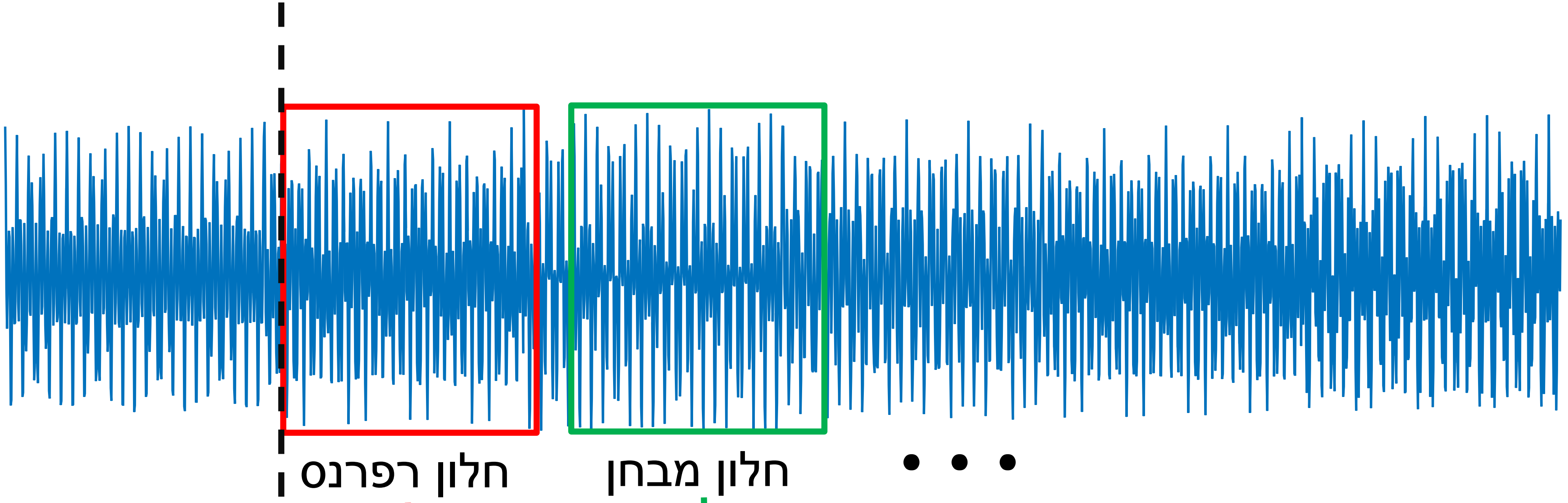
מתאים למודל AR של הרפרנס?

אם עוברים את הסף במדד:

$$S=\sum_{k=0}^{M}\left[\frac{R_{fixed}\left(k\right)-R_{moving}\left(k\right)}{R_{fixed}\left(0\right)}\right]^2>T$$

סגמנטציה אדפטיבית

5. ברגע שמתחלף סגמנט, החלון מבחן הופך להיות חלון הרפרנס עבור החלק הנשאר מהאות:



שערוך מודל AR $\underline{\hat{a}}_L$

מתאים למודל AR של הרפרנס?

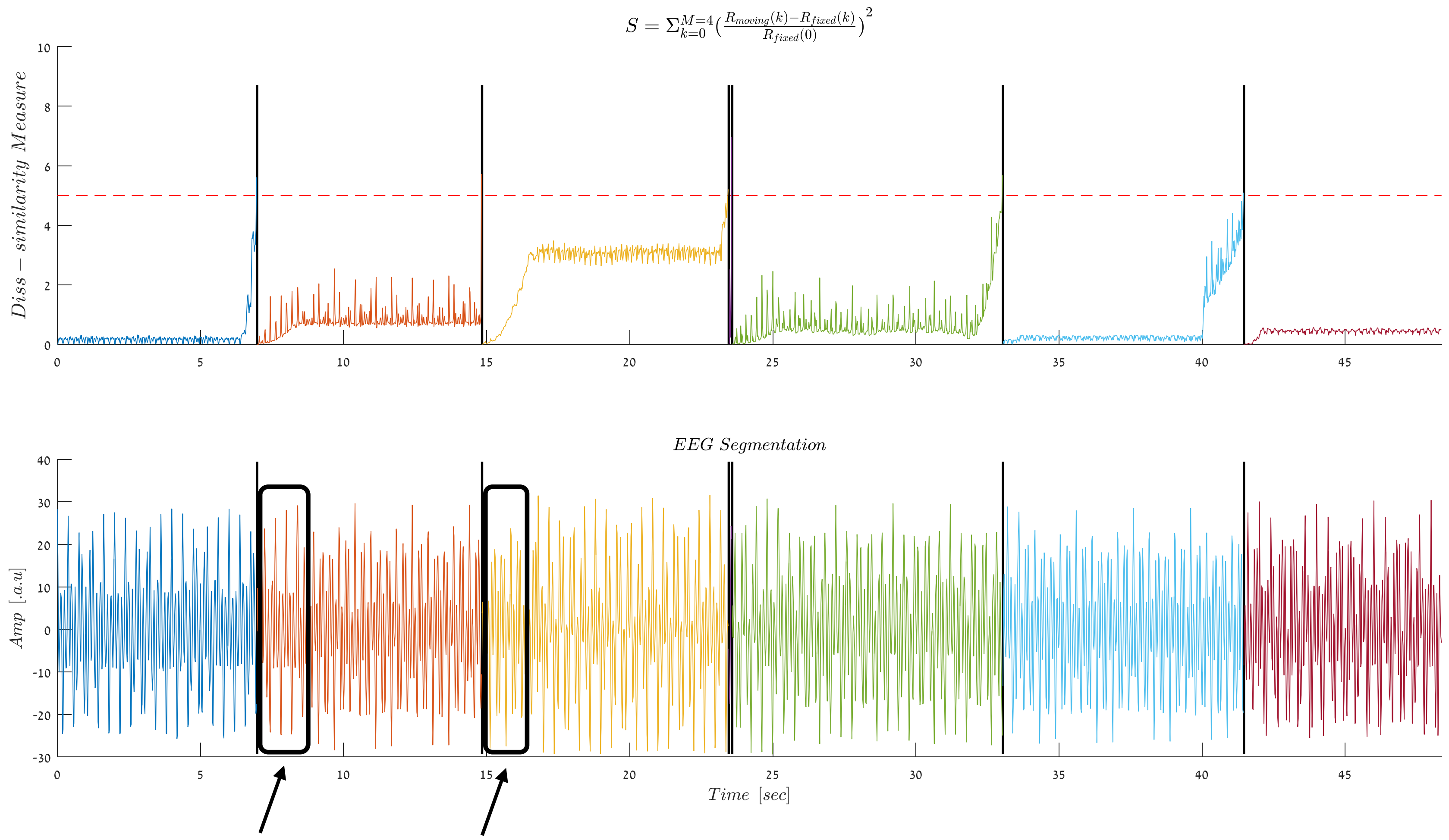
6. חוזרים על הצעדים 2-4,

עם חלון הרפרנס החדש.

סגמנטציה אדפטיבית

- כמה הערות:
  - בגרסה הכי פשוטה, חלון המבחן זז כל פעם בדגימה אחת, ומשווים עם הרפרנס.
  - בגרסאות יותר יעילות חישובית מנצלים יתירות להאצת החישובים.
  - הפרמטרים של השיטה נקבעים אמפירית/"אומנות".
  - בד"כ מתעלמים מחציות רגעיות של 2-3 דגימות אם הקריטריון יורד בחזרה מתחת לסף.
  - ישנם קריטריונים נוספים יותר מסובכים אשר משיגים תוצאות יותר טובות.
  - כמה טוב השיטה עובדת?

סגמנטציה אדפטיבית - דוגמה



סה"כ עובד עד כדי אורך החלון (~2 שניות)..

סגמנטציה אדפטיבית – מימוש לדוגמה

```matlab
function [ knots,measure ] = SegmentEEG( eeg,S,deltaindex,M,Sthresh,winLen,L )
% function segments the eeg signal according to the provided input
% parameters.
%
% Inputs
% eeg           - eeg signal to segment
% S             - measure function handle
% deltaindex    - threshold passing minimal distance
% M             - number of error autocorrelation samples
% Sthresh       - threshold for the measure
% winLen        - window length
% L             - order of the AR model
%
% Outputs
% knots         - knots where the segments start/end
% measure       - measure evolution throughout the signal


    % Inits.
    N = length(eeg); % signal length
    refpos = 1; % initialize reference position
    testpos = refpos + 1; % initialize test position
    countThresh = 0; % initialize threshold counting
    SegIndicator = zeros(size(eeg)); % segmentation indicator
    done = false; % initialize the stopping criteria
    i = 1; % initialize index for the measure history

    % EEG Segmentation
    while ~done

        % reference segment
        eegRef = eeg(refpos:refpos+winLen-1);
        a = ARModelling(eegRef,L); % AR Modelling
        errorRef = filter([1; a],1,eegRef); % error of the reference
        [Rfixed,taufix] = xcorr(errorRef); % error autocorrelation

        % test segment
        eegTest = eeg(testpos:testpos+winLen-1);
        errorTest = filter([1; a],1,eegTest); % error of the test
        [Rmoving,taumov] = xcorr(errorTest); % error autocorrelation

        % calculate the diss-similarity measure
        St = S(Rfixed,taufix,Rmoving,taumov,M);
        measure(i) = St; % save measure history
        i = i+1; % advance the appropriate index

        % if the threshold is not reached then just skip to the next window
        if St <= Sthresh
            testpos = testpos + 1; % advance to the next test window
            countThresh = 0; % initialize the count of threshold passing

        % suspected to be a different segment, check adjacent ones before
        % segmenting
        else
            testpos = testpos + 1;
            countThresh = countThresh + 1;

            % check if this threshold passing has lasted 100 msec
            if countThresh >= deltaindex
                SegIndicator(testpos - deltaindex) = 1; % mark seg. initial point
                refpos = testpos - deltaindex; % switch the reference segment
                testpos = refpos + 1; % advance test position
                countThresh = 0; % zero threshold passing count
            end
        end

        % check if the whole signal is segmented
        if refpos >= N - winLen || testpos >= N - winLen
            done = true;
        end
    end

    % find the indices of the knots
    knots = find(SegIndicator==1);
end
```

המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

- בזמן ניסוי התנהגותי מסויים נע עכבר במבוך חד-מימדי (פרוזדור) באורך 2 מטרים. הניסוי חייב להתבצע בחושך מוחלט, ולכן על מנת לעקוב אחרי המיקום של העכבר בזמן אמת הוצבו בקצוות המבוך שני מיקרופונים שמקליטים את הציפצופים שמשמיע העכבר. תדר דגימה של האות האקוסטי הוא 8192Hz.

המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

א. תזכורת: חשב אנליטית את פונקצית הקרוסקורלציה $R_{xy}[k]$ בין האותות $x[n]$ ו-$y[n]$ המוקלטים בשני המיקרופונים, כאשר העכבר נמצא חצי מטר מהמיקרופון X. הניחו שהציפצופים ניתנים לתאור ע"י מודל אוטורגרסיבי מסדר 1, ושמהירות הקול היא 340 מ'\שנ'.

בתרגול 5 מצאנו כי פונקציית הקרוסקורלציה היא:

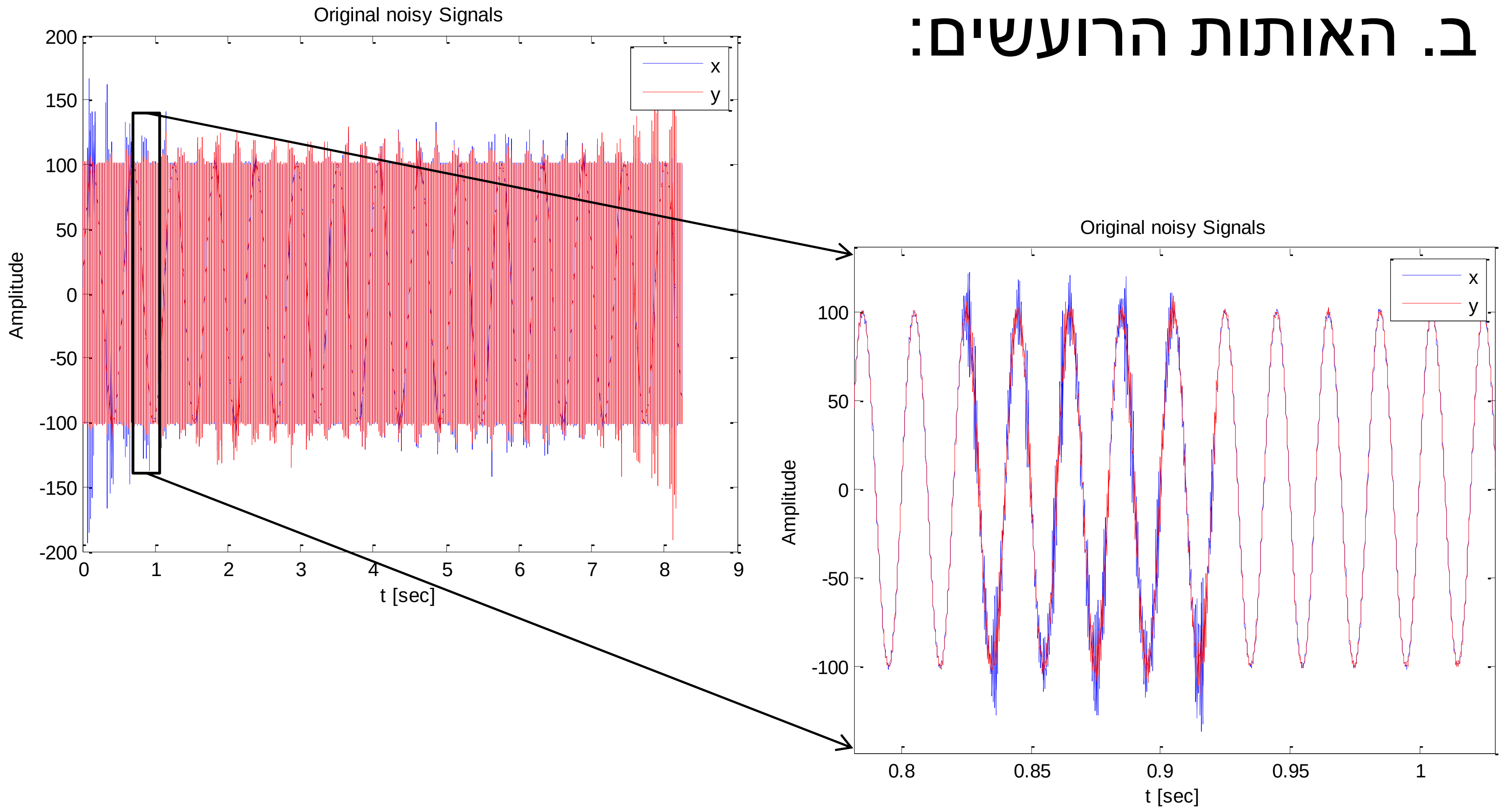
$$R_{xy}[k] = R_{cc}[k+24] = a^{k+24} \cdot R_{cc}[0]$$

המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

ב. בקובץ mouse_maze.mat נתונות ההקלטות משני המיקרופונים בזמן הניסוי. שערכו את מיקום העכבר והציגו אותו **כפונקציה של הזמן**. שימו לב שלמדידות התווסף רעש חזק ב-50Hz שמפריע לביצוע האנליזה.

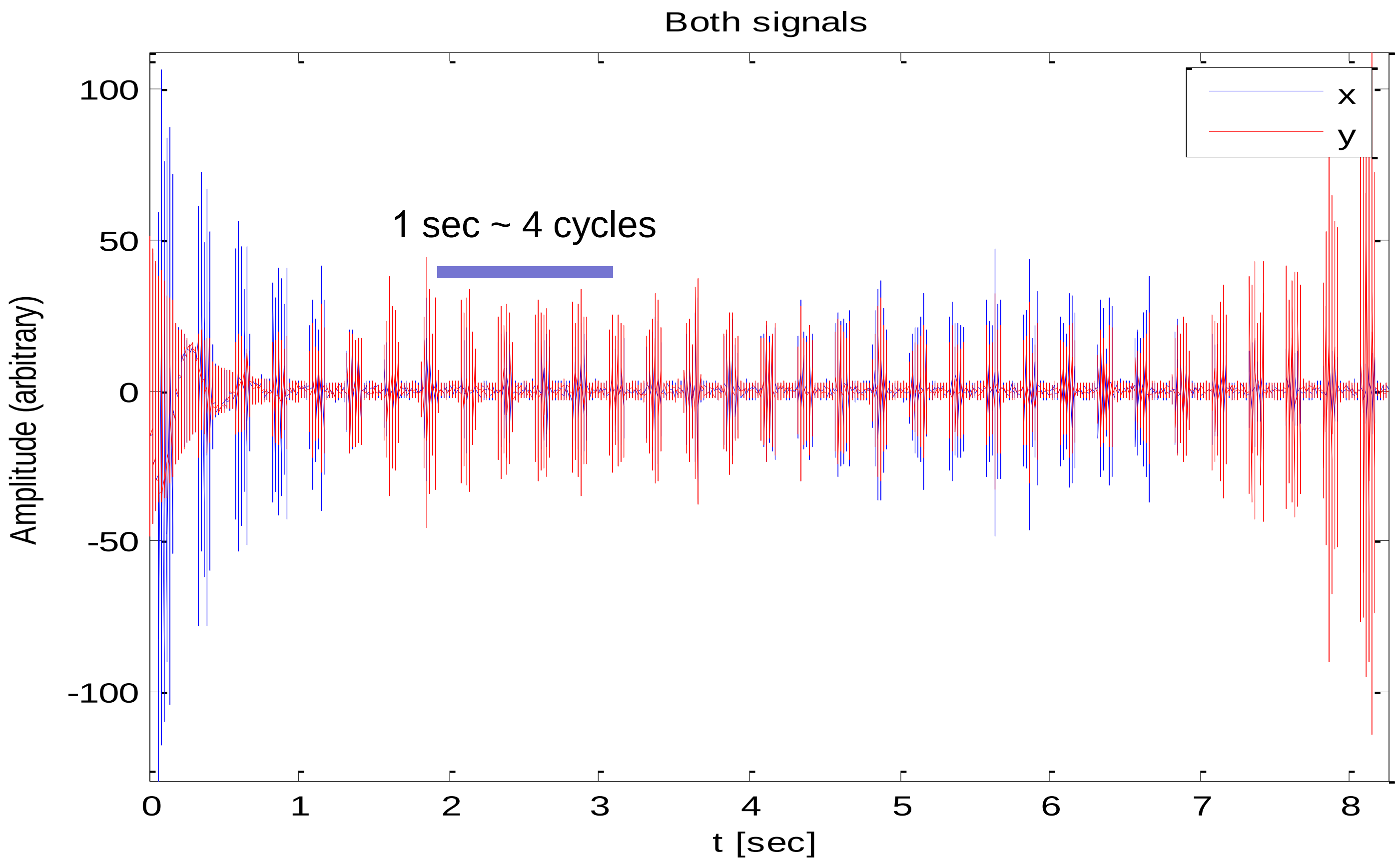
המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

ב. האותות הרועשים:



המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

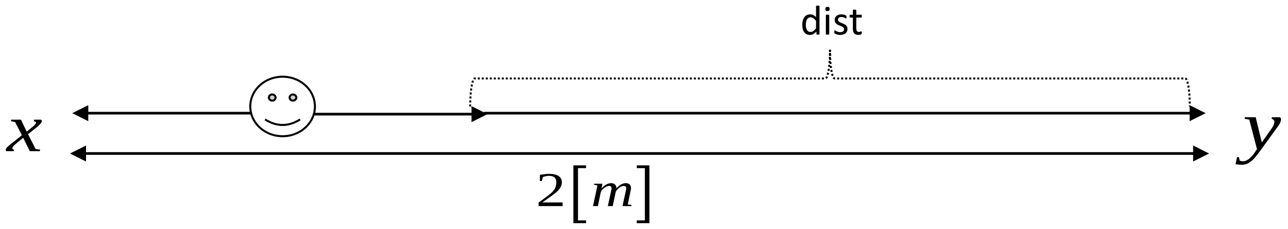
לאחר הסינון מתקבלים האותות:



אוטומטית במבחן
נפנה לסגמנטציה
אדפטיבית?

המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

תזכורת – ראינו בתרגול 5:



הפרש הזמנים בין האותות:

$$\Delta t \cong \frac{\Delta ind}{f_s} \Rightarrow dist = \Delta t \cdot 340\left[\frac{m}{\sec}\right]$$

מרחק העכבר ממיקרופון x:

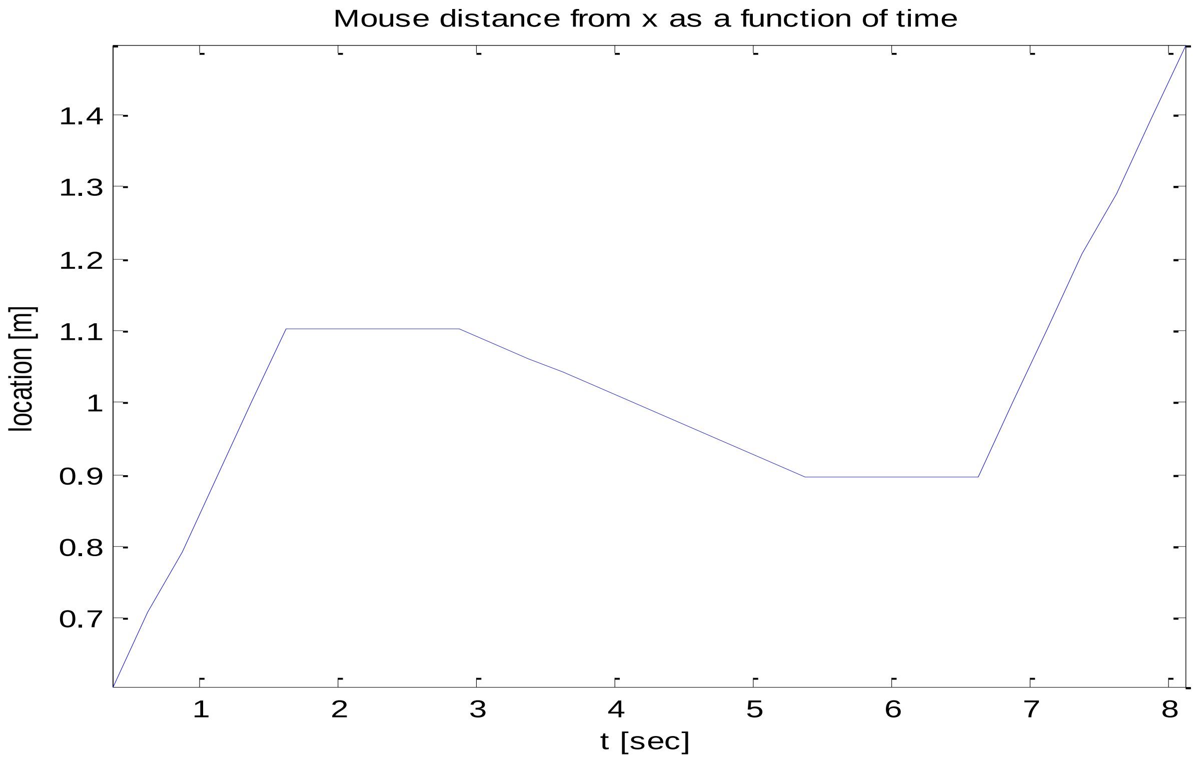
$$dist\_from\_x = \frac{2[m] + dist}{2}$$

מרחק העכבר ממיקרופון y:

$$dist\_from\_y = \frac{2[m] - dist}{2}$$

המשך תרגיל 1 ממבחן 2008/9 (תרגול 5)

לאחר חלוקה למקטעים סטציונריים וחישוב הקרוס-קורלציה ניתן לחשב את מיקום העכבר בזמן:

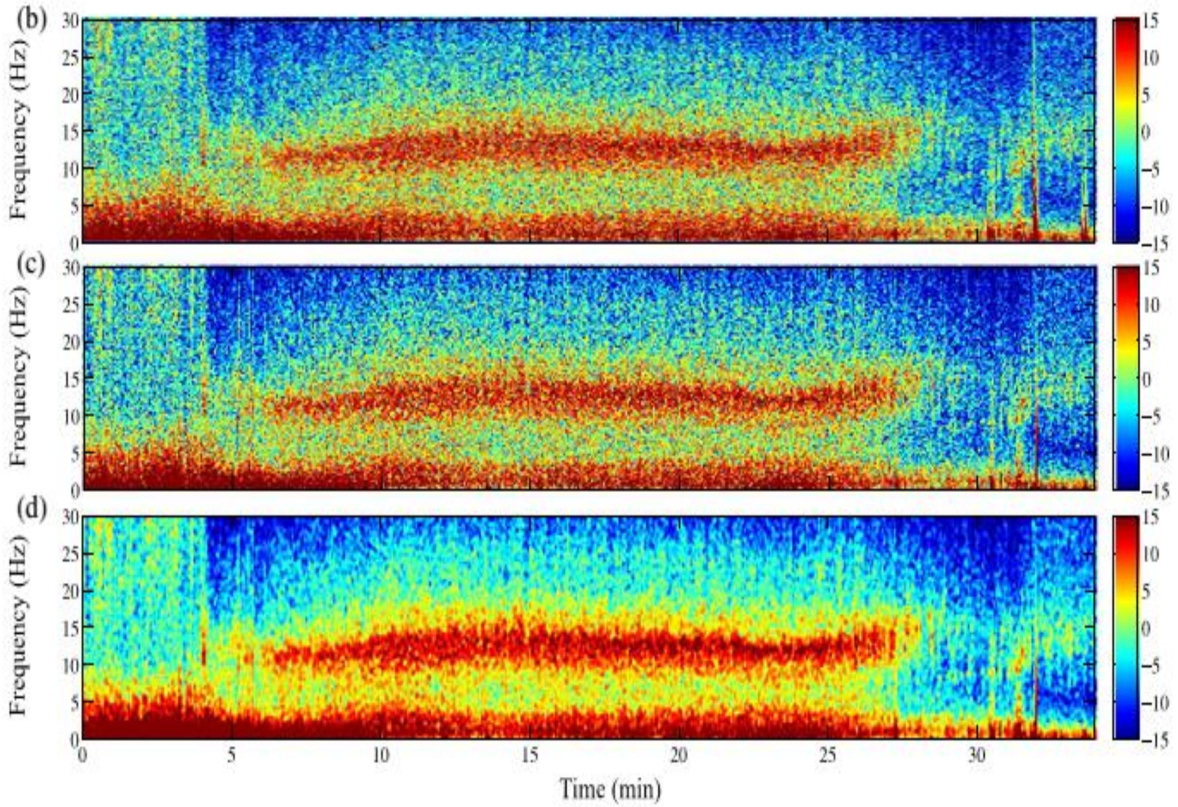


מה נלמד?

✓ סיכום אנליזה סטציונרית

- אנליזה לא סטציונרית
  - ←סגמנטציה אדפטיבית
  - Spectrogram –
  - קורלציה רגעית –
  - פונקצית Ambiguity –
  - Wigner-Ville Distribution –
  - סינון Cross-terms –
  - הסיגנל האנליטי –

Spectrogram



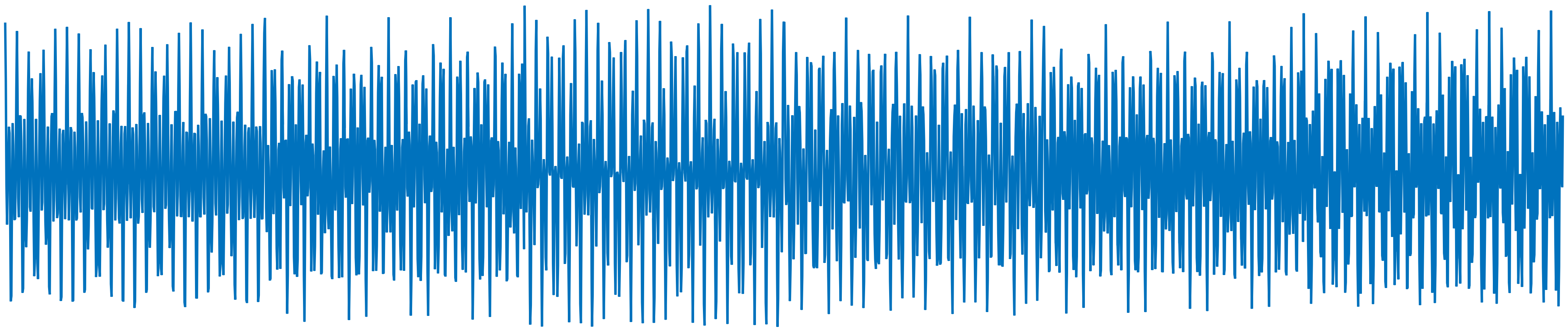
- נניח שבמקטעי זמן קצרים האות הוא סטציונרי בקירוב.
- נחשב אוטו- או קרוס-ספקטרום סטציונרי למקטעי זמן קצרים (משערך Periodogram למשל).
- נציג את ערכי הספקטרום כתלות בתדר ובזמן סביבו הם חושבו.
- מקובל להציג תמונה דו ממדית בה הצבע מייצג את ערכי צפיפות ההספק הספקטראלית.
  - ע"י imagesc למשל.
  - לא לשכוח להוסיף colorbar כדי לייצג את ערכי צפיפות ההספק!
- מימוש במטלב: spectrogram.

Spectrogram ו- STFT

- ביצענו כאן Short Time Fourier Transform.
- המשערך לספקטרום:
$$S_x(t,\Omega)=\left|X(t,\Omega)\right|^2$$
- כאשר:
$$X(t,\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)w(\tau-t)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$
- w הוא חלון סביב הזמן t.
  - ניתן להשתמש בכל החלונות שהכרנו עד כה ולאזן רזולוציה בתדר עם שגיאה/רעש.
  - אורך החלון מאזן רזולוציה בזמן (יכולת ההפרדה בין שני מקטעים שהתמרנו) ורזולוציה בתדר (tradeoff).

Spectrogram - דוגמה

- נזכר באות EEG הלא סטציונרי שניסינו לחתוך:



- המטרה שלנו היתה לחתוך אותו למקטעים שהם סטציונרים.
- שאלה: איך תראה הספקטרוגרמה שלו?

Spectrogram - דוגמה

• קטע קוד לדוגמה:

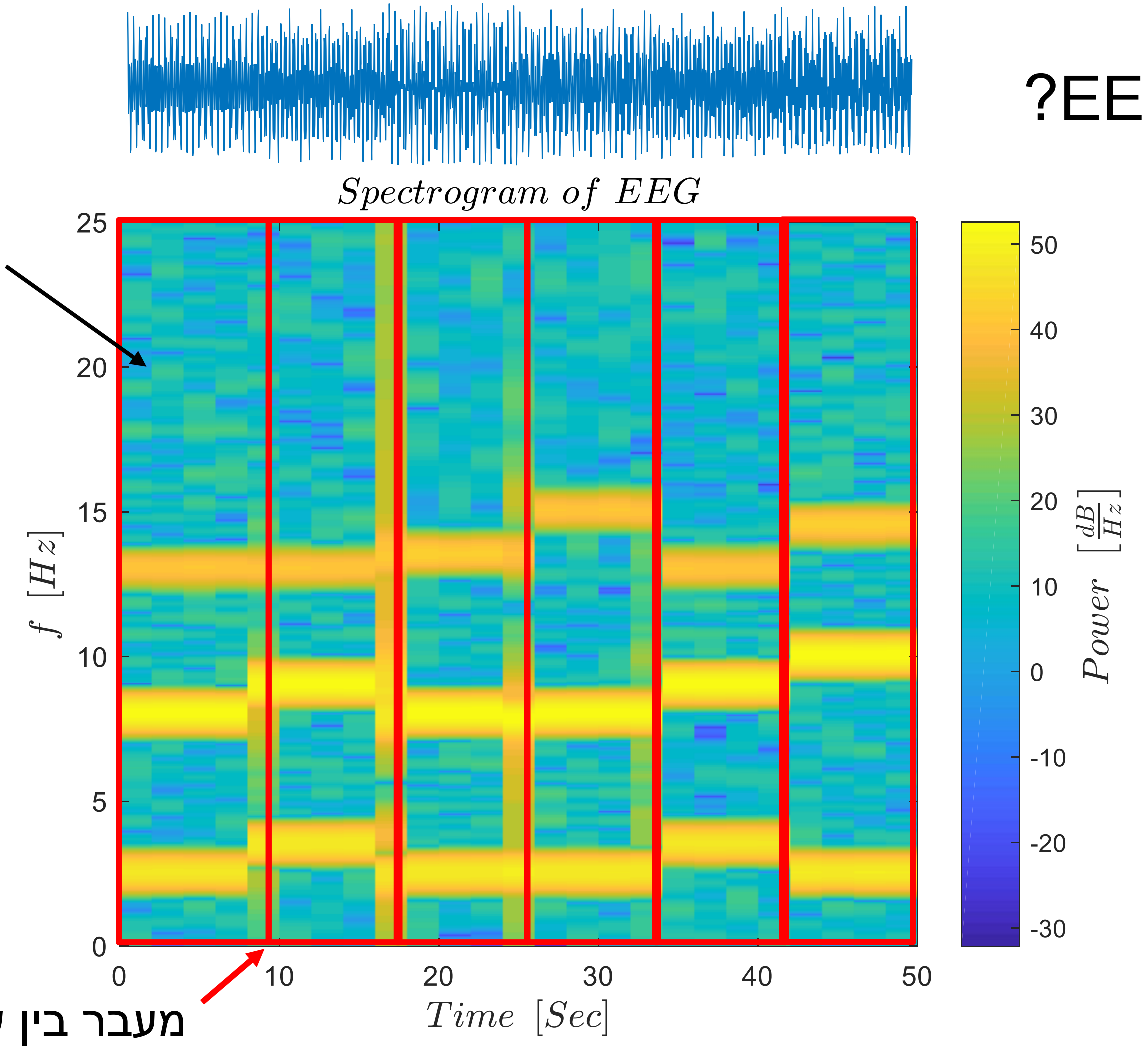
חישוב ספקטרוגרמה

```
% spectrogram calc.
nfft = length(eeg); % frequency axis samples
noverlap = 0; % overlap between segments
window = 100; % window (~ 2 seconds)
res = 1; % time resolution
[S,fsp,tsp]=spectrogram(eeg,window,noverlap,nfft,fs);
```

הצגת תוצאה ב-dB

```
% plot res.
figure();imagesc(tsp,fsp,mag2db(abs(S)));
hx = xlabel('$Time \ \left[Sec\right]$');
hy = ylabel('$f \ \left[Hz\right]$');
set(gca,'YDir','normal');Ch = colorbar;
hC = ylabel(Ch,'$Power \ \left[\frac{dB}{Hz}\right]$');
ht = title('$Spectrogram \ of \ EEG$');
set([hx hy, hC, ht],'interpreter','latex','FontSize',13);
```

דוגמה - Spectrogram



:Tradeoff
רזולוצית זמן-תדר!

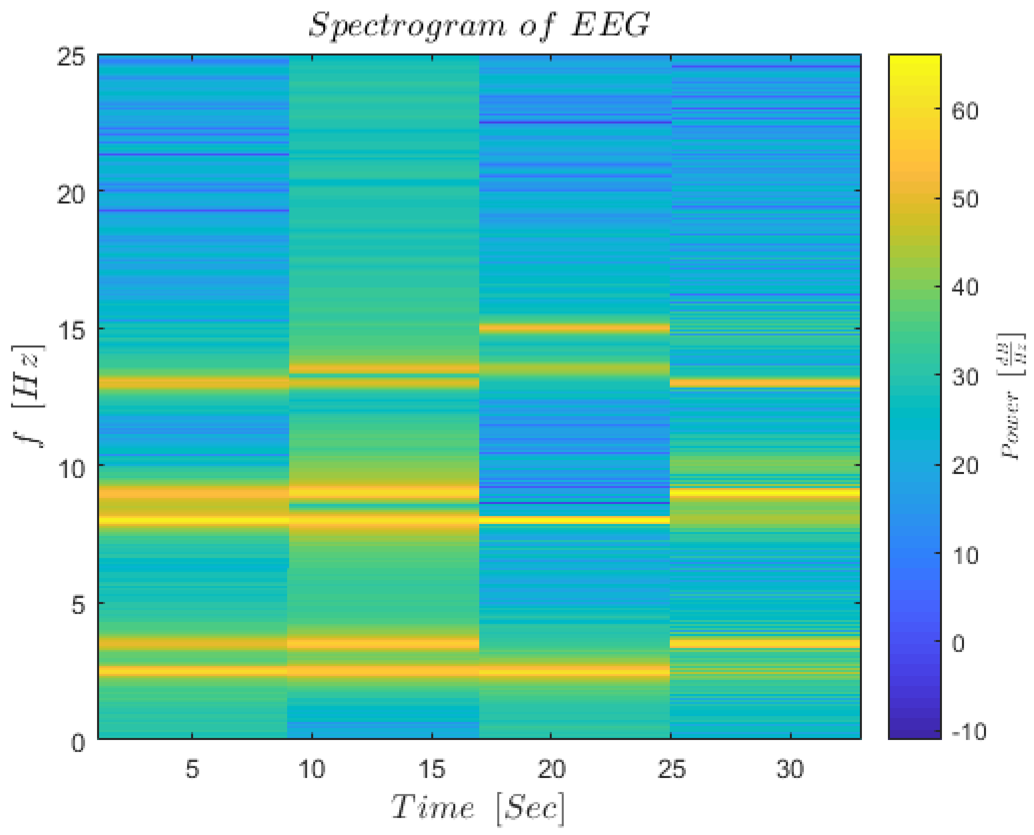
מעבר בין שני מקטעים!

- איך תראה תוצאה עבור אות ה-EEG?

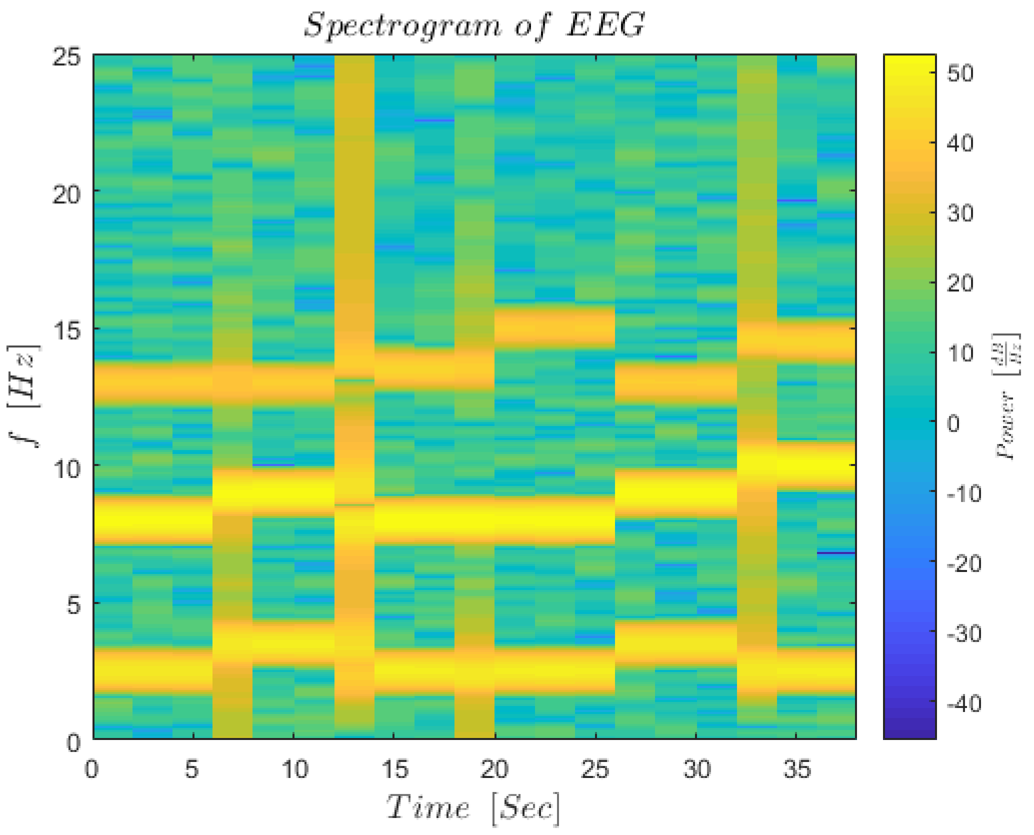
עוד דרך
לסגמנטציה!

רזולוצית זמן-תדר – Spectrogram

- עקרון האי-ודאות:



צר בתדר = רחב בזמן



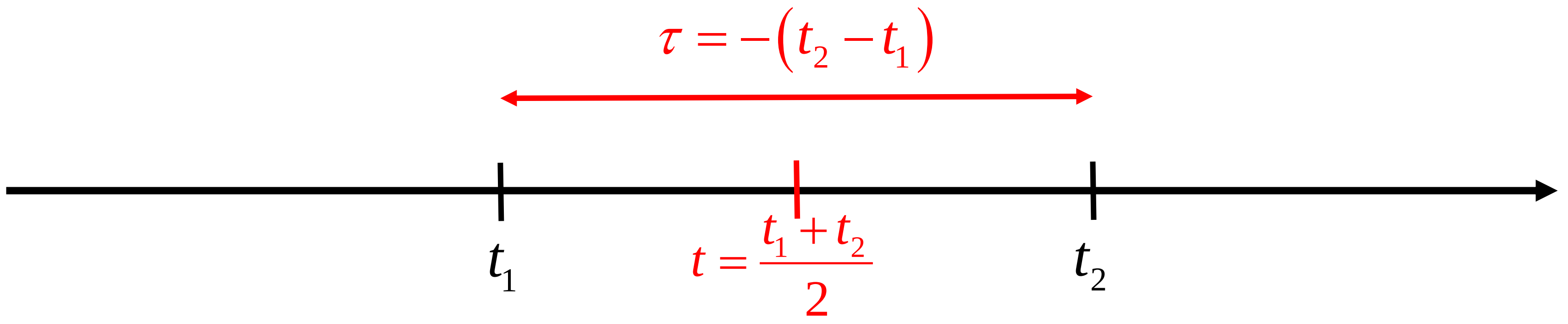
צר בזמן = רחב בתדר

מה נלמד?

- ✓ סיכום אנליזה סטציונרית
- אנליזה לא סטציונרית
  - ←סגמנטציה אדפטיבית
  - ←Spectrogram
  - קורלציה רגעית
  - פונקציית Ambiguity
  - Wigner-Ville Distribution
  - סינון Cross-terms
  - הסיגנל האנליטי

קורלציה רגעית

- ישנה תלות גם בזמן, ולא רק בהפרש הזמנים: $R_{xx}(t_1,t_2)$
- נהוג להגדיר את הקורלציה בעזרת שני המשתנים הבאים:



- הקורלציה הרגעית נתונה ע"י:

$$R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}\left(t+\frac{\tau}{2}, t-\frac{\tau}{2}\right) = E\left[x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] = \tilde{R}_{xx}(\tau,t)$$

קורלציה רגעית

- איך תראה הגרסה הבדידה?

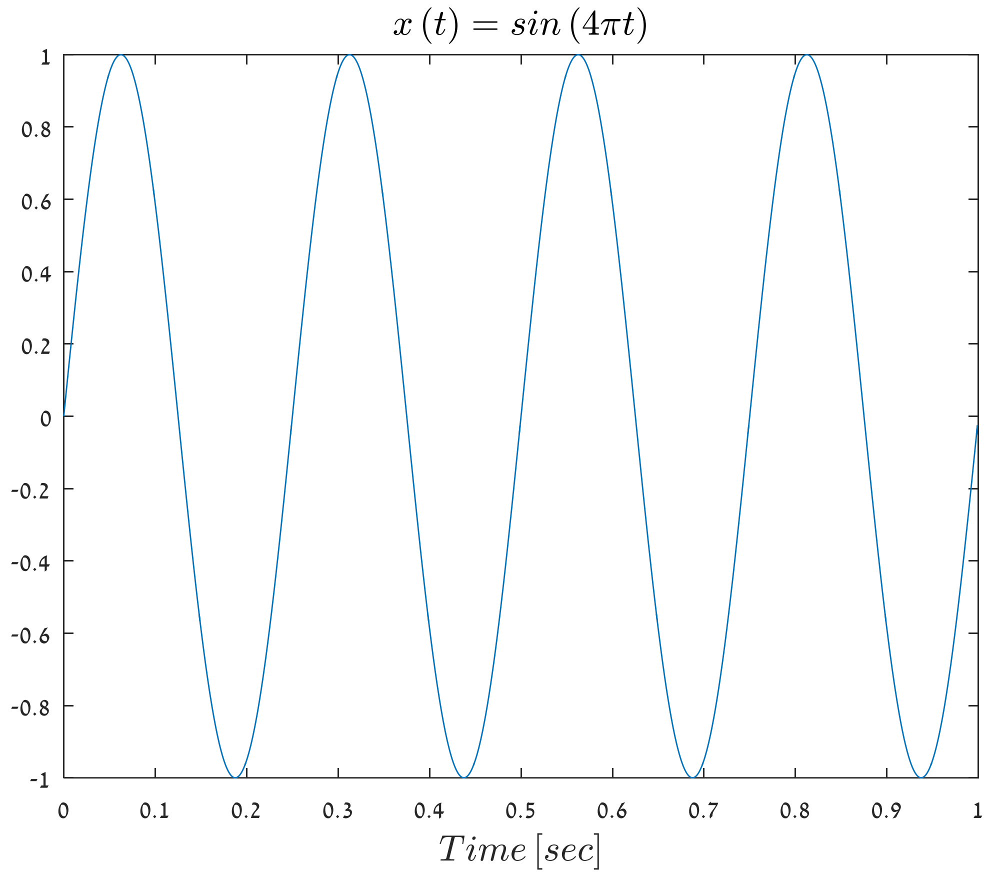
$$R_{xx}\left(n+k,n-k\right)=E\left[x\left(n+k\right)\cdot x^{*}\left(n-k\right)\right]=\tilde{R}_{xx}\left(n,k\right)$$

- אז איך נשערך את התוחלת לעיל? מותר לבצע אינטגרציה על t?
  – האות בהכרח לא ארגודי ולכן **לא** ניתן להשתמש במשערך הארגודי! (האוטוקורלציה תלויה ב-t).
- משערך לקורלציה הרגעית:

$$\boxed{\hat{R}_{xx}\left(t+\frac{\tau}{2},t-\frac{\tau}{2}\right)=x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot x^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}$$

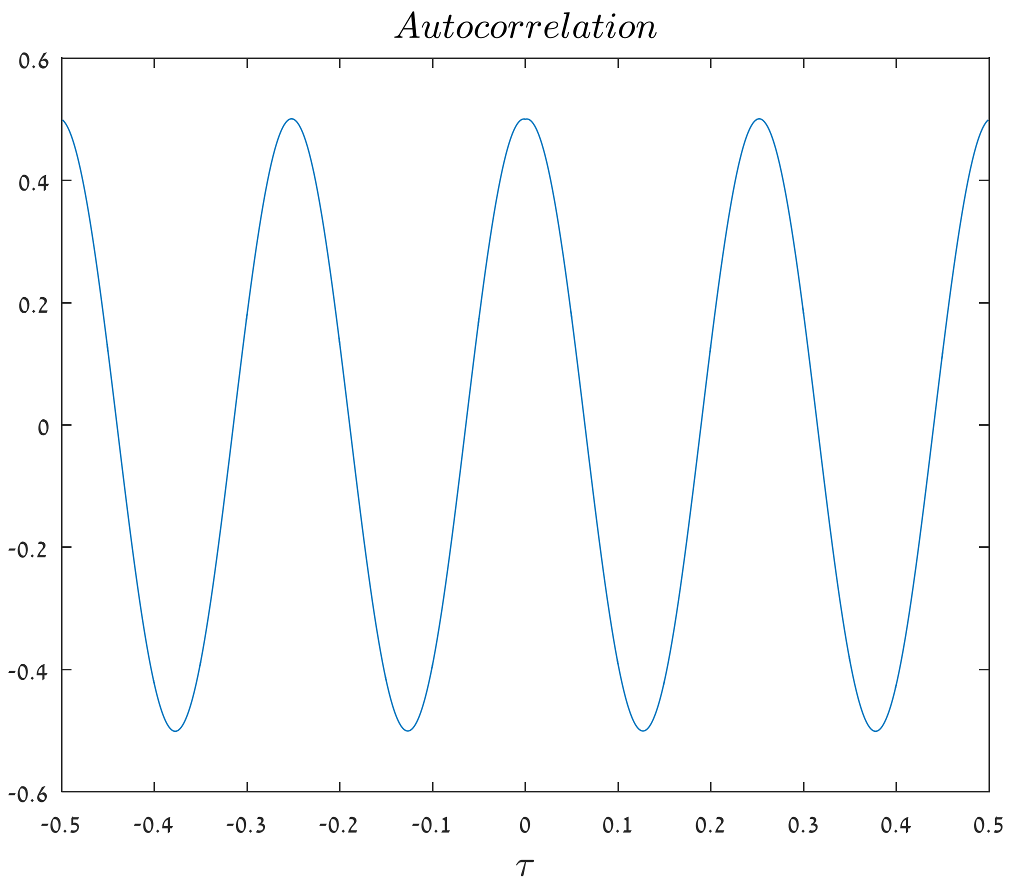
קורלציה רגעית - דוגמה

- נניח נתון אות סינוס טהור:



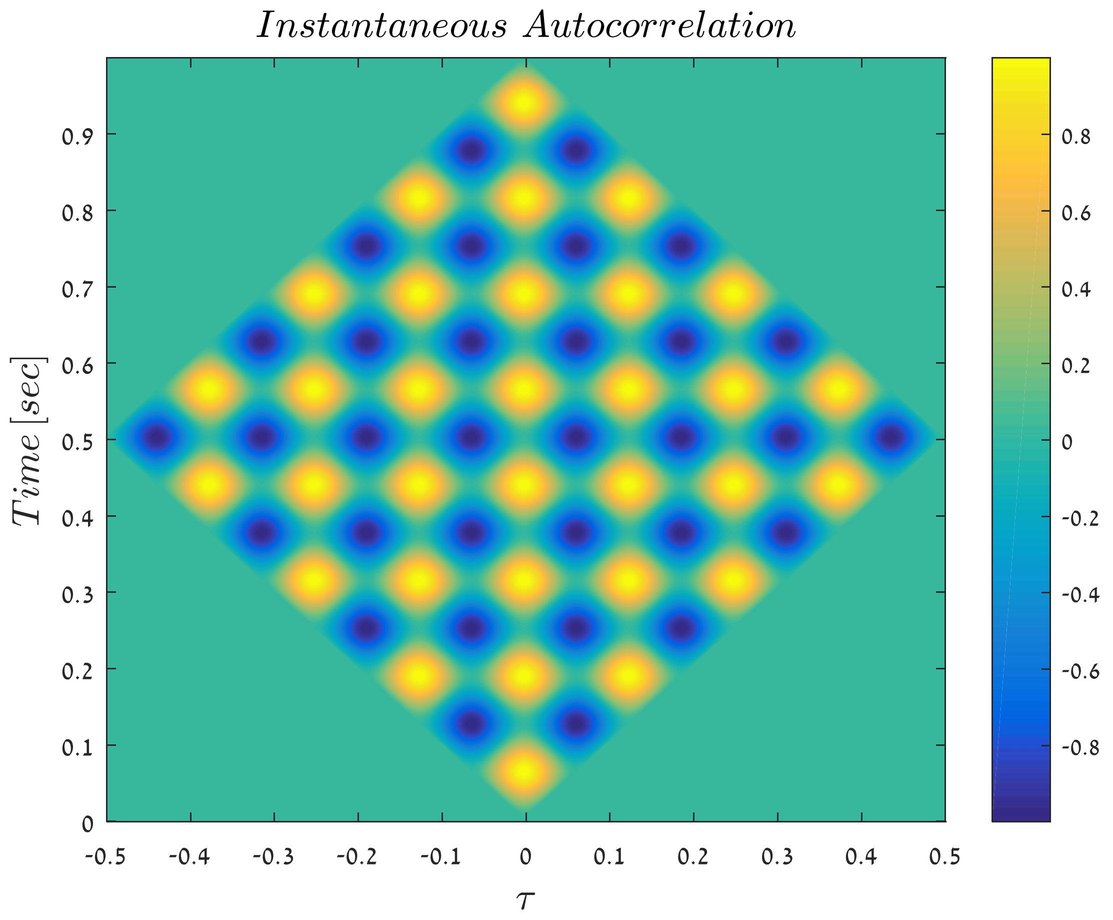
קורלציה רגעית - דוגמה

• איך תראה האוטוקרולציה "הרגילה" שלו?



קורלציה רגעית - דוגמה

- מה עם האוטוקורלציה הרגעית?



קורלציה רגעית - דוגמה

- דוגמה למימוש:

```
R = zeros(N,N);
for n = 0:N-1
    M = min(n, N-1-n);
    for k = 0:M
        R(n+1, k+1) = x(n+k+1) * conj(x(n-k+1));
    end
    for k = N-1 : -1 : N-M
        R(n+1, k+1) = conj(R(n+1, N-k+1));
    end
end
```

- יופי. אז למה זה שימושי? תשובה בהמשך.

מה נלמד?

- ✓ סיכום אנליזה סטציונרית
- אנליזה לא סטציונרית
  - ←סגמנטציה אדפטיבית
  - ←Spectrogram
  - ←קורלציה רגעית
  - פונקצית Ambiguity
  - Wigner-Ville Distribution
  - סינון Cross-terms
  - הסיגנל האנליטי

Ambiguity Function

- נועדה לשקף את האי-וודאות של סיגנל גם בזמן וגם בתדר.
- פונקציית ה-Ambiguity מוגדרת כהתמרת פורייה ההפוכה של האוטוקורלציה הרגעית לפי t:

$$A_x(\tau,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)e^{j\nu t}dt$$

- אינטואיציה - מזיזים בשני הצירים למדידת "אי-וודאות" גם בזמן וגם בתדר:

$$x(t;\nu,\tau)=x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cdot e^{-j\nu\frac{t}{2}}$$

$$x(t;\nu,\tau)=x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot e^{j\nu\frac{t}{2}}$$

Ambiguity Function

- תכונות:
  – הקורלציה הרגעית תלויה גם ב-t וגם ב- τ , ולכן ניתן לעשות התמרת פורייה לפי כל אחד מהם.
  – על מנת לאפיין את ההתנהגות הרגעית "הכוללת", מתמירים לפי t:

$$A_x(\tau,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)e^{j\nu t}dt$$

  – עבור אות סטציונרי המשערך לצפיפות הספקטרלית נתון ע"י:

$$S_x(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau,0)e^{-j\Omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt\right)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$

Ambiguity Function

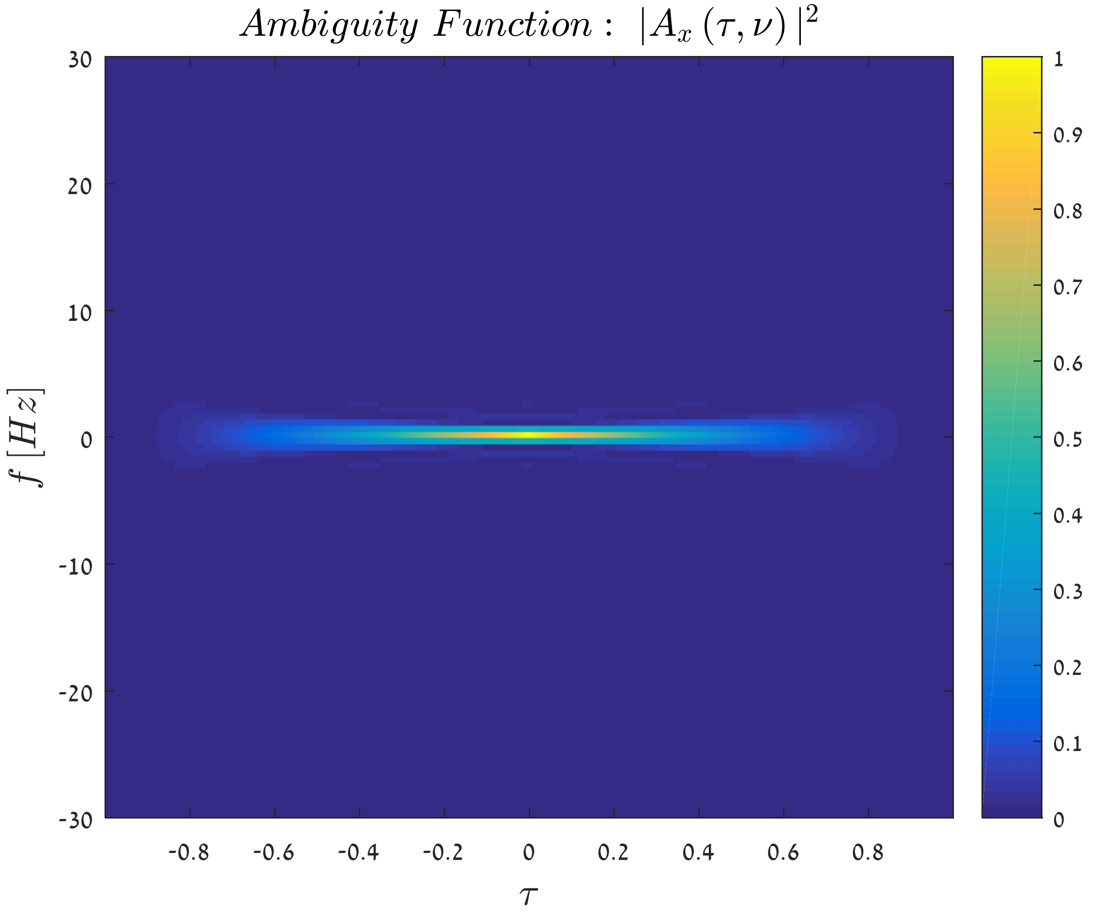
- תכונות:
  – מקבלת מקסימום בראשית. למה?

$$A_x\left(0,0\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x\left(t\right)\right|^2 dt$$

  – כי זאת כל האנרגיה של האות.
  – התמרת פורייה ישירה לפי ν תחזיר אותנו לאוטוקורלציה הרגעית.
  – פונקציית עזר נוחה לביטול **cross-terms**.
  – איך תראה פונקציית ה-Ambiguity של הסינוס הטהור?

Ambiguity Function

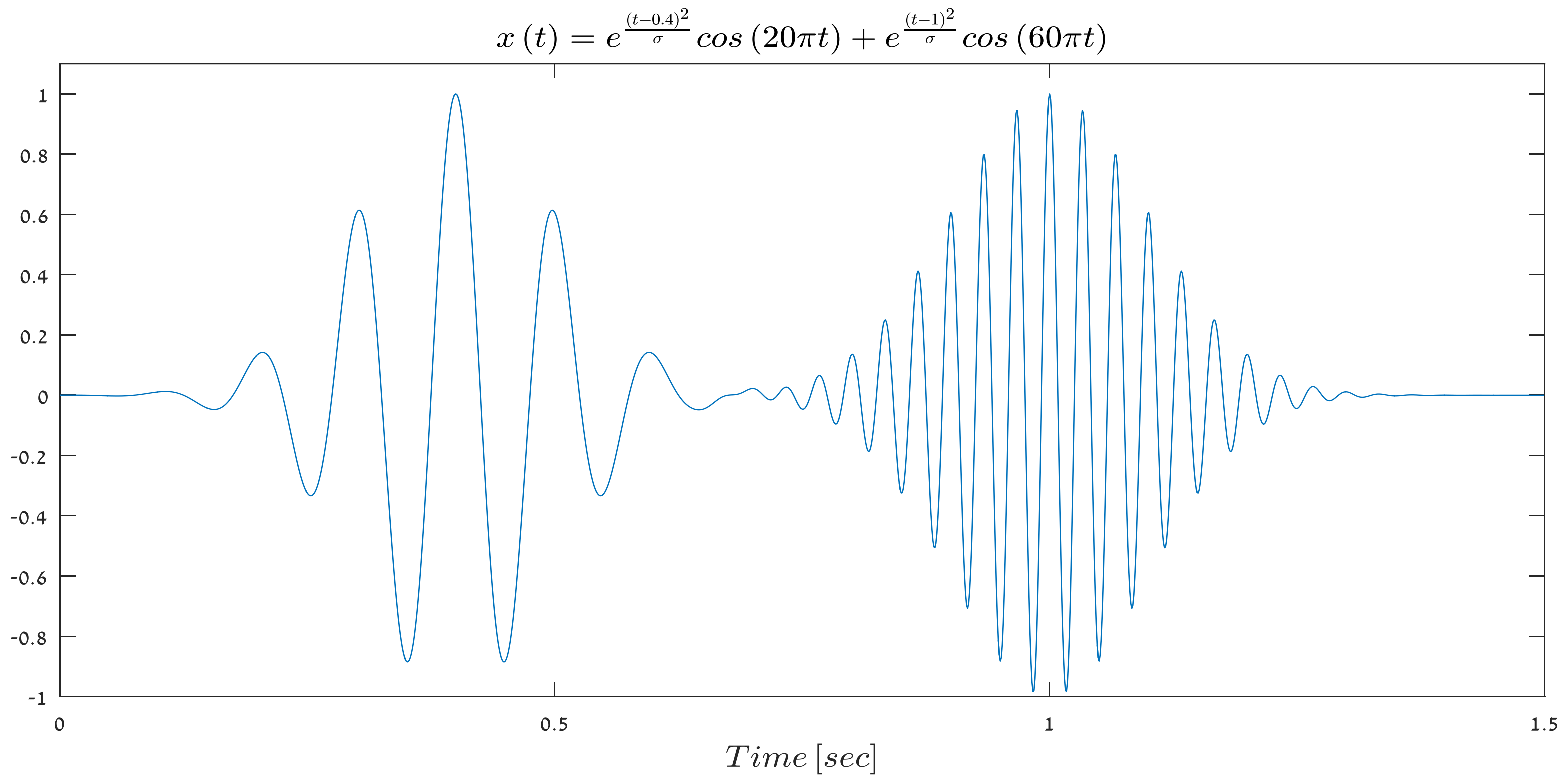
- מקבלים בעיקר "בלוב" ערכים באזור הראשית:



- מה יקרה אם יהיה לנו סיגנל שמורכב מ-2 חלקים?

Cross-terms

- נניח נתון:



- איך תראה פונקציית ה-ambiguity שלו?

Cross-terms

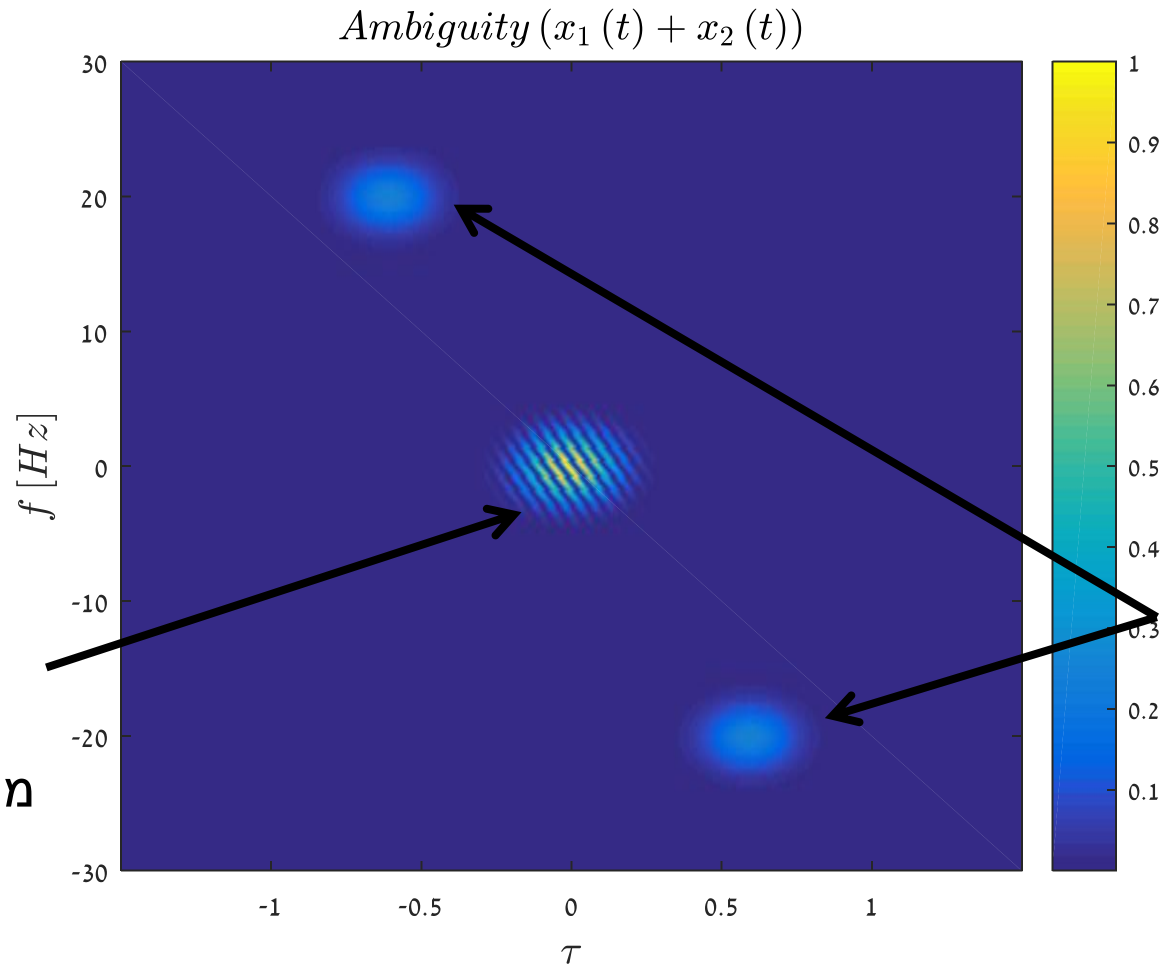
- פונקציית ambiguity של סכום:

$$A_x\left(\tau,\nu\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+x_2^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\cdot\left(x_1\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+x_2\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right)\cdot e^{j\nu t}dt=$$

$$=A_{x_1}\left(\tau,\nu\right)+A_{x_2}\left(\tau,\nu\right)+cross\ terms$$

- המכפלות המעורבות ייתנו לנו ביטויים לא כל כך "אינפורמטיבים".
- איך לדעתכם תראה הפונקציה עבור סיגנל הסכום?

Cross-terms



כאשר x1 או x2
מופיעים לבד, הם
מושלכים אל הראשית

כאשר x1 ו- x2 מופיעים
יחד, הם יוצרים
.cross terms

ניתן לסלק cross-terms
ע"י הכפלה בחלון!

דוגמא

- נתון הסיגנל הבא:

$$x_1\left(t\right)=e^{-\left(t-t_1\right)^2/\sigma}\cdot e^{j\Omega_1 t}$$

א) חשבו את פונקציית האוטוקורלציה הרגעית.

ב) חשבו את פונקציית ה-Ambiguity.

דוגמא

- סעיף א:

$$R_{xx}(t,\tau)=x_1\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x_1^{\ *}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

$$=e^{-\left(t+\frac{\tau}{2}-t_1\right)^2/\sigma}\cdot e^{j\Omega_1\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\cdot e^{-\left(t-\frac{\tau}{2}-t_1\right)^2/\sigma}\cdot e^{-j\Omega_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}=$$

$$=e^{-\left(t^2+2t\left(\cancel{\tau/2}-t_1\right)+\left(\tau/2-t_1\right)^2+t^2-2t\left(\cancel{\tau/2}+t_1\right)+\left(\tau/2+t_1\right)^2\right)/\sigma}\cdot e^{-j\Omega_1\tau}=\ldots$$

$$=e^{-2\left(t-t_1\right)^2/\sigma}\cdot e^{-\left(\tau/2\right)^2}\cdot e^{j\Omega_1\tau}$$

- סעיף ב:

$$A_{xx}\left(\tau,v\right)=e^{-\left(\tau/2\right)^2}\cdot e^{j\Omega_1\tau}\cdot e^{-jvt_1}\cdot e^{-\frac{v^2}{8}}\cdot const$$

תרגיל ממבחן 2007

נתון המודל הבא לצליל המגיע ממקור חולף:

$$x(t)=\cos(\omega t+\phi)\cdot e^{-(t-\mu)^2}$$

כאשר ω,ϕ,μ הם פרמטרים קבועים (הניחו שהם ידועים).

א. (9 נק') חשב\י את האוטוקורלציה **הרגעית** של האות הדטרמיניסטי x(t).

ב. (10 נק') נניח כעת שהפאזה ϕ של האות היא אקראית בעלת התפלגות אחידה $\phi\sim U[0,2\pi]$.

חשב\י את פונקצית ה- Ambiguity ‏-$A(\tau,\nu)$ של x(t) החדש.

תרגיל ממבחן 2007

על הלוח.

מה נלמד?

✓ סיכום אנליזה סטציונרית

- אנליזה לא סטציונרית
  - ←סגמנטציה אדפטיבית
  - ←Spectrogram
  - ←קורלציה רגעית
  - ←פונקצית Ambiguity
  - Wigner-Ville Distribution –
  - סינון Cross-terms –
  - הסיגנל האנליטי –

Wigner-Ville Distribution (WVD)

- התמרת זמן-תדר שפותחה על מנת להתגבר על חלק מהחסרונות של הספקטרוגרמה.
- נתונה ע"י התמרת פורייה לפי τ של הקורלציה הרגעית:

$$W_x(t,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

- ובאופן שקול ע"י התמרת פורייה הדו-מימדית של פונקציית ה-ambiguity:

$$W_x(t,\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau,\nu) e^{-j\nu t} e^{-j\Omega\tau} d\nu d\tau$$

WVD

• סכמת קשרים:

קורלציה רגעית

$$\tilde{R}(t,\tau)$$

התמרת פורייה הפוכה לפי t

$$A_x(\tau,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{R}(t,\tau)e^{j\nu t}dt \qquad \mathcal{F}^{-1}$$

התמרת פורייה לפי τ

$$\mathcal{F} \qquad W_x(t,\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{R}(t,\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$

$$A_x(\tau,\nu)$$

Ambiguity

$$W_x(t,\Omega)$$

WVD

$$2\mathcal{F}$$

התמרת פורייה דו-ממדית

$$W_x(t,\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_x(\tau,\nu)e^{-j\nu t}e^{-j\Omega\tau}d\nu d\tau$$

WVD - תכונות

- ממשית $W_x(t,\Omega)=W_x^*(t,\Omega)$ אבל יכולה לקבל ערכים שליליים.
- שמירה על תמך בזמן ובתדר:

$$x(t)=0\ \ \forall|t|>t_0 \qquad \Rightarrow \qquad W_x(t,\Omega)=0\ \ \forall|t|>t_0$$

$$X(\Omega)=0\ \ \forall|\Omega|>\Omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad W_x(t,\Omega)=0\ \ \forall|\Omega|>\Omega_0$$

- התפלגות שולית בזמן ובתדר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t,\Omega)\,dt=\left|X(\Omega)\right|^2 \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t,\Omega)\,d\Omega=\left|x(t)\right|^2$$

אינטגרל בזמן ⬅ אנרגיה בתדר , אינטגרל בתדר ⬅ אנרגיה בזמן

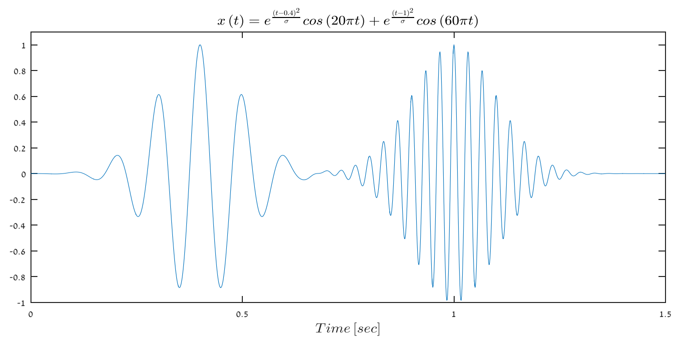
WVD – תכונות

- הזזת האות בזמן ← הזזת ההתמרה בזמן.
- הזזת האות בתדר ← הזזת ההתמרה בתדר.
- ניתן לשחזר את האות המקורי עד כדי קבוע.

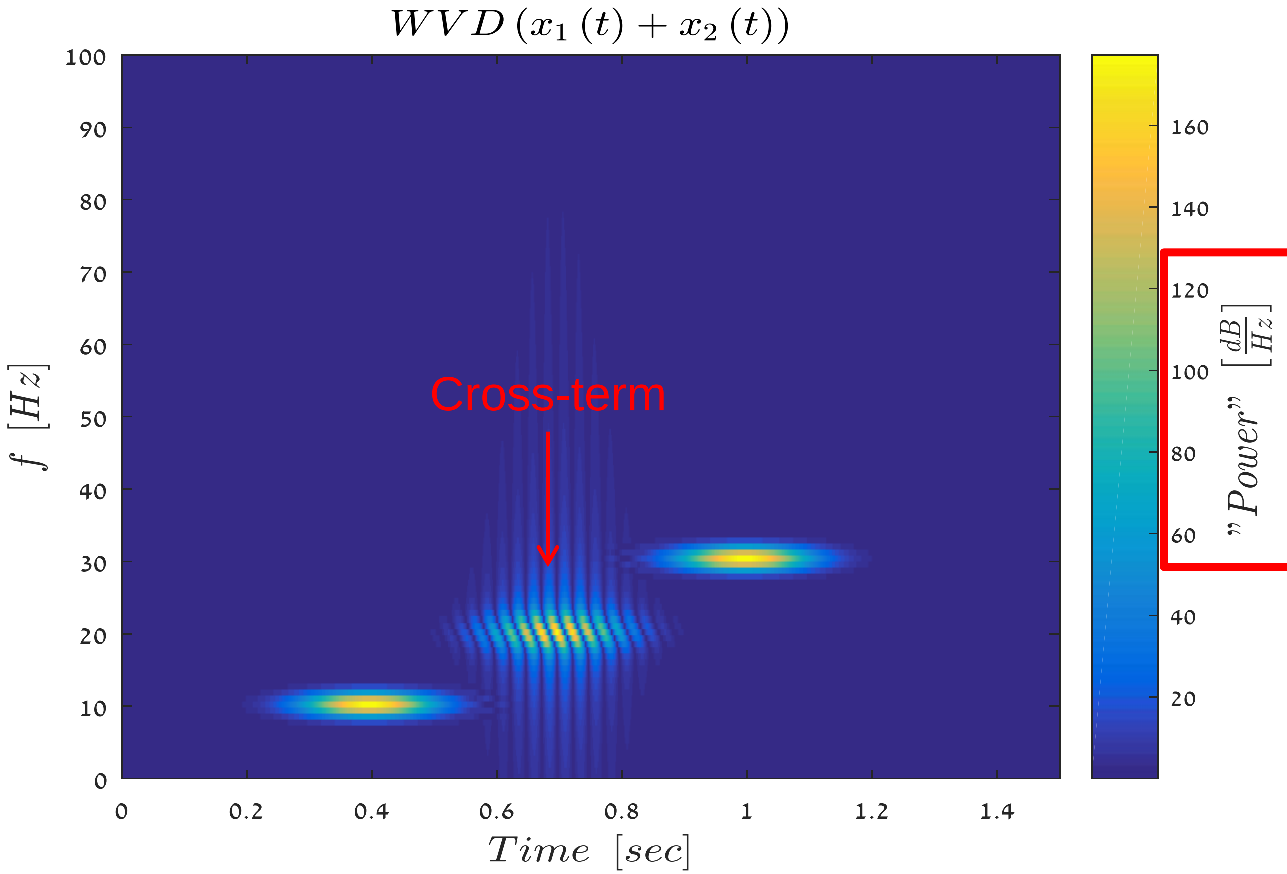
<u>חסרונות</u>:

- לערך ההתמרה בכל נקודה אין משמעות ברורה.
- אזורים שליליים חסרי משמעות (זוהי אינה צפיפות הספק).
- **Cross-terms.**

דוגמא - WVD



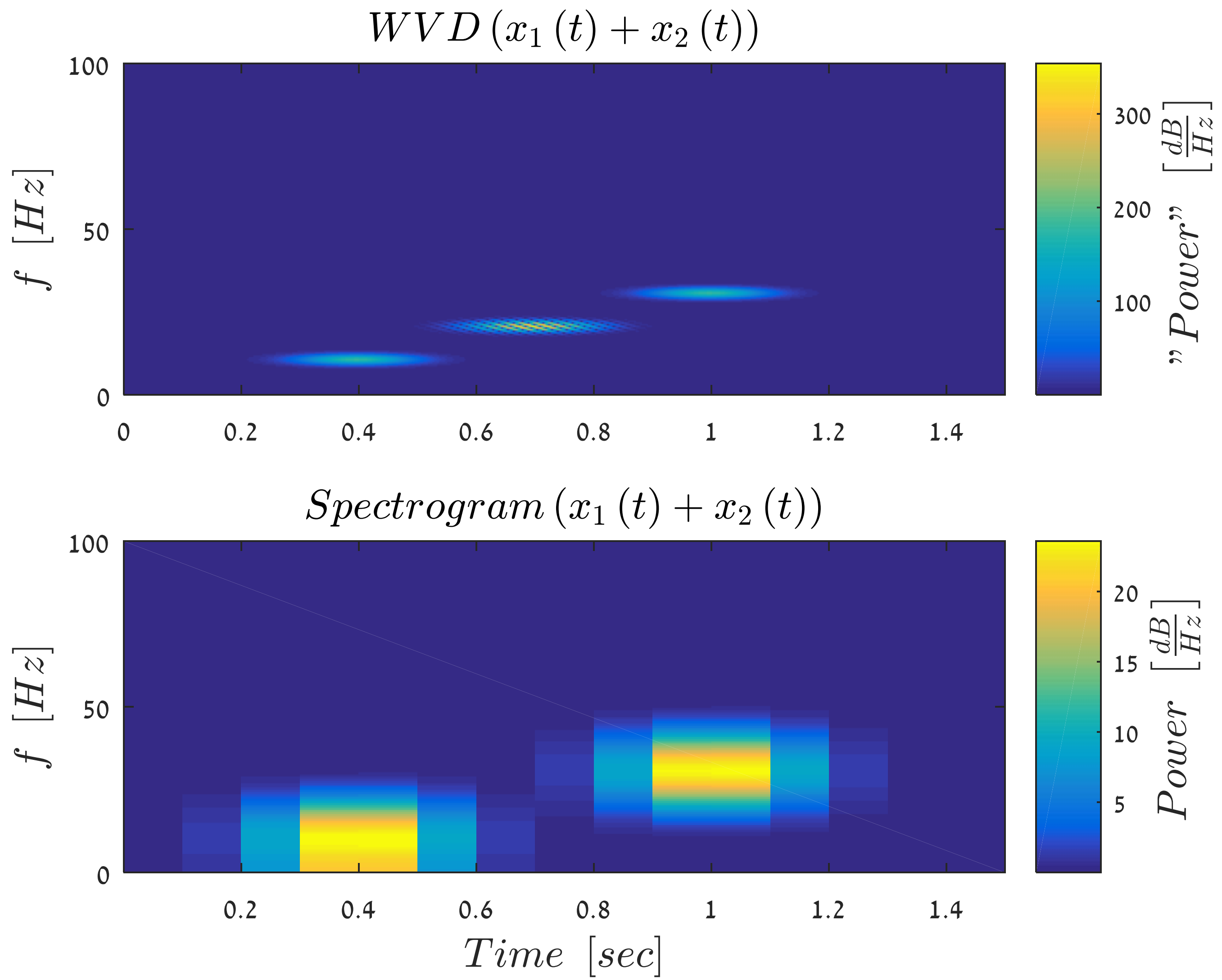
- איך תראה התמרת סיגנל הסכום?



לא באמת..
אני מציג ערך
מוחלט!

איך זה בהשוואה
לספקטרוגרמה?

WVD - דוגמא



$WVD\,(x_1\,(t)+x_2\,(t))$
100
50
0
$f\ \ [Hz]$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
300
200
100
$"Power"\ \ [\frac{dB}{Hz}]$
$Spectrogram\,(x_1\,(t)+x_2\,(t))$
100
50
0
$f\ \ [Hz]$
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
$Time\ \ [sec]$
20
15
10
5
$Power\ \ [\frac{dB}{Hz}]$

מה נלמד?

- ✓ סיכום אנליזה סטציונרית
- אנליזה לא סטציונרית
  - ←סגמנטציה אדפטיבית
  - ←Spectrogram
  - ←קורלציה רגעית
  - ←פונקצית Ambiguity
  - ←Wigner-Ville Distribution
  - סינון Cross-terms
  - הסיגנל האנליטי

WVD – סילוק Cross-terms

- ישנן שתי גישות עיקריות לסינון ה-Cross-terms:
  - דרך 1: Pseudo-WVD – הכפלה של האוטוקורלציה הרגעית בחלון:

$$\breve{W}_x(t,\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)w(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$

הכפלה בחלון ב- τ

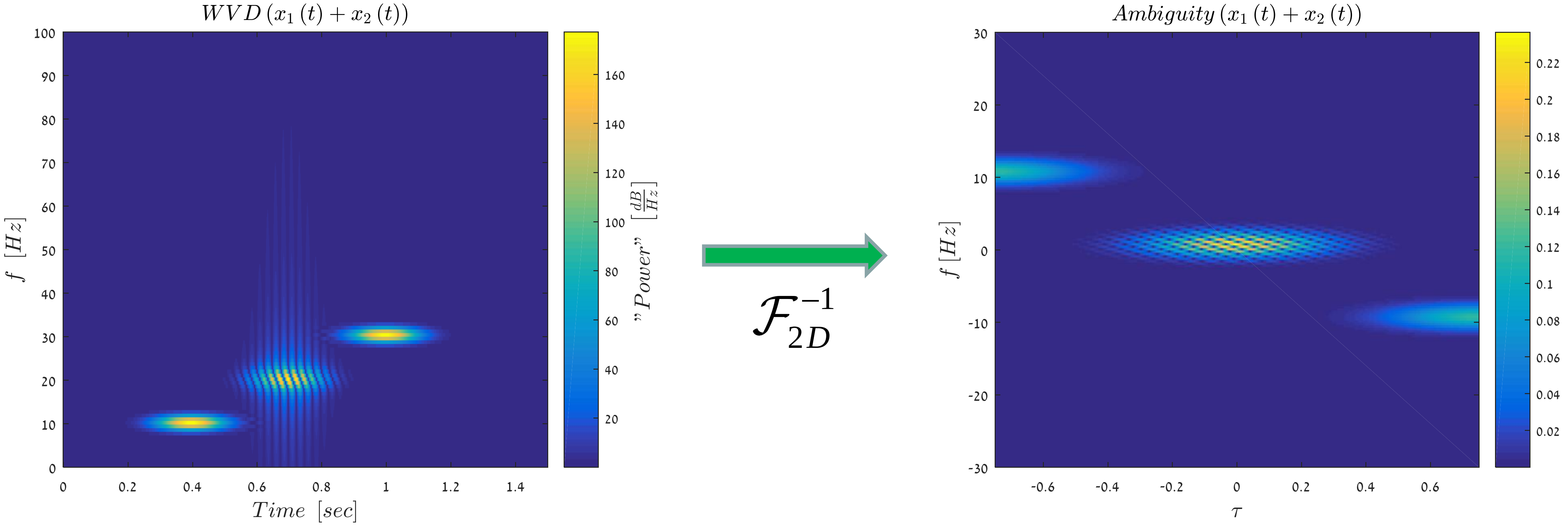
  - דרך 2: Cohen’s Class – סינון במישור ה-ambiguity:

$$W_x(t,\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{g(\tau,\nu)}A_x(\tau,\nu)e^{-j\nu t}e^{-j\Omega\tau}d\nu d\tau$$

2D LPF!

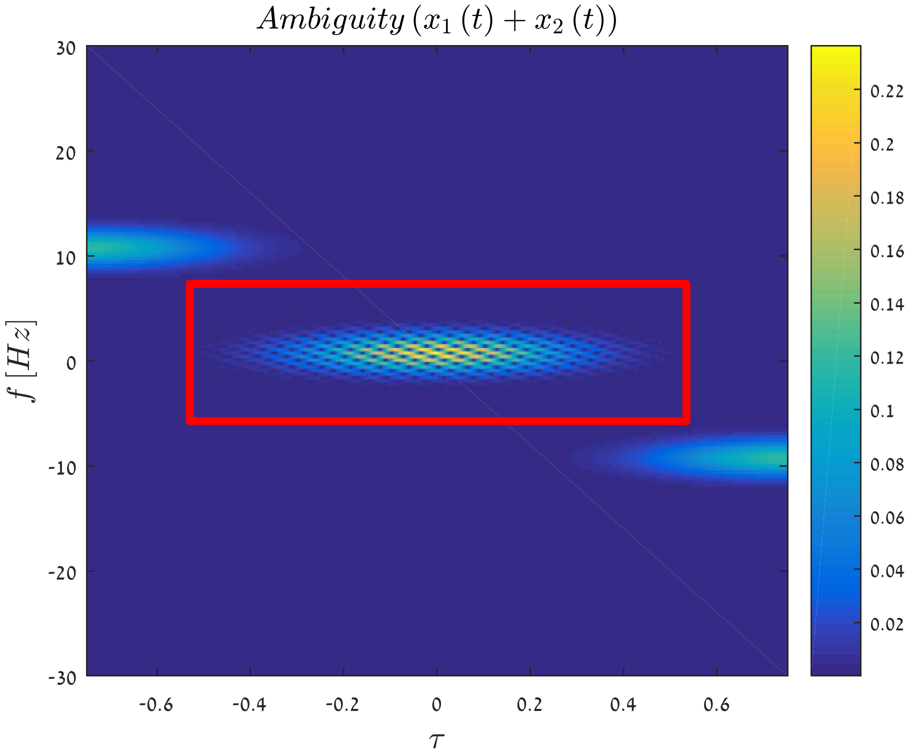
דרך 2 – המחשת שלבים

- עוברים למישור ה-Ambiguity:

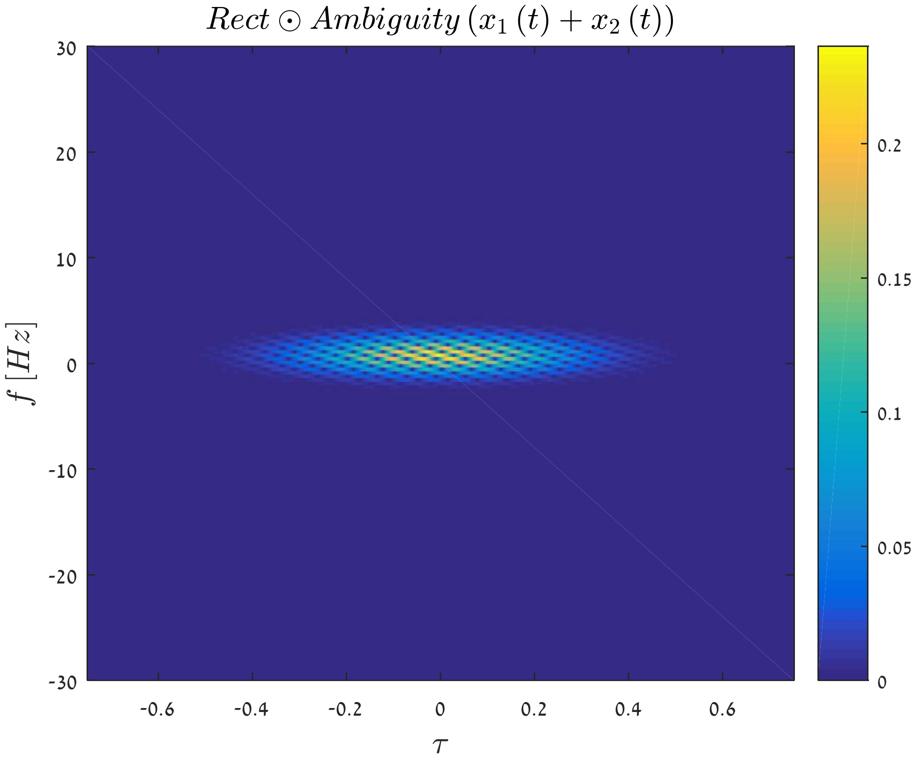


דרך 2 – המחשת שלבים

- מסלקים cross-terms ע"י הכפלה בחלון:

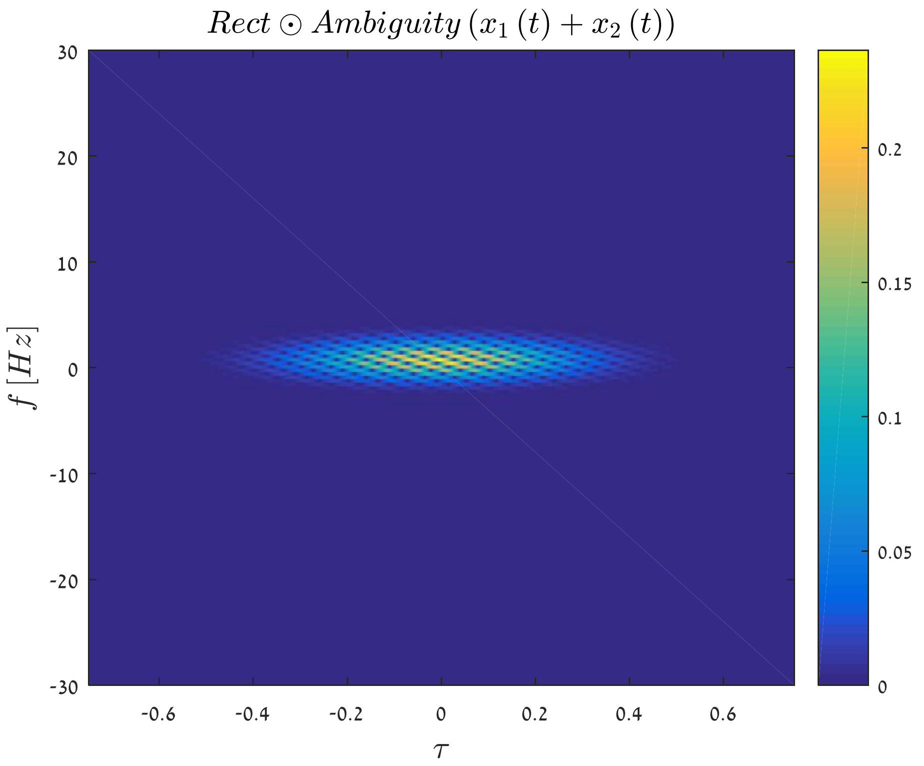


$$\odot g(\tau,\nu)$$

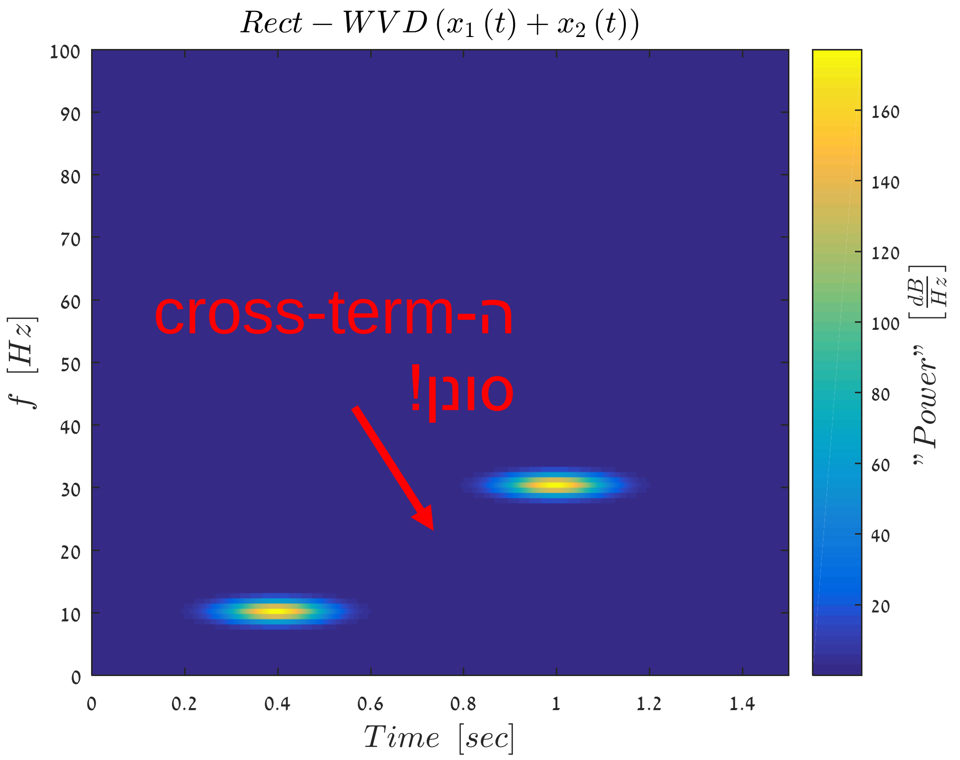


דרך 2 – המחשת שלבים

- חוזרים ל-WVD:

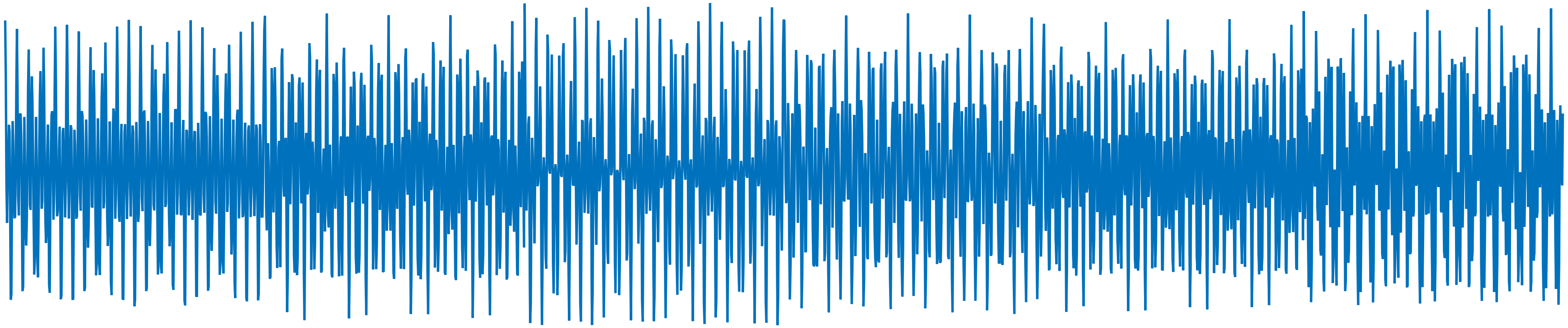


$$\mathcal{F}_{2D}$$



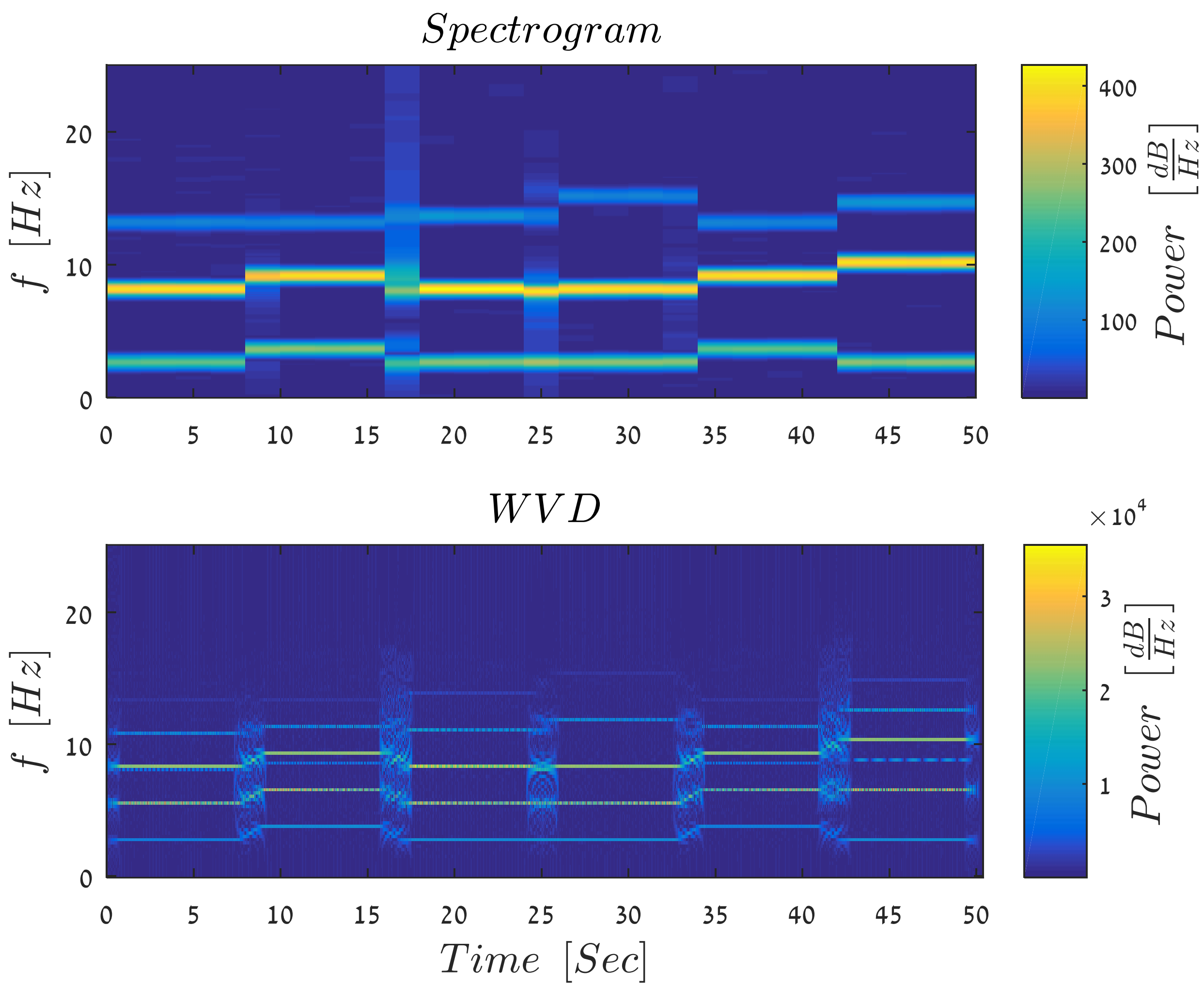
תזכורת: סיגנל ה-EEG שלנו

- היה נתון לנו הסיגנל הבא:



- רצינו למצוא את "החתיכות" הסטציונריות.
- ראינו שאפשר לעשות זאת בעזרת ספקטרוגרמה.

השוואה רזולוציה: WVD vs. Spectrogram



אין מה להשוות
ברזולוציה!

מה נלמד?

✓ סיכום אנליזה סטציונרית

• אנליזה לא סטציונרית

←סגמנטציה אדפטיבית

←Spectrogram

←קורלציה רגעית

←פונקצית Ambiguity

←Wigner-Ville Distribution

←סינון Cross-terms

– הסיגנל האנליטי

הסיגנל האנליטי

- בד"כ נהוג לחשב את התמרת WVD, ואת פונקציית ה-ambiguity עבור טרנספורמציית של הסיגנל הממשי שממירה אותו להיות קומפלקסי.
- נהוג לקרוא לסיגנל הנוצר "הסיגנל האנליטי".
- בגדול, הרעיון הוא להימנע מתדירויות שליליות באות כדי למזער את ה-cross-terms.
- דרך אחת לעשות זאת היא ע"י לקיחת התמרת פורייה, איפוס התדרים השליליים (שהם לא פיסיקליים) והכפלת החיובים ב-2.

הסיגנל האנליטי

$$h(n)=\begin{cases}\frac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

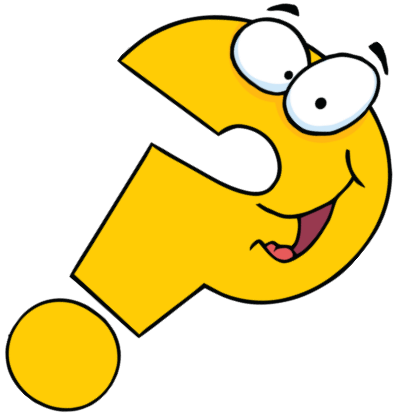
- התמרה הפוכה תתן סיגנל קומפלקסי.
- הסיגנל המתקבל יש לו חלק ממשי זהה לאות המקורי וחלק מדומה ששווה להתמרת הילברט של האות המקורי:

$$A[n]=x[n]+j\cdot \mathrm{H}\{x[n]\}$$

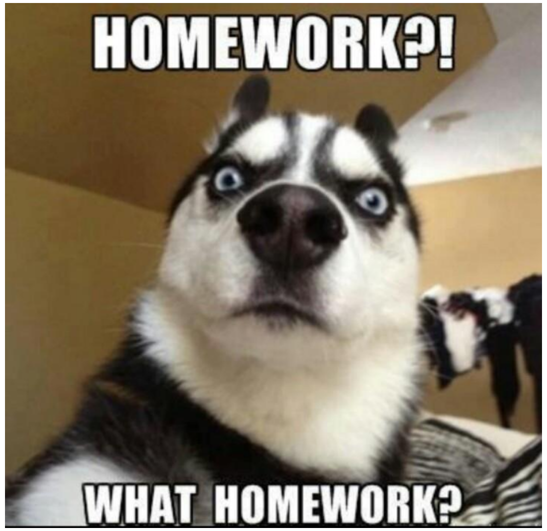
- מימוש במטלב של כל הנוסחה: $A=hilbert(x)$.
- דרך אחרת היא לממש את התמרת הילברט ולחשב את הסכום. מעשית ניתן לממש את ההתמרה ע"י FIR באורך ~80.

מה נלמד?

- ✓ סיכום אנליזה סטציונרית
- ✓ אנליזה לא סטציונרית
  - ←סגמנטציה אדפטיבית
  - ←Spectrogram
  - ←קורלציה רגעית
  - ←פונקצית Ambiguity
  - ←Wigner-Ville Distribution
  - ←סינון Cross-terms
  - ←הסיגנל האנליטי



שאלות



תרגיל בית 4 ...

תרגול 10 – תהליכי נקודה:
חלק I

נושאים עקריים

- תהליכי נקודה - הקדמה
- סוגי תהליכים
  - פואסון הומוגני
  - פואסון לא הומוגני
  - התחדשות/Renewal
  - תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

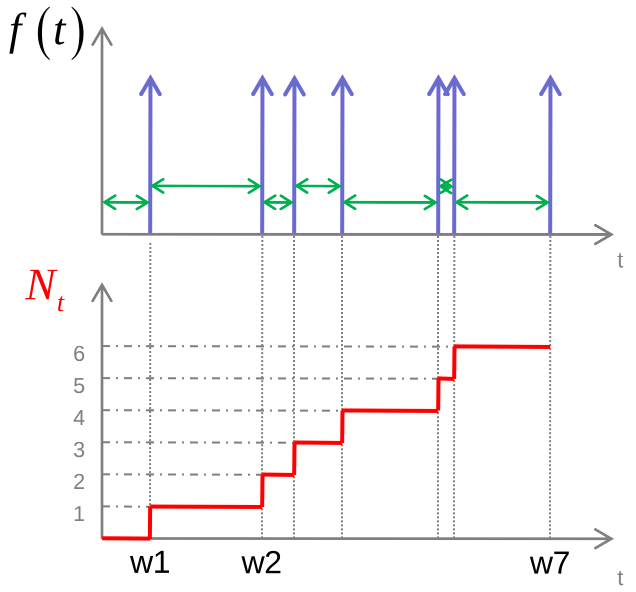
נושאים עקריים

- תהליכי נקודה - הקדמה
- סוגי תהליכים
  - פואסון הומוגני
  - פואסון לא הומוגני
  - התחדשות/Renewal
  - תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

תהליכי נקודה

- מתארים זמני התרחשות מאורעות
- אין התייחסות למאפיינים של כל מאורע אלא רק לזמן בו הוא התרחש.
- למשל:
  - פעימות לב
  - פוטנציאלי פעולה בנוירון
  - ברקים בזמן סערה
  - הצטרפות יוזרים לטור

תהליכי נקודה



- ניתן לייצג ב- 3 דרכים שונות:
  - אוסף הלמים בזמני התרחשות המאורעות

$$f(t)=\sum_i \delta(t-t_i)=\sum_{i=1}^{N}\delta(w_i)$$

$$w_t=\left[w_1 \dots w_{N_t}\right]-Event\ Times$$

  - סדרת מרווחים בין מאורעות

$$\{\tau_i\}_{i=1}^{N} \qquad \tau_i=w_i-w_{i-1}$$

  - תהליך N_t הסופר את מס' הארועים בקטע $[0,t)$

תהליכי נקודה

- בד"כ לתהליכי נקודה ישנו מנגנון פיזיקלי רציף ברקע המתפתח בזמן, וכאשר הוא עובר סף מסוים מתרחש אירוע.
- למרות שחלק מהמשתנים מקבלים ערכים רציפים וחלק מהם מקבלים ערכים בדידים, התהליך מוגדר הסתברותית באופן שקול לפי כל אחד משלושת הייצוגים.
- לפיתוח אינטואיציה לגבי אותות מסוג זה, נהוג לחשוב על ייצוג בזמן דיסקרטי של התהליך, על ידי חלוקת האינטרוול $\left[0,T\right)$ ל-n מקטעים קצרים באורך $\Delta t=\frac{T}{n}$ עם סט הזמנים $t_k=k\cdot\Delta t,\ k=1,\dots,n$.

תהליך נקודה רגולרי

- הסתברות למאורע בודד בקטע קצר $[t, t+\Delta t]$

$$\Pr\left(N_{t+\Delta t} - N_t = 1\right) = \mu\left(t; N_t, w_t\right) \cdot \Delta t$$

- הסתברות לחוסר מאורע:

$$\Pr\left(N_{t+\Delta t} - N_t = 0\right) = 1 - \mu\left(t; N_t, w_t\right) \cdot \Delta t - o\left(t, \Delta t\right)$$

- ובגלל שהקטע מאוד קצר:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o\left(t, \Delta t\right)}{\Delta t} = 0} \qquad \Pr\left(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2\right) = o\left(t, \Delta t\right)$$

תהליך נקודה רגולרי

- עבור חלוקה דיסקרטית של האינטרוול, אפשר לחשוב על התהליך כעל סדרת של מ"מ ברנולי עם הסתברות להצלחה: $\mu\left(t;N_t,w_t\right)\cdot\Delta t$.
- מתנאי הרגולריות מובטח לנו שעבור גודל Bin מספיק קטן נקבל תהליך דיסקרטי שניתן לסדר אותו באופן כרונולוגי.
- עבור מרבית המערכות הפיסיקליות, ובפרט עבור ירי נוירונים, ניתן לבחור גודל Bin שיקיים את התנאים הנדרשים.
- למשל עבור תהליך של ירי פו"פ בנוירון, בין שני אירועים עוקבים יש את התקופה הרפרקטורית שבה ידוע לנו שלא יתבצע ירי.

Stochastic intensity function

- $\mu(t; N_t, w_t)$ - נקראת פונקציה "העוצמה" של התהליך.
- תכונות
  - פונקציה אי-שלילית בעלת יחידות של מספר אירועים ליחידת זמן.
  - ניתן להסתכל עליה גם כעל פונקציית קצב רגעי או כהסתברות רגעית למאורע אחד.
  - מגדירה לחלוטין את המבנה הסטטיסטי של תהליך נקודה.
  - אם הפונקציה תלויה באופן מפורש בזמן t אזי התהליך לא סטציונרי.
  - ההתניה ב-N_t ו- w_t מאפשרת לה להכיל תלות בהיסטוריה של התהליך.

סוגי תהליכי נקודה

- אנו נאפיין תהליכי נקודה לפי פונקציית הקצב הרגעי. כאמור פונקציית הקצב הרגעי יכולה להיות תלויה גם בזמן, וגם בעבר/בהיסטוריה של התהליך.
- סוגים עיקריים:
  - תהליך פואסון הומוגני - הקצב קבוע, לא תלוי בזמן או בהיסטוריה.
  - תהליך פואסון לא הומוגני – הקצב תלוי בזמן, אך לא תלוי בהיסטוריה.
  - תהליך התחדשות/renewal – הקצב יכול להיות תלוי בזמן, אך התלות בהיסטוריה היא מאורע אחד אחורה בלבד.
  - תהליך נקודה כללי – הקצב הוא פונקציה של כל גורם משפיע: זמן, היסטוריה, גירוי חיצוני, וכו'..
- אנו נראה בהמשך דוגמאות של מודלים עבור תהליכים כלליים.

נושאים עקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- סוגי תהליכים
  - פואסון הומוגני
  - פואסון לא הומוגני
  - התחדשות/Renewal
  - תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

תהליך פואסון

- תהליך פואסון כללי מקיים: $\mu(t;N_t,w_t)=\lambda(t)$.
- התהליך הוא חסר זיכרון (לא תלוי בהיסטוריה אלא בזמן הרגעי). לכן, המאורעות בקטעים לא חופפים הם בת"ס.
- במקרה בו הקצב של התהליך תלוי בזמן, התהליך נקרא תהליך פואסון לא הומוגני. במקרה הזה התהליך הוא לא סטציונרי.
- עבור תהליכים בהם הקצב הרגעי $\lambda(t)$ הוא לא פונקציה דטרמיניסטית אלא מ"מ בעצמו, התהליך נקרא Doubly Stochastic Poisson Process.
- שאלה: האם תהליכי פואסון הם רגולרים?
  – **לא!** כיוון שאין תלות בהיסטוריה. ייתכן מרווח באורך 0 בין אירוע לאירוע.

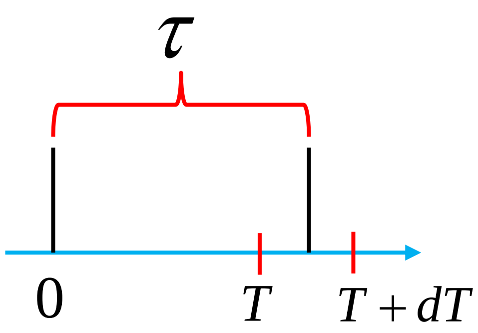
תהליך פואסון הומוגני

- תהליך פואסון הומוגני מקיים: $\mu(t;N_t,w_t)=\boxed{\lambda(t)\equiv\lambda}$.
- התפלגות מספר המאורעות במרווח זמן באורך Δt, עבור תהליך פואסון הומוגני:

$$P\Big(\underbrace{N(t+\Delta t)-N(t)}_{\text{מרווח זמן באורך } \Delta t}=k\Big)=\frac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^k}{k!}$$

- במקרה זה התהליך הוא סטציונרי כיוון שהפילוג של מספר המאורעות/תהליך המנייה בכל מסרק זמנים באורך t הוא זהה.
- שאלה: איך יתפלגו המרווחים במקרה הזה?

תהליך פואסון הומוגני



- יהי τ המרווח בין המאורע ה-$k-1$ והמאורע ה-k.
- ההסתברות לקבל מרווח באורך T:

$$P\left(T\le\tau<T+dT\right)=P\left(N_T=0\right)\cdot P\left(N_{T+dT}-N_T=1\right)=$$

$$=\frac{\left(\lambda T\right)^0e^{-\lambda T}}{0!}\cdot\frac{\left(\lambda dT\right)^1e^{-\lambda dT}}{1!}=\lambda dTe^{-\lambda T-\lambda dT},T\ge0$$

- על מנת לקבל את ההסתברות הדרושה נשאיף $dT\to0$:

$$P_\tau\left(\tau'=T\right)=\lim_{dT\to0}\left(\frac{P\left(T\le\tau<T+dT\right)}{dT}\right)=\lim_{dT\to0}\left(\frac{\lambda dTe^{-\lambda T-\lambda dT}}{dT}\right)=\lambda e^{-\lambda T},\ T\ge0$$

כלומר קיבלנו שהמרווחים מתפלגים: $P_\tau\left(\tau'\right)\sim\exp\left(\lambda\right)$!

תהליך פואסון הומוגני

- מה עם τ המרווח בין המאורע ה- $k-n$ והמאורע ה-k? איך הוא יתפלג?
- רמז: איך מתפלג סכום של מ"מ אקספוננציאלים i.i.d?

$$X_1,....,X_n \overset{i.i.d}{\sim} \exp(\lambda)$$
$$\rightarrow Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\lambda,n)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(n)} & y\geq 0 \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad ,\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

- התוחלת והשונות של התפלגות גמא:

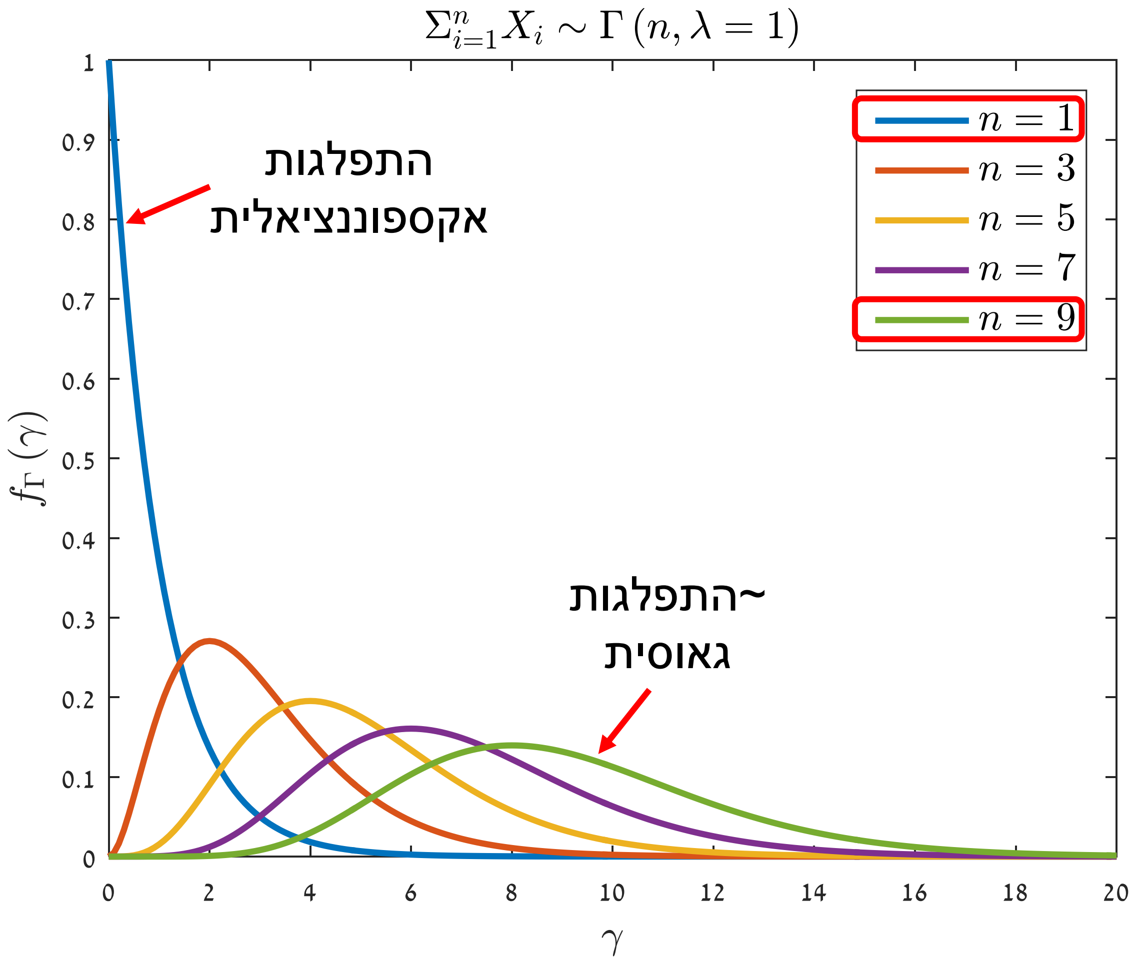
$$E[Y]=\frac{n}{\lambda}, \qquad Var(Y)=\frac{n}{\lambda^2}$$

- איך נראית פונקציית הצפיפות?

התפלגות גמא

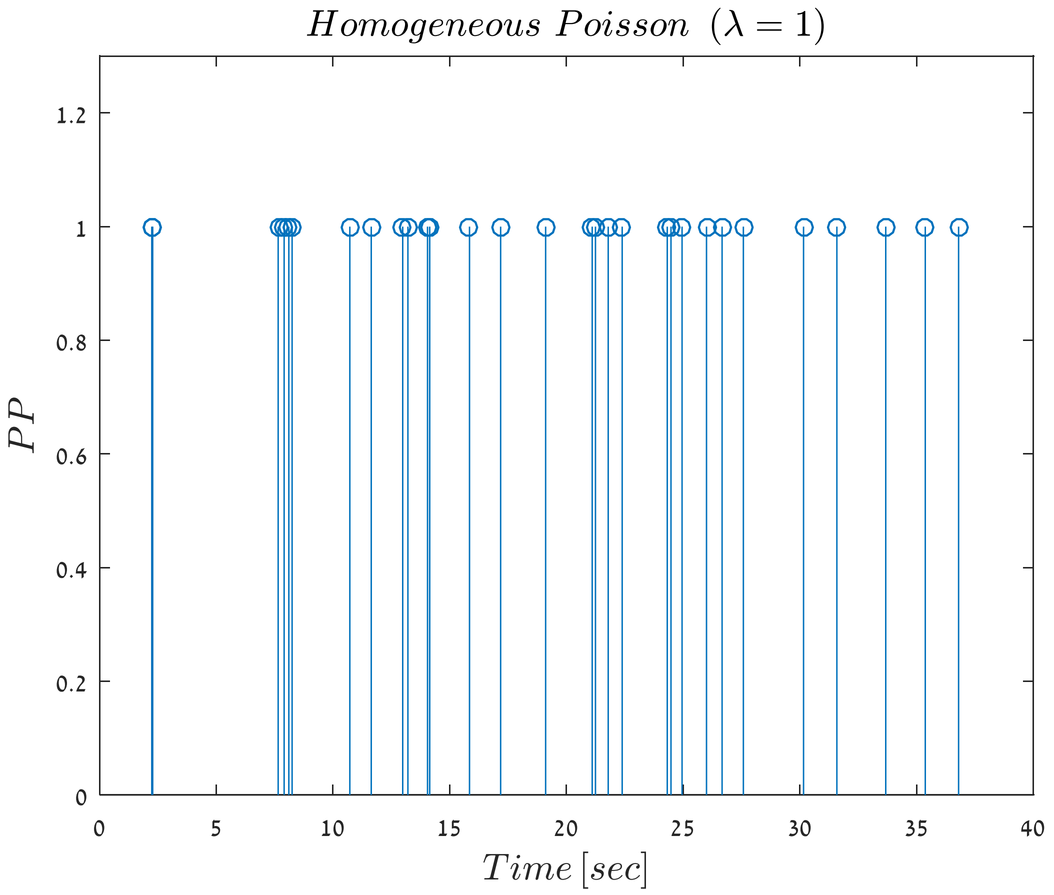
$$X_1,\ldots,X_n \overset{i.i.d}{\sim} \exp(\lambda)$$

$$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\lambda,n)$$



דוגמא

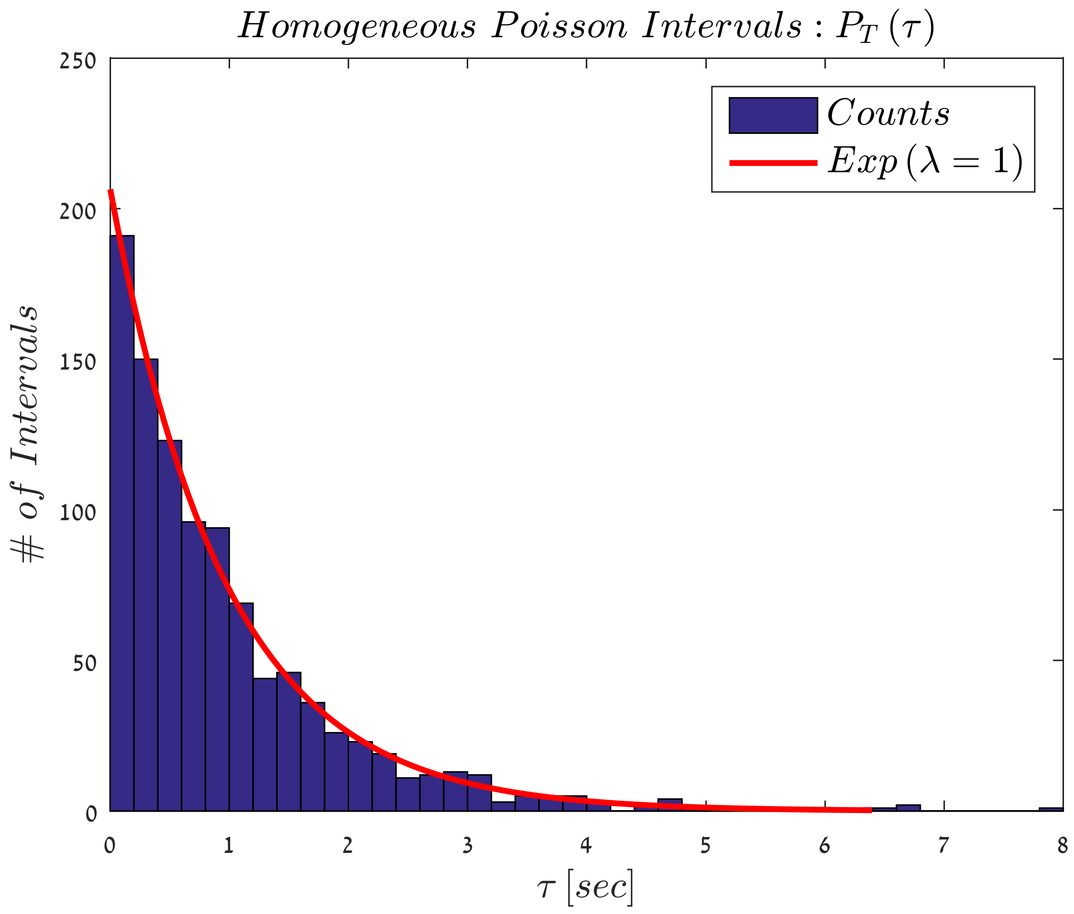
- איך תראה פונקציית מדגם של תהליך פואסון הומוגני?



...

דוגמא

- מה עם היסטוגרמת המרווחים?



נושאים עקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - – פואסון לא הומוגני
  - – התחדשות/Renewal
  - – תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

תהליך פואסון לא הומוגני

- תהליך פואסון הומוגני הוא סוג של "הרעש הלבן" של אותות נקודה: נוח מאוד לנתח תיאורטית את התכונות שלו, אבל בפועל רוב התהליכים מכילים מבניות מסויימת.
- עבור תהליך פואסון הומוגני הנחנו שתי הנחות בסיסיות:
  - תהליך המנייה הוא סטציונרי
  - אין תלות בין מספר האירועים במקטעים לא חופפים
- השלב הראשון להרחבה משפחת המודלים הוא ביטול ההנחה שהתהליך סטציונרי, ע"י כך שהקצב של התהליך יהיה תלוי בזמן: $\mu\left(t;N_t,w_t\right)=\lambda\left(t\right)$.
- מה הפילוג של תהליך המניה ושל המרווחים במקרה הזה?

תהליך פואסון לא הומוגני

- הקצב הרגעי של התהליך נתון ע"י: $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \left(\frac{P\left(\Delta N_{(t,t+\Delta t]} = 1\right)}{\Delta t} \right)$

- נזכר בחשיבה הדיסקרטית שהצענו קודם: על ידי חלוקת האינטרוול $\left[0,T\right)$ ל-n מקטעים קטנים באורך $\Delta t = T/n$ עם סט הזמנים $t_k = k \cdot \Delta t,\ \ k = 1,\dots,n$, ניתן להגדיר את תהליך המניה של תהליך פואסון לא הומוגני בצורה הבאה:

$$\Delta N_k = Bern\left(p_k = \lambda(t_k) \cdot \Delta t \right)$$

$$N(t_k) = \sum_{i=1}^{k} \Delta N_i \xrightarrow{\Delta t \to 0^+} N(t) \sim Poiss\left(\int_0^t \lambda(t')\,dt' \right)$$

- יש לשים לב כי למרות שהתהליך לא סטציונרי, מספר המאורעות באינטרוולים לא חופפים עדיין בת"ס!

תהליך פואסון לא הומוגני

- מה עם התפלגות המרווחים?
  - כיוון שהתהליך לא סטציונרי, נגדיר את הפילוג של המאורע הבא בהינתן זמן המאורע האחרון.
- סימנו את זמני המאורעות ע"י $w_t = \left[w_1 \ldots w_{N_t} \right]$, ובפרט את הזמן של המאורע האחרון ע"י w_{N_t} ואת הזמן של המאורע הבא ע"י w_{N_t+1}.
- נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת של w_{N_t+1}:

ההסתברות שמאז המאורע האחרון לא היה מאורע בקטע: $\left(w_{N_t}, w \right]$

$$\Pr\left(w_{N_t+1} > w \mid w_{N_t} \right) = \Pr\left(\Delta N_{\left(w_{N_t}, w \right]} = 0 \right) = \exp\left\{ -\int_{w_{N_t}}^{w} \lambda(t)\, dt \right\}$$

$$F_{w_{N_t+1} \mid w_{N_t}}\left(w \mid w_{N_t} \right) = \Pr\left(w_{N_t+1} \le w \mid w_{N_t} \right) = 1 - \exp\left\{ -\int_{w_{N_t}}^{w} \lambda(t)\, dt \right\}$$

תהליך פואסון לא הומוגני

- ע"י גזירה לפי w מקבלים את פונקציית צפיפות ההסתברות:

$$f_{w_{N_t+1}|w_{N_t}}\left(w \mid w_{N_t}\right)=\lambda\left(w\right)\cdot\exp\left\{-\int_{w_{N_t}}^{w}\lambda\left(t\right)dt\right\}$$

- או באופן שקול ניתן להציב $\tau_{N_t+1}=w_{N_t+1}-w_{N_t}$, ולקבל:

$$\boxed{f_{\tau_{N_t+1}}\left(\tau \mid w_{N_t}\right)=\lambda\left(w_{N_t}+\tau\right)\cdot\exp\left\{-\int_{w_{N_t}}^{w_{N_t}+\tau}\lambda\left(t\right)dt\right\}}$$

- שאלה: מה יקרה אם נציב קצב קבוע?

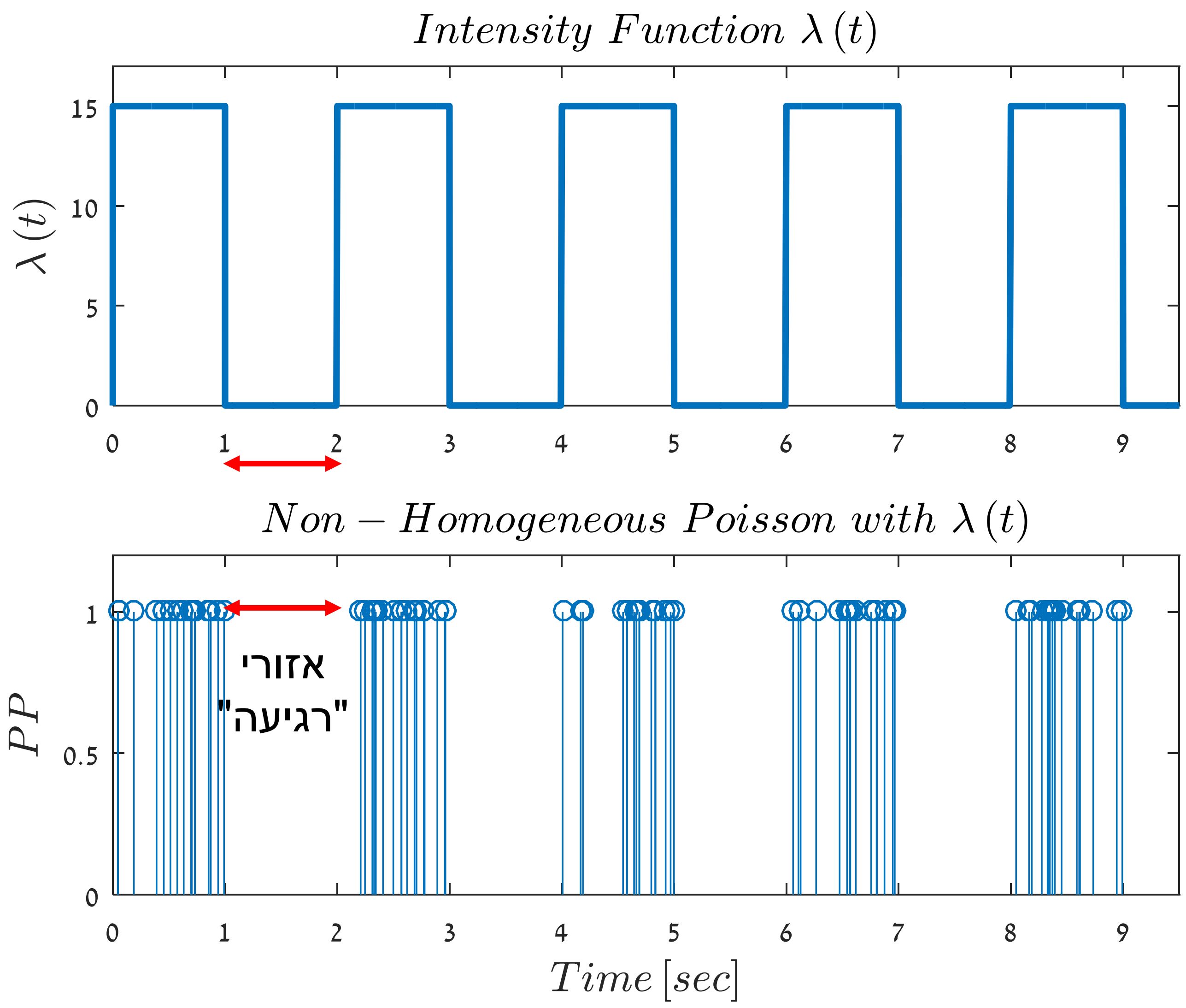
תהליך פואסון לא הומוגני

- עבור הצבה של $\lambda(t) \equiv \lambda$:

$$f_{\tau_{N_t+1}}\left(\tau \mid w_{N_t}\right) = \lambda\left(w_{N_t} + \tau\right) \cdot \exp\left\{-\int_{w_{N_t}}^{w_{N_t}+\tau} \lambda(t)\,dt\right\} =$$
$$= \lambda \cdot \exp(-\lambda\tau)$$

- מרווחים אקספוננציאלים i.i.d ← כלומר מקבלים חזרה את המקרה ההומוגני.
- הערה: למרות שסדרת המרווחים בתהליך פואסון לא הומוגני היא לא סטציונרית, המרווחים הם עדיין בת"ס כיוון שאין תלות בהיסטוריה.
- שאלה: איך יראה תהליך מסוג זה? תלוי בפונקציית הקצב!

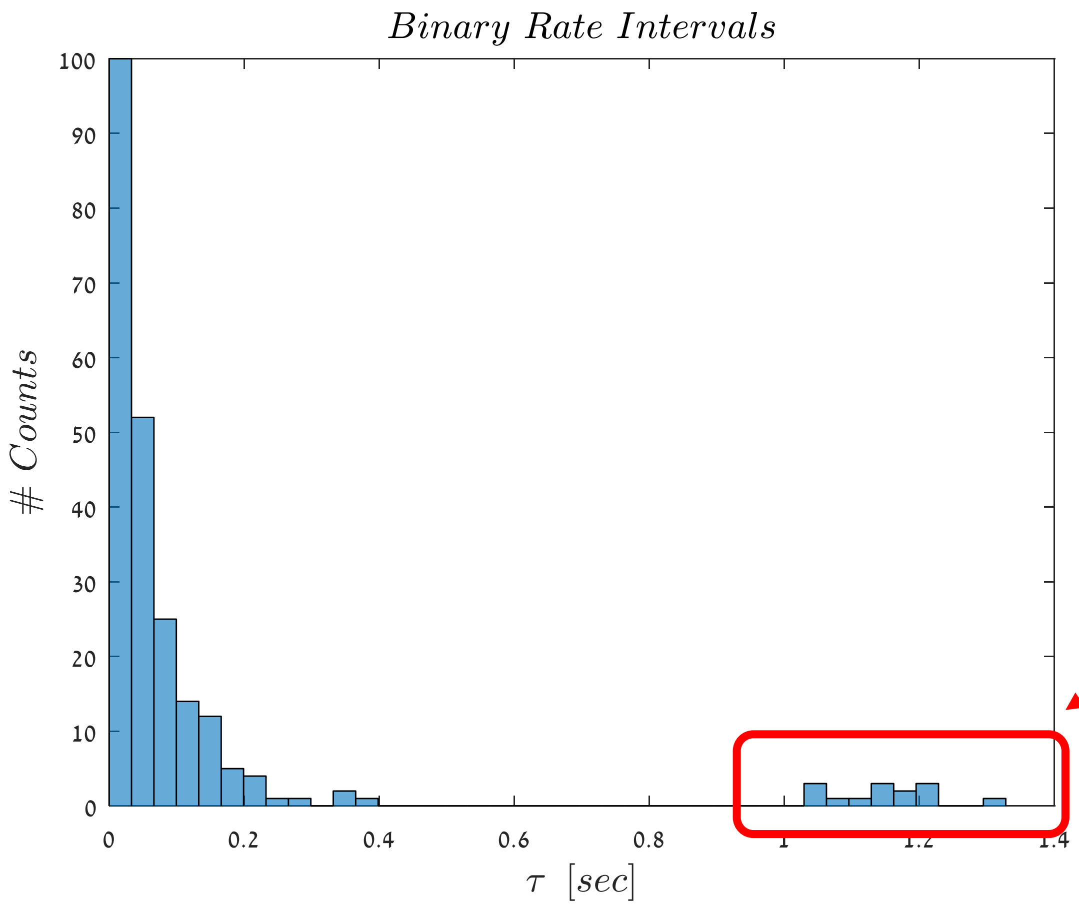
דוגמא



$Intensity\ Function\ \lambda(t)$
$\lambda(t)$
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$Non-Homogeneous\ Poisson\ with\ \lambda(t)$
PP
1
0.5
0
אזורי
"רגיעה"
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$Time\ [sec]$

דוגמא

• מה עם היסטוגרמת המרווחים?



המרווחים בין
שני מחזורים של
פונקציית הקצב.

נושאים עקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - ←פואסון לא הומוגני
  - – התחדשות/Renewal
  - – תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

תהליך Renewal

- עד כה עסקנו בתהליכי פואסון בהם הקצב לא תלוי בהיסטוריה.
- במערכות פיסיקליות בד"כ יש מבנה סטטיסטי מעניין שעל מנת להסביר אותו במודל, אין מנוס מלהכליל את פונקציית הקצב להכיל תלות בהיסטוריה של התהליך (למשל תקופה רפרקטורית בפו"פ).
- התלות בהיסטוריה הפשוטה ביותר שהיא לא טריוויאלית: תלות רק בזמן התרחשות המאורע האחרון:

$$\boxed{\mu\left(t;N_t,w_t=\left[w_1,\ldots,w_{N_t}\right]\right)=\mu\left(t;N_t,w_{N_t}\right)}$$

- במקור נועדו לאפיין את התדירות בה מערכת הנדסית מגיעה למצב כשל כפונקציה של זמן.

תהליך Renewal

- ההנחה שהמרווחים בין מאורעות הם בת"ס עדיין נכונה, מה שכן ההסתברות לקבלת מאורע בכל נקודה בזמן כעת תלויה בזמן המאורע האחרון.
- נוח לתאר תהליכים מסוג זה ע"י פונקציית ההסתברות של המרווחים.
- נהוג עבור תהליכי התחדשות להגדיר את פונקציית העוצמה של התהליך כתלות במרווחי העבר במקום בזמני התרחשות המאורעות:

$$\mu\left(t;N_t,w_t\right)\rightarrow\tilde{\mu}\left(t;N_t,\boldsymbol{\tau}=\left[\tau_1,\ldots,\tau_{N_t+1}\right]\right)=f\left(t,\tau_{N_t+1}\right)$$

- עבור תהליכי התחדשות סטציונרים מקבלים את פונקציית ה-Hazard:

$$\tilde{\mu}\left(t;N_t,\boldsymbol{\tau}=\left[\tau_1,\ldots,\tau_{N_t+1}\right]\right)=h\left(t-w_{N_t}\right)=h\left(\tau_{N_t+1}\right)$$

תהליך Renewal

- באופן דומה לפיתוח במקרה של תהליך פואסון לא הומוגני, התפלגות המרווחים מקיימת:

תהליך התחדשות סטציונרי

$$\boxed{f_{\boxed{\tau_{N_t+1}\equiv\tau}}(\tau')=h(\tau')\cdot\exp\left\{-\int_0^{\tau'}h(\alpha)d\alpha\right\}}$$

- לחילופין ניתן לרשום את פונקציית ה-Hazard כתלות בהתפלגות המרווחים:

$$\boxed{h(\tau')=\frac{f_\tau(\tau')}{\int_{\tau'}^{\infty}f_\tau(\alpha)d\alpha}}$$

- בד"כ פונקציית ה-Hazard מספקת יותר אינטואיציה על מבניות התהליך מהיסטוגרמת המרווחים.

תהליך Renewal

- פונקציית ה-Hazard פרופורציונית להסתברות של מרווח להיות באורך τ בהינתן שהאורך שלו הוא לפחות τ.
- עבור פונקציית Hazard קבועה בזמן נקבל תהליך חסר זיכרון כמו למשל פואסון הומוגני.
- לעומת זאת, עבור פונקציית Hazard עולה ליניארית נקבל תהליך שיורה בקצב גבוהה עם אינטרוולים ממש קצרים ביחס לתהליך פואסון הומוגני:

$$Renewal: \quad h(\tau) = K \cdot \tau \longrightarrow f_{\tau_{N_t+1}}(\tau) = K \cdot \tau \exp\left\{-K\boxed{\tau^2}\big/2\right\}$$

$$Homogeneous\ \ Poisson: f_{\tau_{N_t+1}}(\tau) = K \cdot \exp\left\{-K\boxed{\tau}\right\}$$

דעיכה
הרבה יותר
מהירה!

דוגמא

- נתבונן בפונקציית ה-Hazard הבאה:

$$h(\tau)=\lambda_0\cdot u(\tau-\Delta)$$

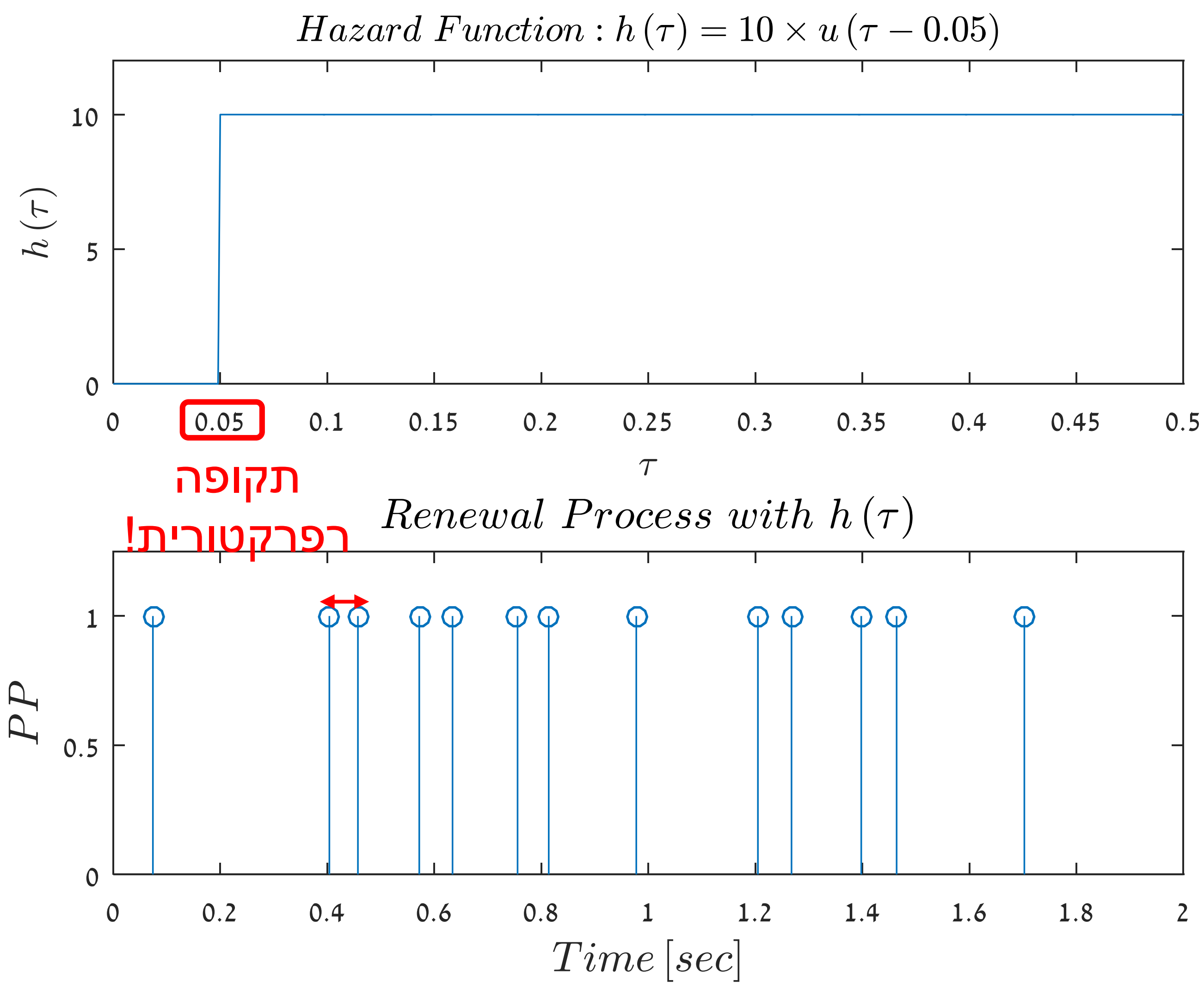
$$u(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0\\ 0 & \tau\le 0\end{cases}$$

- צפיפות ההסתברות של המרווחים נתונה ע"י:

$$f_{\tau_{N_t+1}}(\tau)=h(\tau)\cdot\exp\left\{-\int_0^{\tau}h(\alpha)\,d\alpha\right\}=\lambda_0\exp\{-\lambda_0\cdot(\tau-\Delta)\}\cdot u(\tau-\Delta)$$

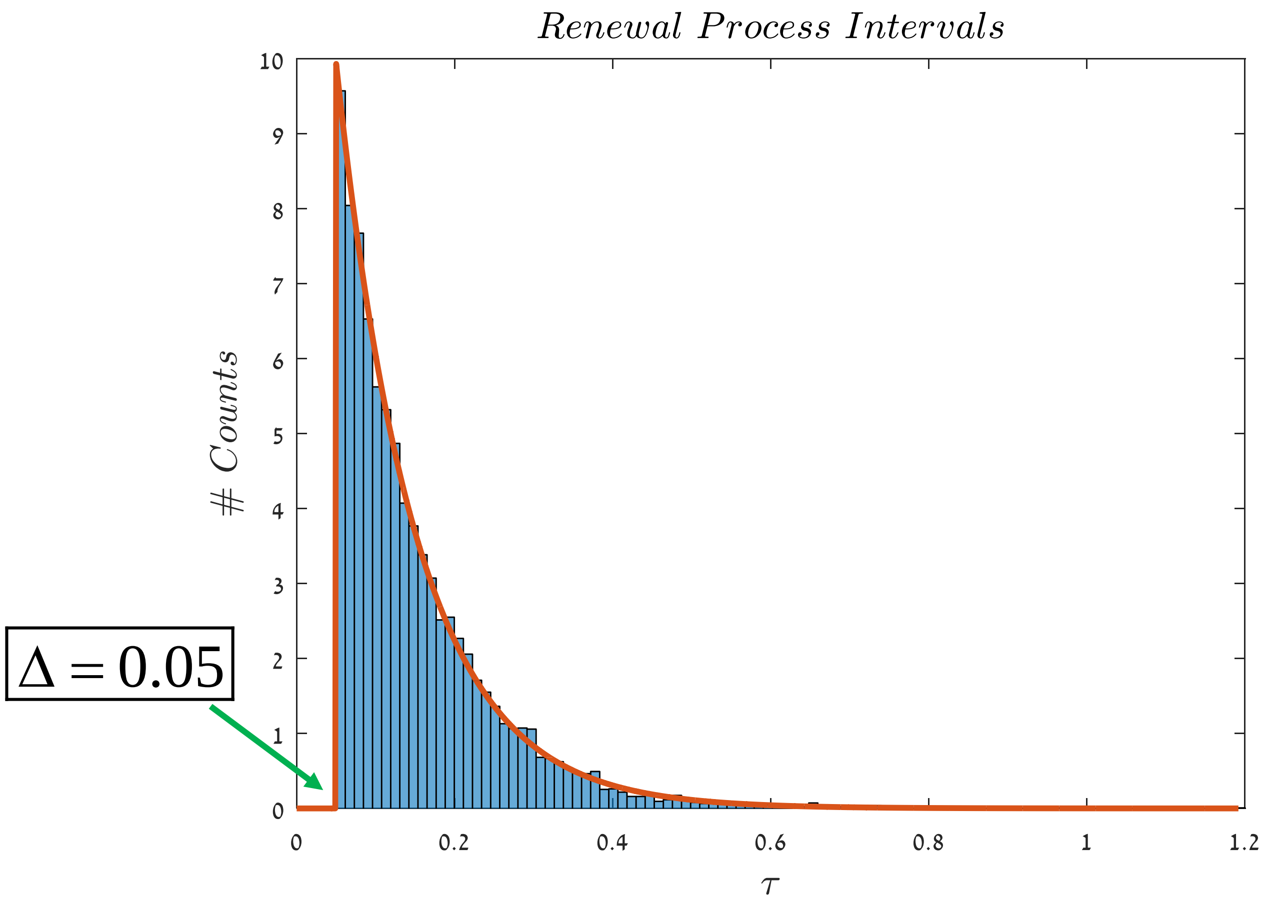
- אחלה..איך זה מועיל?
  – ניתן בעזרת פונקציה זו למדל נוירון עם תקופה רפרקטורית!

דוגמא


$Hazard\ Function : h(\tau) = 10 \times u(\tau - 0.05)$
$h(\tau)$
10
5
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
τ
תקופה
רפרקטורית!
$Renewal\ Process\ with\ h(\tau)$
PP
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
$Time\ [sec]$

דוגמא

- איך תראה היסטוגרמת המרווחים?



נושאים עיקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - ←פואסון לא הומוגני
  - ←התחדשות/Renewal
  - תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

תהליך נקודה כללי

- במקרה הכללי נתונה לנו סדרת של מאורעות ויתכנו כל מני מודלים שיסבירו את הנתונים.
- כיוון שפונקציית הקצב מגדירה את כל המבנה הסטטיסטי של התהליך, מספיק למדל אותה על מנת לאפיין את הדאטא שבידינו.
- על מנת למדל את פונקציית הקצב צריך לרשום את כל הפקטורים האופציונלים שיכולים להשפיע: תלות בהיסטוריה, מיקום מרחבי, ירי ב-bursts, גירוי חיצוני, אינטרקצייה עם תהליכי נקודה אחרים, סיגנלים אחרים שנמדדים בו-זמנית, וכו'...
- בנוירונים נהוג לקרוא לפונקציה שמקשרת בין הגירוי לירי receptive field.

תהליך נקודה כללי

- בהינתן פונקציית מדגם כלשהי, ומודל עבור קצב התהליך:

$$\lambda\left(t \mid H_t\right)=\mu\left(t; N_t, w_t, \ldots\right), \quad H_t - History\ of\ \ Factors$$

- ניתן לרשום את פונקציית ה-likelihood של המדגם בצורה הבאה:

$$L\left(w_1,\ldots,w_{N(T)}\right)=\underbrace{\prod_{i=1}^{N(T)}\left(\lambda\left(w_i \mid H_{w_i}\right)\right)}_{\text{הסתברות לקבלת המאורעות בדיוק בזמנים שהתקבלו}}\cdot\underbrace{\exp\left\{-\int_0^T \lambda\left(t; H_t\right)dt\right\}}_{\text{הסתברות לא לקבל מאורעות בשום זמן אחר}}$$

- בהמשך נראה שימושים של הפונקציה בבחינת מודלי קצב של אותות נקודה.

דוגמא 1

- מודל "אוטו-רגרסיבי" לקצב נוירונים במערכת הראייה תחת תנאי הארה קבועים:

$$\mu_k = \exp\left\{\boxed{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{120} \boxed{\alpha_j} \Delta N_{k-j}\right\}$$

- איך נמצא את המקדמים בהינתן מדגם ספייקים?
  – שערוך Maximum Likelihood!

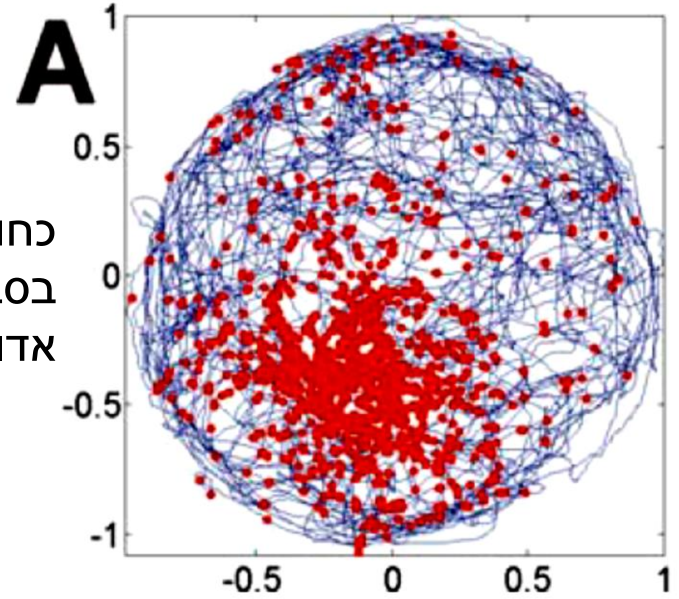
דוגמא 2

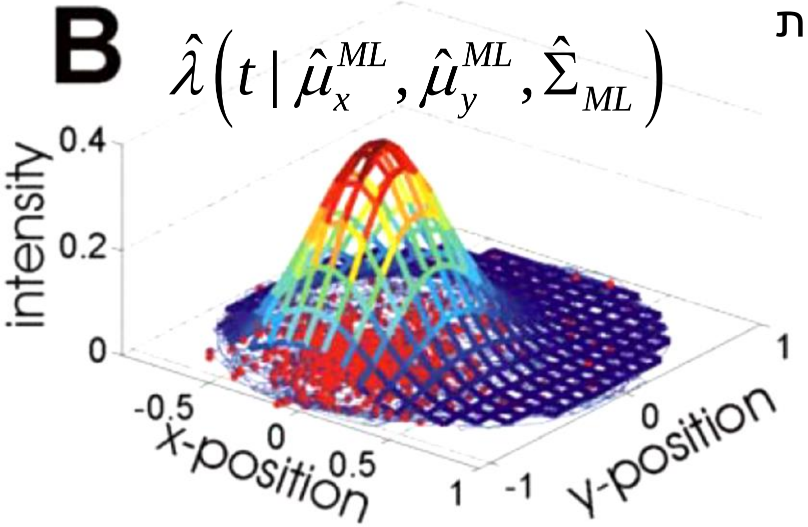
- נוירונים בהיפוקמפוס של עכברים יורים כתלות במיקום המרחבי:

$$\lambda(t \mid H_t) = \boxed{\lambda(t)} = \exp\left\{\alpha - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x(t)-\mu_x & y(t)-\mu_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x(t)-\mu_x \\ y(t)-\mu_y \end{pmatrix}\right\}$$

איזה סוג אות
נקודה זה?
פואסון לא
הומוגני!

כחול – מסלול העכבר
בסביבה מעגלית.
אדום – ירי פו"פ.





תהליך נקודה כללי

מתואר ע"י $\mu(t;N_t,w_t)$ או $\tilde{\mu}(\tau_{N+1};N,\underline{\tau})$

1. ההסתברות למאורע תלויה בזמן, בהסטוריה, וכו'..
2. ההסתברות לאורך מרווח תלויה בהסטוריה ובזמן שעבר מאז המאורע האחרון

תהליך renewal

מתואר ע"י $\tilde{\mu}(\tau_{N+1};N,\underline{\tau})=h(\tau)$

ההסתברות לאורך מרווח לא תלויה בהסטוריה

הסתברות למאורע תלויה רק בזמן שעבר מהמאורע האחרון

תהליך פואסון הומוגני

מתואר ע"י $h(\tau)=\lambda$

הסתברות למאורע לא תלויה בזמן או בהסטוריה.

מרווחים מתפלגים אקספוננציאלית

תהליך פואסון כללי

מתואר ע"י $\mu(t;N_t,w_t)=\lambda(t)$

ההסתברות למאורע תלויה בזמן בלבד

(לא תלויה בהסטוריה של התהליך)

נושאים עקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- ✓ סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - ←פואסון לא הומוגני
  - ←התחדשות/Renewal
  - ←תהליך נקודה כללי
- בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

בדיקת תלות בין מרווחים

- כפי שראינו עד כה, חשוב לנו לדעת אם המרווחים בין מאורעות הם תלויים או לא על מנת לאפיין את התהליך.
- אנחנו נלמד שתי שיטות לבחינת תלות ליניארית/סטטיסטית בין מרווחים:
  – שיטה 1: ע"י בחינת Level Sets של פונקציית הצפיפות המשותפת.
  – שיטה 2: ע"י שימוש ב- k-scaling.
- השיטות לא מוגבלות לבדיקת תלות בין שני מרווחים עוקבים, וניתן בעזרתם לאפיין את הקשר בין שני מרווחים כלשהם.

בדיקת תלות בין מרווחים - שיטה 1

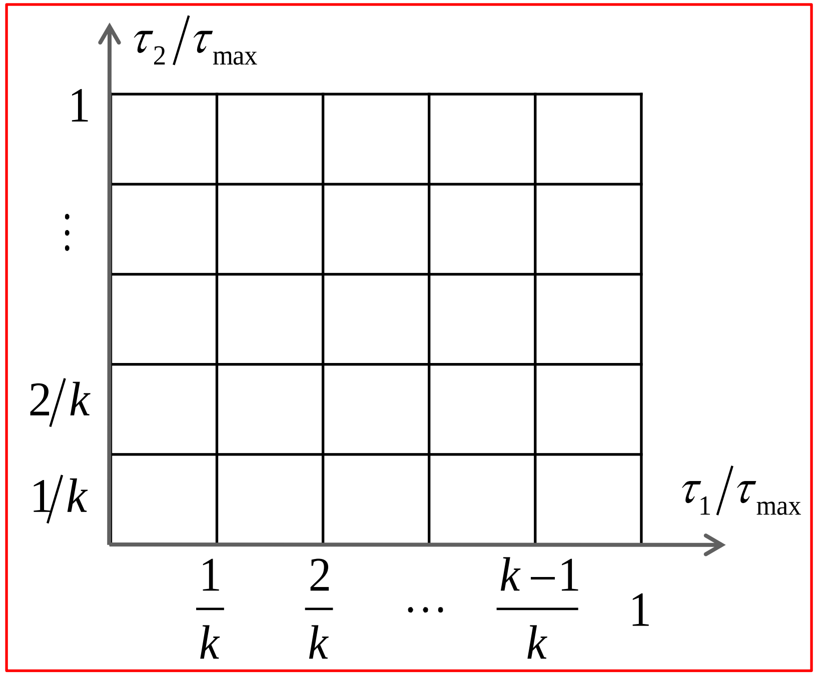
- עבור שני אינטרוולים בת"ס τ_1,τ_2 שמפולגים אקספוננציאלית:

$$f_{T_1,T_2}(\tau_1,\tau_2)=f_{T_1}(\tau_1)\cdot f_{T_2}(\tau_2)=\lambda e^{-\lambda\tau_1}\lambda e^{-\lambda\tau_2}=\lambda^2 e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)},\ \ \tau_1,\tau_2\ge 0$$

- איפה תהיה צפיפות ההסתברות הגבוהה ביותר? באזור הראשית!
- מי הם העקומים שווי ההסתברות של הפונקציה הזאת?
  – העקומים עליהם הסכום של שני המרווחים הוא קבוע: $\tau_1+\tau_2=const$.
- כלומר, עבור שני מרווחים בת"ס נצפה לקבל צפיפות משותפת עם מקסימום באזור הראשית, ועקומים שווי גובה עבור: $\tau_1+\tau_2=const$.
- אחלה..מאיפה יש לנו את הצפיפות המשותפת? אין לנו. נשערך אותה ע"י היסטוגרמה דו-מימדית!

בדיקת תלות בין מרווחים - שיטה 1

MATLAB: *hist3*()



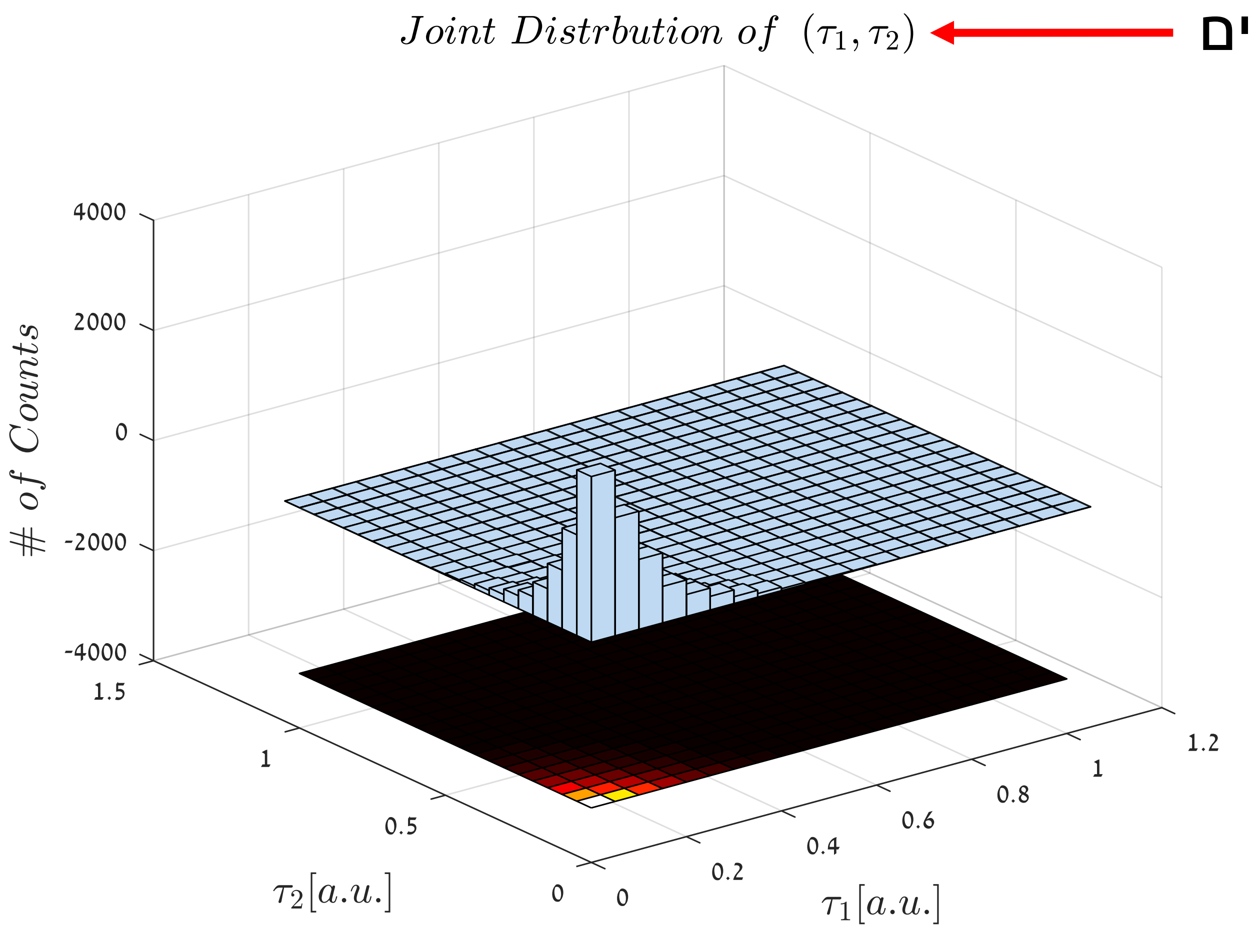
- מתכון לחישוב היסטוגרמה ב-2D:
  - בחירת מספר ה-bins - k
  - יצירת מטריצת אפסים בגודל $k \times k$
  - מציאת המרווח המקסימלי $\tau_{\max}$
  - מעבר על הנתונים ומילוי ה-bins:

    ה-bin ה- (i, j) גדל ב-1 כאשר:

$$(i-1)\frac{\tau_{\max}}{k} < \tau_1 < i\frac{\tau_{\max}}{k}$$

$$(j-1)\frac{\tau_{\max}}{k} < \tau_2 < j\frac{\tau_{\max}}{k}$$

מרווחים אקפוננציאלים - דוגמא



שאלה: תלויים
או בת"ס?

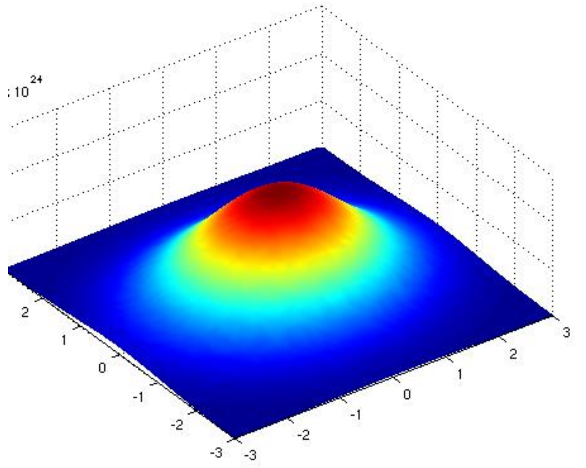
בת"ס!

בדיקת תלות בין מרווחים - שיטה 1

- עבור שני אינטרוולים בת"ס τ_1, τ_2 שמפולגים גאוסית:

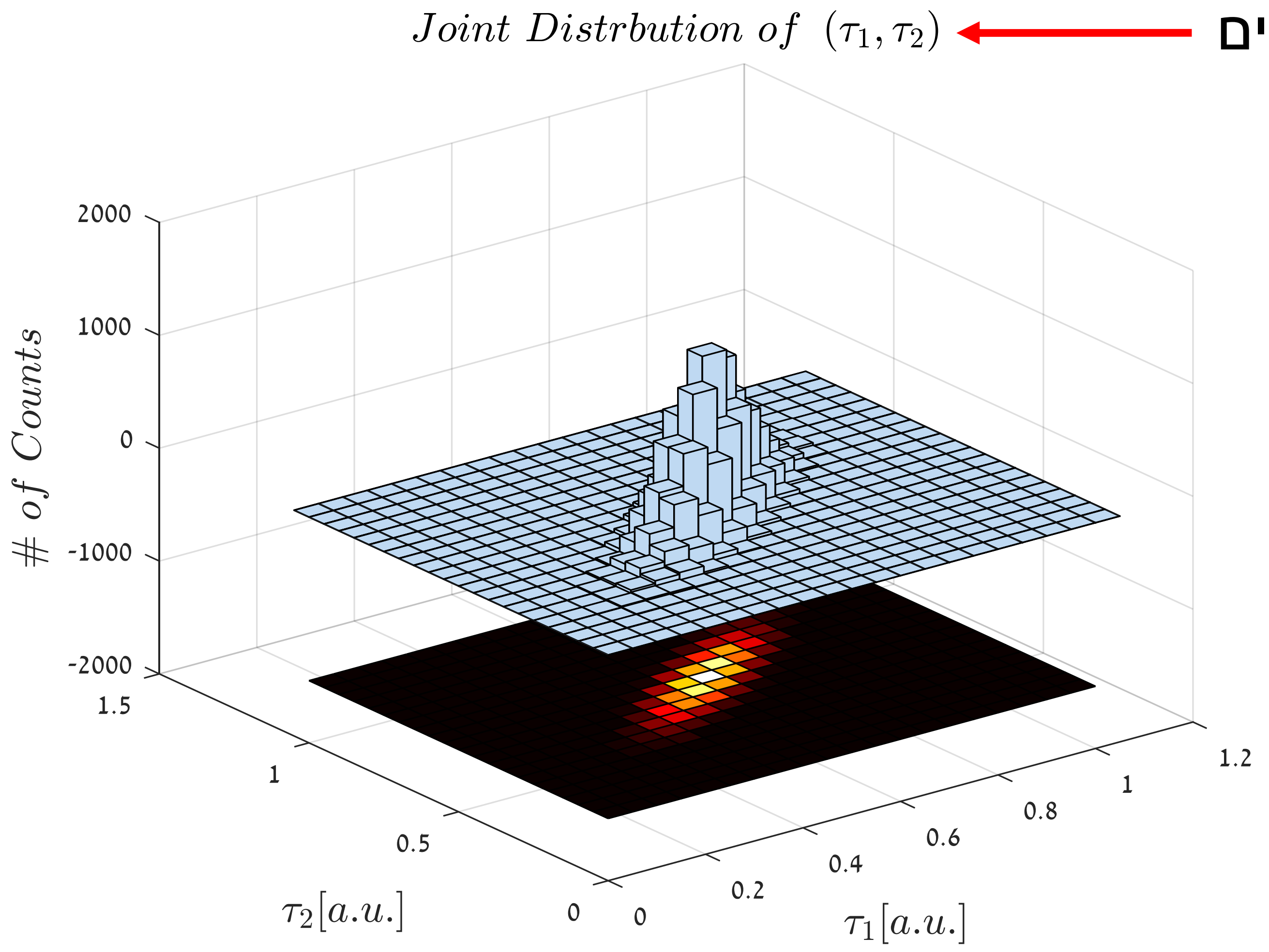
$$f_{T_1,T_2}\left(\tau_1,\tau_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{\left(\tau_1-\mu_1\right)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-\frac{\left(\tau_2-\mu_2\right)^2}{2\sigma_2^2}}=C\cdot e^{-\left(\frac{\left(\tau_1-\mu_1\right)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{\left(\tau_1-\mu_2\right)^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

- איפה תהיה צפיפות ההסתברות הגבוהה ביותר? $\left(\mu_1,\mu_2\right)$
- מי הם העקומים שווי ההסתברות של הפונקציה הזאת?
  - האליפסות המקבילות לצירים המקיימות:



$$\frac{\left(\tau_1-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\left(\tau_2-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}=const$$

מרווחים גאוסיים - דוגמא



שאלה: תלויים
או בת"ס?

תלויים!

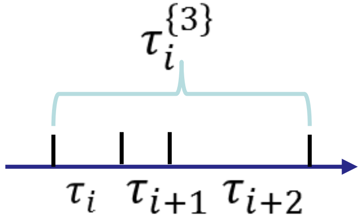
בדיקת תלות בין מרווחים - שיטה 1

- סיכום:
  - מחשבים את הצפיפות האנליטית לפי הפילוג הנתון בהנחת אי-תלות.
  - מציירים היסטוגרמה דו-מימדית.
  - בודקים אם ההיסטוגרמה היא מהצורה לה ציפינו:
    - קווים ישרים בשיפוע -1 למקרה האקפוננציאלי
    - אליפסות מקבילות לצירים למקרה הגאוסי
    - וכו'..
  - אם כן אז המרווחים בת"ס, אחרת הם תלויים.
  - התלות הנבדקת בין המרווחים היא תלות סטטיסטית כללית!

בדיקת תלות בין מרווחים - שיטה 2

- K-scaling – דרך לבחון את התלות הליניארית בין מרווחים ע"י הסתכלות על השונות כפונקציה של אורך מרווח בודד.
- נגדיר את סדרת מרווחי הסכום: $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\tau_i^{\{k\}} = \sum_{j=0}^{k-1} \tau_{i+j}$$



- המרווח ה-i בסדרה החדשה הוא המרווח בין המאורע ה-i-1 למאורע ה-i+k-1 באות הנקודה. מה השונות של הסדרה שיצרנו?

$$Var\left(\tau_i^{\{k\}}\right) = Var\left(\sum_{j=0}^{k-1} \tau_{i+j}\right) = Var\left(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k\right) =$$

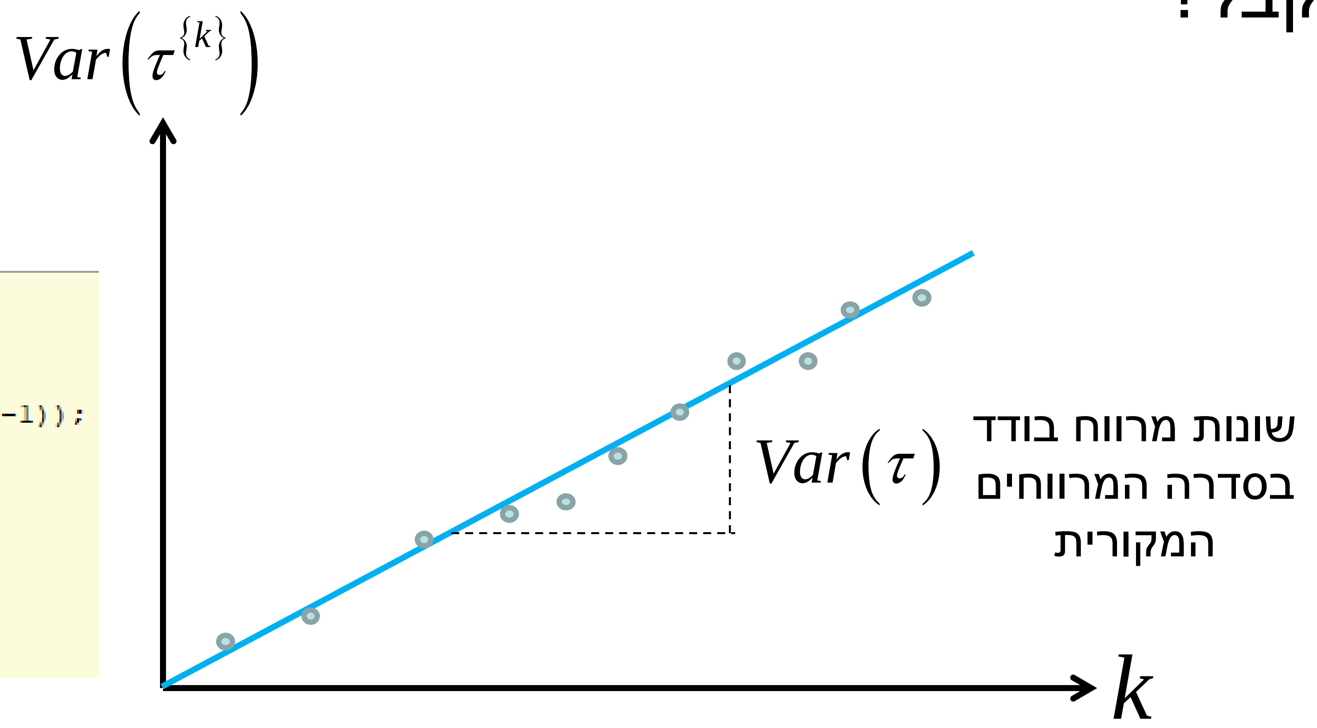
$$= k \cdot Var\left(\tau\right) + 2\sum_{m \neq n} Cov\left(\tau_m, \tau_n\right)$$

בדיקת תלות בין מרווחים - שיטה 2

- ואם המרווחים הם בת"ל מה נקבל? $Var\left(\tau^{\{k\}}\right) = k \cdot Var(\tau)$
- אם נצייר את השונות של סדרת הסכום לעומת מספר האיברים המשתתפים בסכום, מה נקבל?

מימוש לדוגמה:

```
% K-scaling calculation
for k=1:K
    for i=1:length(tau)-k
        tau_k(i) = sum(tau(i:i+k-1));
    end
    var_tau_k(k) = var(tau_k);
end

% test plot
plot(1:K,var_tau_k);
```



נושאים עקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- ✓ סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - ←פואסון לא הומוגני
  - ←התחדשות/Renewal
  - ←תהליך נקודה כללי
- ✓ בדיקת תלות בין מרווחים
- כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

תהליך נקודה רגולרי - תזכורת

- הסתברות למאורע בודד בקטע קצר $[t, t+\Delta t]$

$$\Pr\left(N_{t+\Delta t} - N_t = 1\right) = \mu\left(t; N_t, w_t\right) \cdot \Delta t$$

- הסתברות לחוסר מאורע:

$$\Pr\left(N_{t+\Delta t} - N_t = 0\right) = 1 - \mu\left(t; N_t, w_t\right) \cdot \Delta t - o\left(t, \Delta t\right)$$

- ובגלל שהקטע מאוד קצר:

$$\Pr\left(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2\right) = o\left(t, \Delta t\right)$$

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o\left(t, \Delta t\right)}{\Delta t} = 0}$$

כימות מידת הרגולריות ע"י CV

- תזכורת: בתרגול 8 הגדרנו את "השגיאה הסטנדרטית" / Coefficient of Variation (CV):

$$C.V = \frac{\sigma_X}{E\left[X\right]}$$

- בהקשר של תהליכי נקודה, הפעלת מדד זה על הפילוג של המרווחים מאפשרת לנו לכמת את מידת האקראיות של התהליך:

$$\boxed{C\left(\tau\right) = \frac{\sigma\left(\tau\right)}{E\left(\tau\right)}}$$

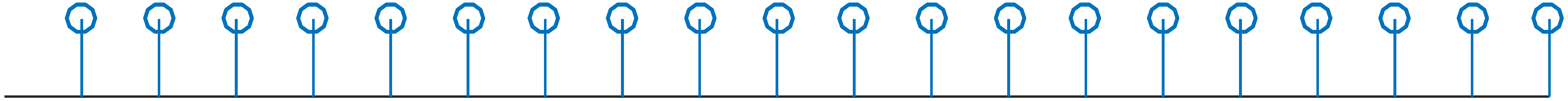
- ככל שהמדד יותר קטן התהליך שלנו יותר דטרמיניסטי/ניתן לחיזוי.

דוגמא 1

- עבור תהליך רגולרי לחלוטין/ תהליך דטרמיניסטי, למשל קוצב:

$$\left.\begin{array}{c} p_\tau(\tau)=\delta\left(\tau-\tau_\mu\right) \\ \sigma(\tau)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(\tau)=\frac{0}{\tau_\mu}=0$$

$$Entirely\ Regular = Periodic$$



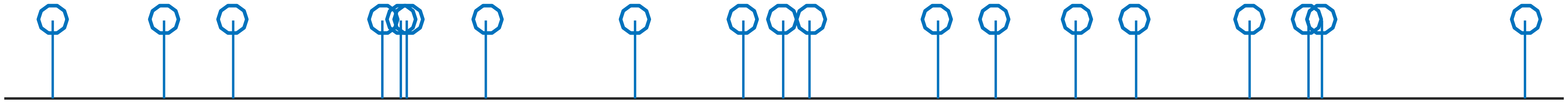
- מדובר באות מחזורי שהוא בכלל לא אקראי.

דוגמא 2

- עבור תהליך פואסון הומוגני, נקבל את המקרה ההפוך:

$$\left.\begin{array}{c} p_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \\ E(\tau) = \dfrac{1}{\lambda}, \quad \sigma(\tau) = \dfrac{1}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow C(\tau) = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1$$

$$Entirely\ Irregular = Homogeneous\ Poisson$$



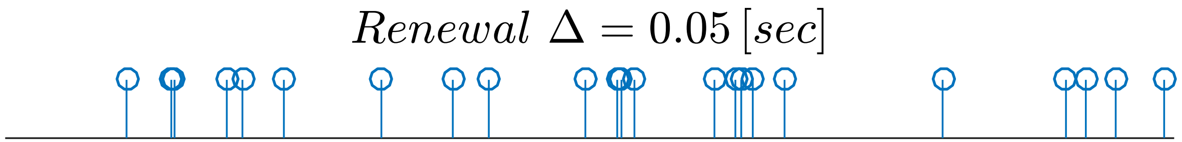
- תהליך אקראי לגמרי – מאוד קשה לחזות אותו.

דוגמא 3

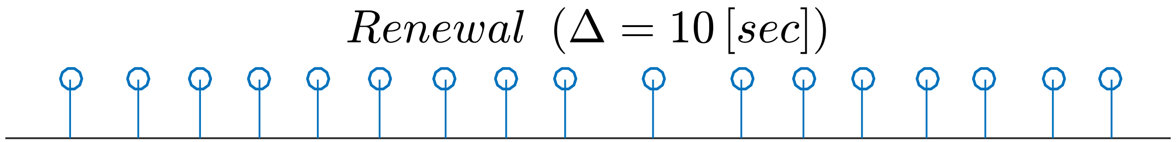
- עבור תהליך renewal עם תקופה רפרקטורית, נקבל התנהגות נשלטת:

$$\left.\begin{aligned} p_\tau(\tau) &= \lambda e^{-\lambda(\tau-\Delta)}\cdot u(\tau-\Delta) \\ E(\tau) &= \frac{1}{\lambda}+\Delta,\quad \sigma(\tau)=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right\}\Rightarrow C(\tau)=\frac{1/\lambda}{1/\lambda+\Delta}=\frac{1}{1+\lambda\Delta}$$

- עבור תקופה רפרקטורית קצרה:



- עבור תקופה רפרקטורית ארוכה:



נושאים עיקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- ✓ סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - ←פואסון לא הומוגני
  - ←התחדשות/Renewal
  - ←תהליך נקודה כללי
- ✓ בדיקת תלות בין מרווחים
- ✓ כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH

משערך היסטוגרמת המרווחים - INT

- כדי לשערך את ההיסטוגרמה נגדיר משתנה עזר:

$$I_{l,\delta}(\tau)=\begin{cases}1, & l\delta \le \tau \le (l+1)\delta \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

מייצג את τ בעזרת
בינים בגודל δ .

- שערוך ההיסטוגרמה יהיה נתון ע"י:

$$INT(l)=\underbrace{\frac{1}{N\delta}\sum_{n=1}^{N} I_{l,\delta}(\tau_n)}$$

ניתן לממש את כל הנוסחה ב-MATLAB ע"י:
histogram(tau,nbins,'Normalization','pdf‘)

- במילים פשוטות: כל בין מקבל ערך השווה למספר האינטרוולים בעלי משך זמן מתאים.
- התוצאה היא משערך לצפיפות ההסתברות של המרווחים!

תכונות של המשערך INT

- נתבונן בהתפלגות של היסטוגרמת המרווחים:

$$I_{l,\delta}(\tau) \sim Ber(p) \qquad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} I_{l,\delta}(\tau_n) \sim Bin(N,p)$$

$$p = P\left(I_{l,\delta}(\tau)=1\right) = \int_{l\delta}^{(l+1)\delta} p_{\tau}(\tau)\,d\tau$$

בהנחה שהמרווחים בלתי תלויים,
כל מרווח נותן הגרלה בלתי תלויה
נוספת של משתנה ברנולי זהה.

- השונות של ההיסטוגרמה:

$$Var\left(INT(l)\right) = Var\left(\frac{1}{N\delta}\sum_{n=1}^{N} I_{l,\delta}(\tau_n)\right) = \frac{1}{(N\delta)^2}\cdot Var\left(\sum_{n=1}^{N} I_{l,\delta}(\tau_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{(N\delta)^2}\cdot \underbrace{N\cdot p(1-p)}_{\text{שונות משתנה בינומי}} \underset{p\ll 1}{\approx} \frac{p}{N\delta^2} = \frac{\int_{l\delta}^{(l+1)\delta} P_{\tau}(\tau)\,d\tau}{N\delta^2} \underset{\delta\ll 1}{\overset{\approx}{\downarrow}} \frac{P_{\tau}(l\delta)}{N\delta}$$

תכונות של המשערך INT

- התוחלת של ההיסטוגרמה:

$$E\left(INT\left(l\right)\right)=E\left(\frac{1}{N\delta}\sum_{n=1}^{N}I_{l,\delta}\left(\tau_n\right)\right)=\frac{1}{N\delta}\cdot E\left(\sum_{n=1}^{N}I_{l,\delta}\left(\tau_n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{N\delta}\cdot\underbrace{Np}_{\text{תוחלת משתנה בינומי}}=\frac{p}{\delta}=\frac{\int_{l\delta}^{(l+1)\delta}P_\tau\left(\tau\right)d\tau}{\delta}\approx P_\tau\left(l\delta\right)$$

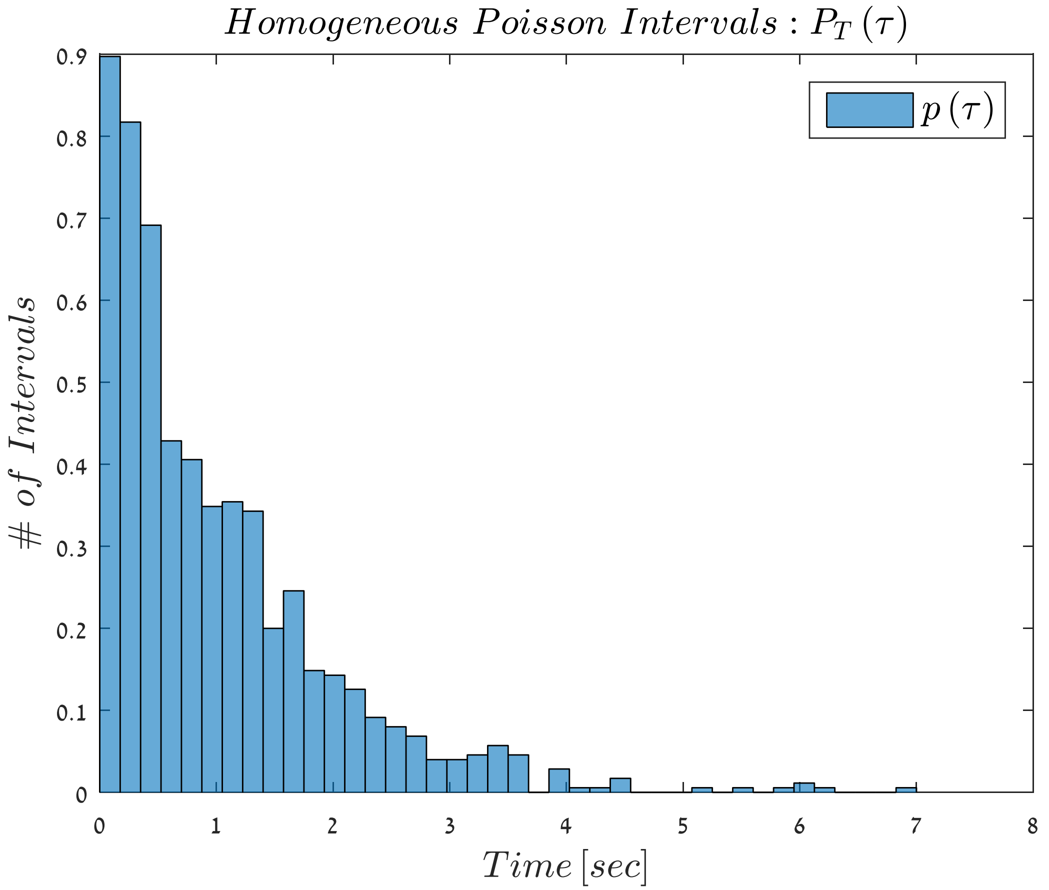
- מקדם השגיאה הסטנדרטית:

$$\boxed{C\left(INT\left(l\right)\right)=\frac{\sigma\left(INT\left(l\right)\right)}{E\left(INT\left(l\right)\right)}=\frac{1}{\sqrt{N\delta P_\tau\left(l\delta\right)}}}$$

  – כאשר N גדל (יש יותר מרווחים) השיערוך משתפר כיוון שה-Var יורד.
  – כאשר δ קטן (הרזולוציה עולה) השיערוך רועש יותר כי ההחלקה של ה-binning תופחת.

דוגמא

- ראינו כבר בדוגמאות הקודמות..למשל עבור פואסון הומוגני:



שערוך פונקציית ה-Hazard

- נזכר בקשר בין פונקציית ה-Hazard לבין התפלגות המרווחים:

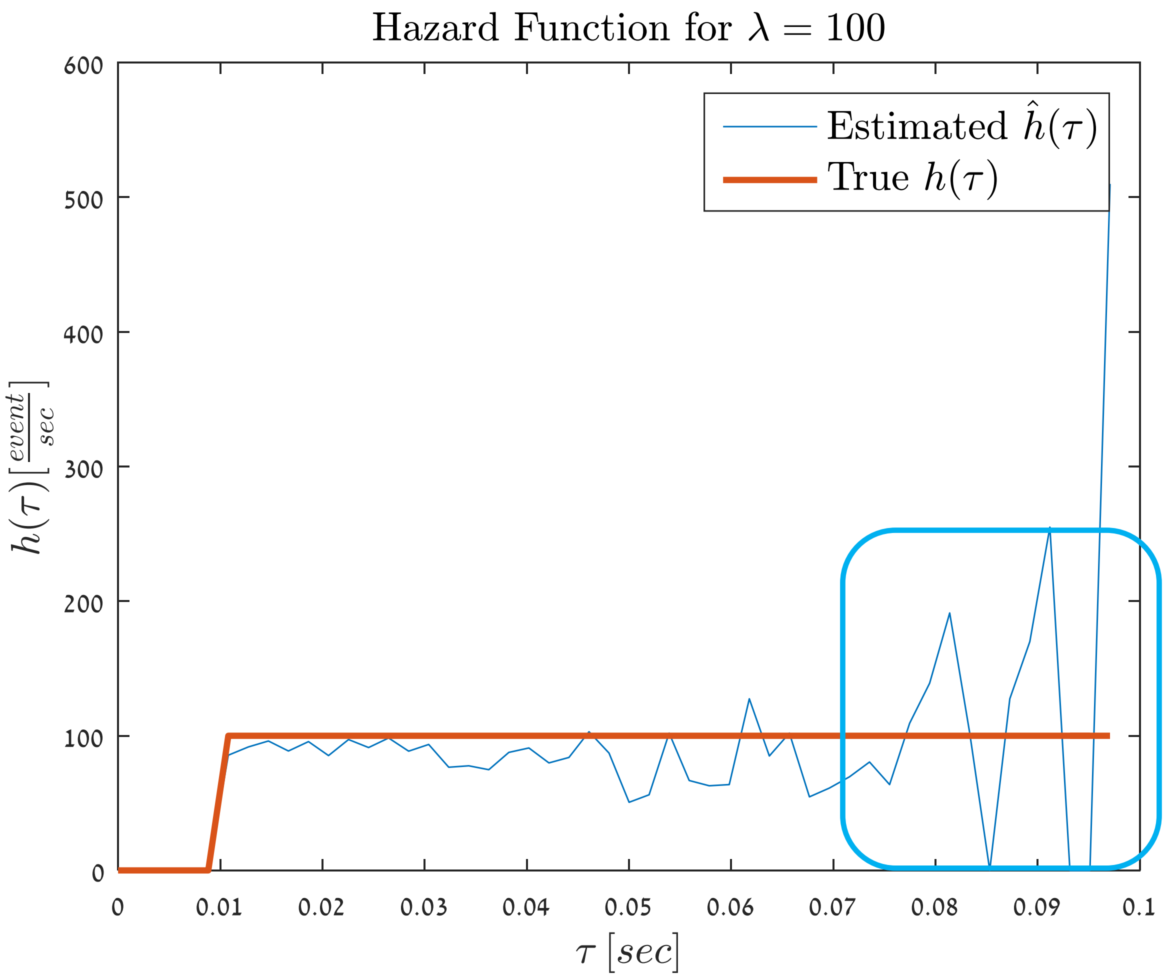
$$\boxed{h(\tau)=\frac{f_\tau(\tau)}{\int_\tau^\infty f_\tau(\alpha)d\alpha}}$$

- בהינתן המשערך INT לצפיפות ההסתברות של המרווחים, ניתן לשערך את פונקציית ה-Hazard ע"י:

$$\boxed{Haz(l)=\frac{INT(l)}{\sum_{k=l}^\infty INT(k)\cdot\delta}}$$

- איך ייראה השיערוך עבור תהליך התחדשות עם תקופה רפרקטורית?

דוגמא



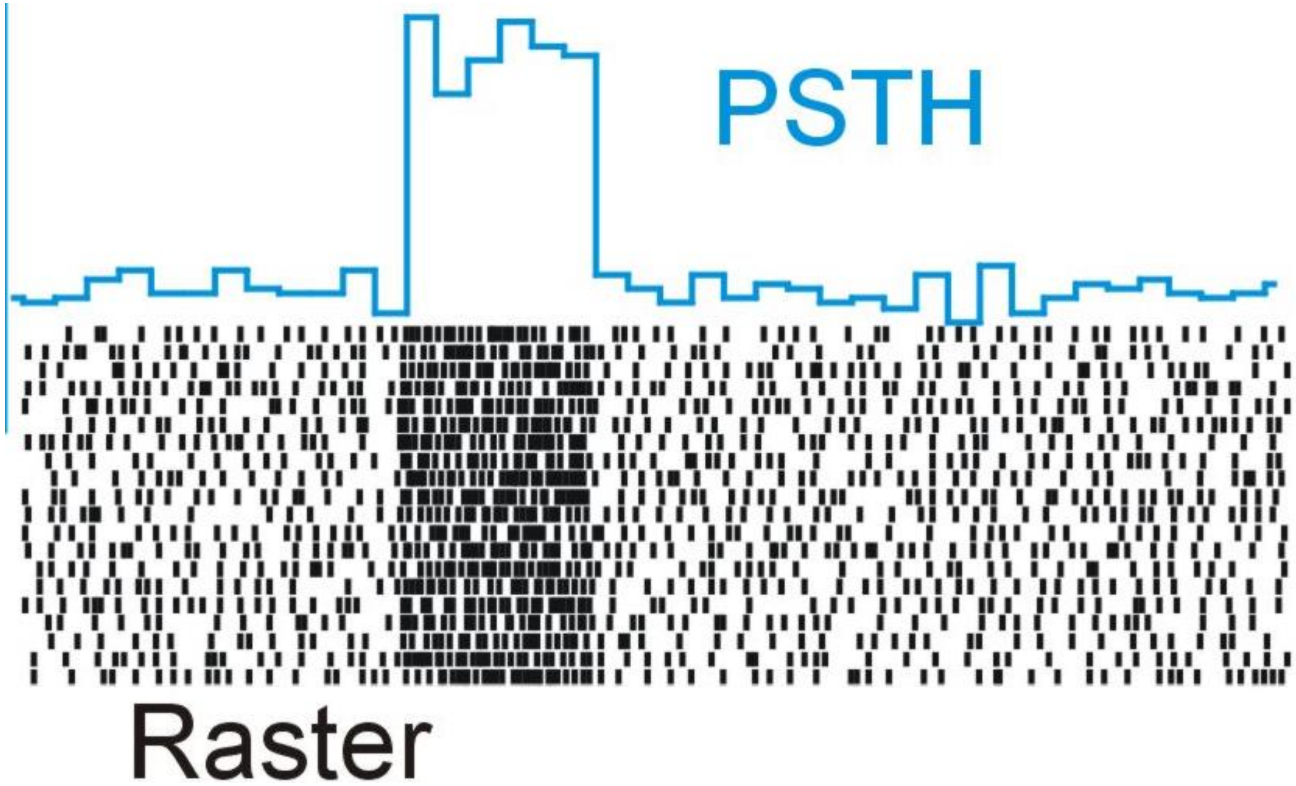
השיערוך רועש
יותר עבור
מרווחים ארוכים!

Peri Stimulus Time Histogram (PSTH)

- PSTH היא שיטה לשערוך פונקציית הקצב של נוירון בתגובה לגירוי חיצוני.
- כללי המשחק:
  - נרצה למצוא את מאפייני הירי של נוירון בתגובה לגירוי מסויים.
  - לצורך כך, נציג את אותו גירוי מספר רב של פעמים ונמדוד את התגובה.
  - יש לדאוג למרווח מספיק בין חזרות, כך שהתגובה לא תימשך בזמן הגירוי הבא.
- המשערך לפונקציית הקצב הרגעית מתקבל ע"י חישוב היסטוגרמה.

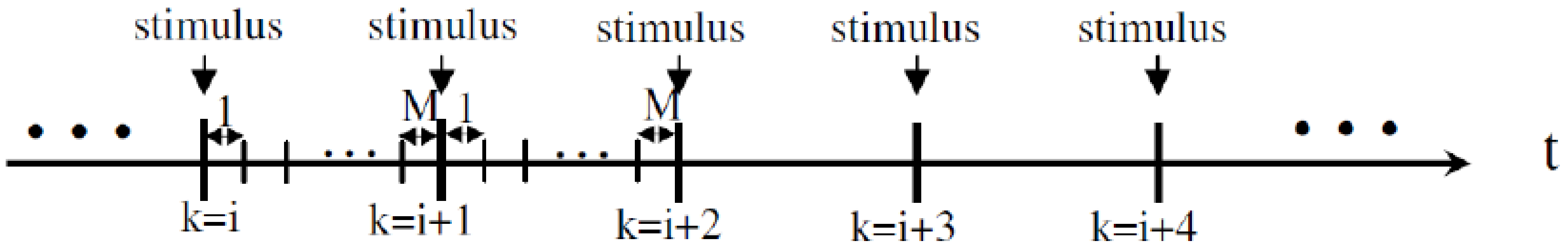
PSTH

- איך זה נראה?



  - כל שורה מכילה את הספייקים שנורו בחזרה אחרת של הניסוי.
  - השיערוך מתקבל ע"י בחירת גודל Bin וחישוב היסטוגרמה.

PSTH



- נסמן ב- $c(m)$ את מספר המאורעות ב-Bin התחום ע"י: $\left[m\delta,(m+1)\delta\right]$.
- מפעילים את הגירוי K פעמים במרווחים של M בינים:

$$PSTH(m)=\frac{1}{K\delta}\sum_{k=0}^{K} c(m+kM) \qquad \left[\frac{events}{\sec}\right]$$

מיצוע

נרמול ברוחב ה-Bin

- שאלה: מה המשמעות של המשערך המתקבל?

PSTH

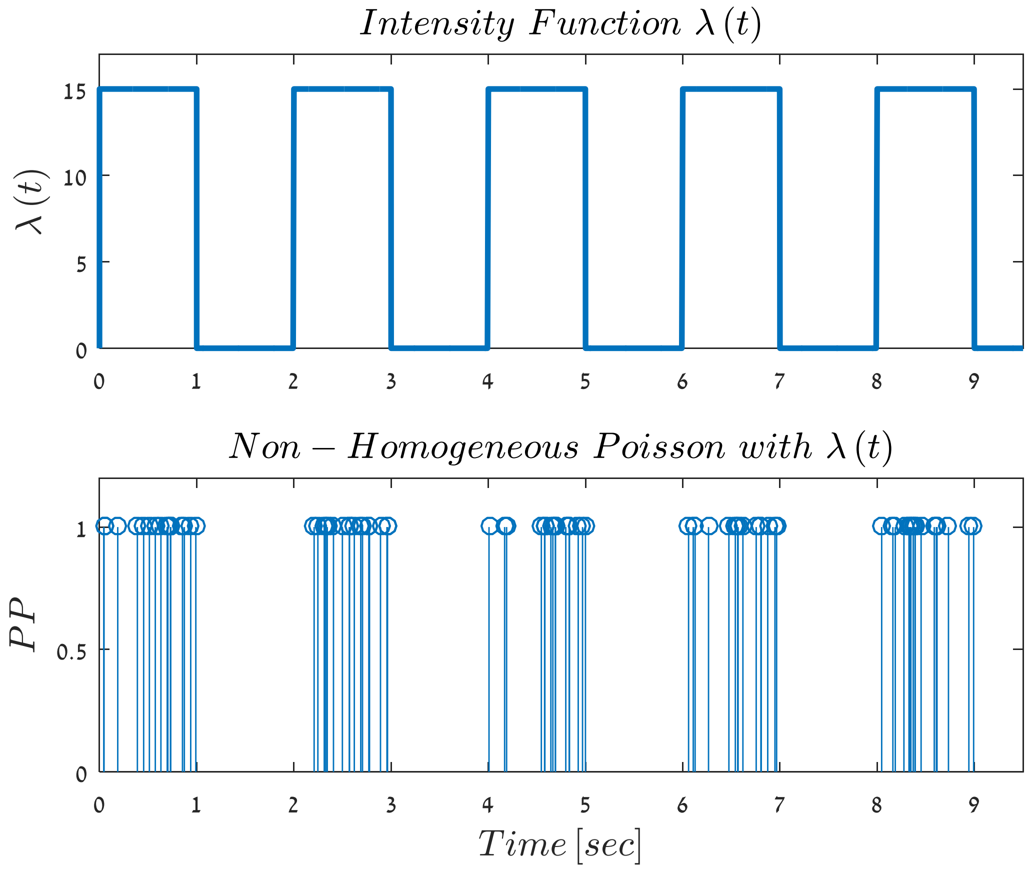
- עבור גודל Bin מספיק קטן, מתקיים:

$$E\left[PSTH\left(m\right)\right]\approx E\left[\mu\left(m\delta;N_{m\delta},w_{m\delta}\right)\right]$$

- כלומר, המיצוע על החזרות השונות ביטל לנו את התלות בעבר של התהליך, וקיבלנו משערך של פונקציית הקצב של התהליך, כתלות בגירוי המוצג ובזמן אך ללא תלות בהיסטוריה.
- עבור תהליכי פואסון, זוהי בדיוק פונקציית הקצב. לעומת זאת, עבור תהליך נקודה כללי, זוהי פונקציה "מסובכת" של ההתנהגות הלא-סטציונרית האינהרנטית של התהליך, בנוסף להתנהגות הלא סטציונרית הנובעת מהגירוי עצמו.

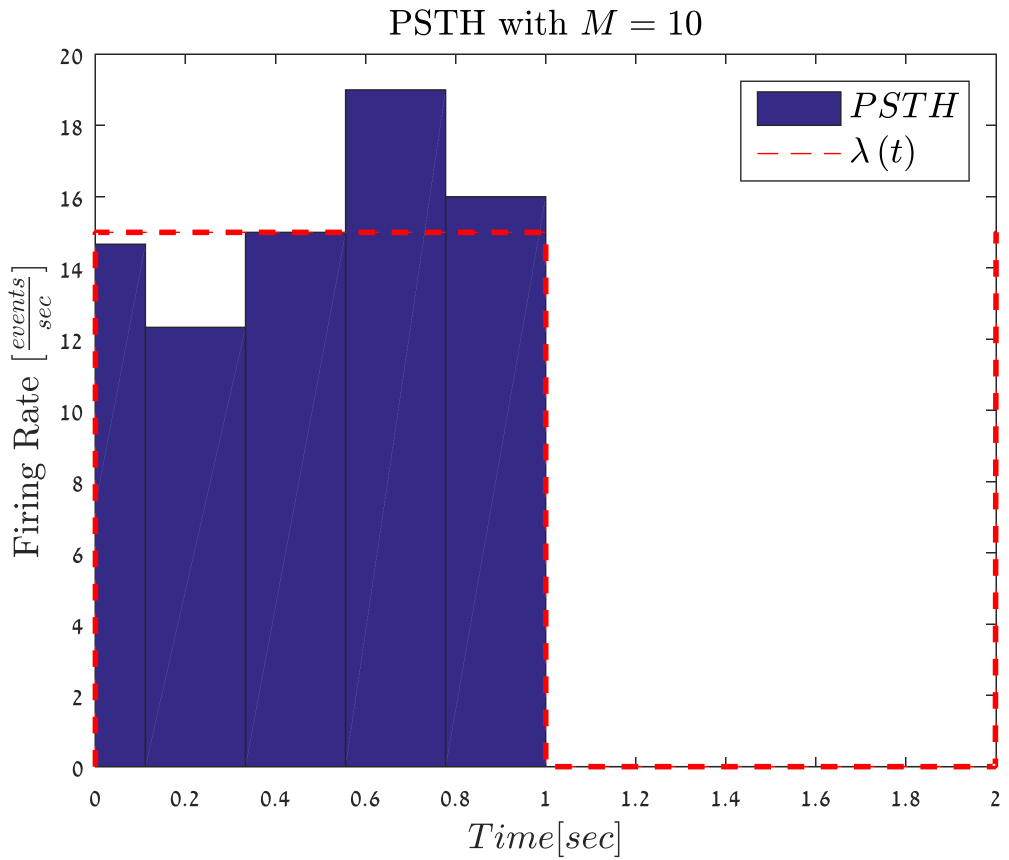
דוגמא

- נזכר בתהליך פואסון הלא-הומוגני שראינו קודם:



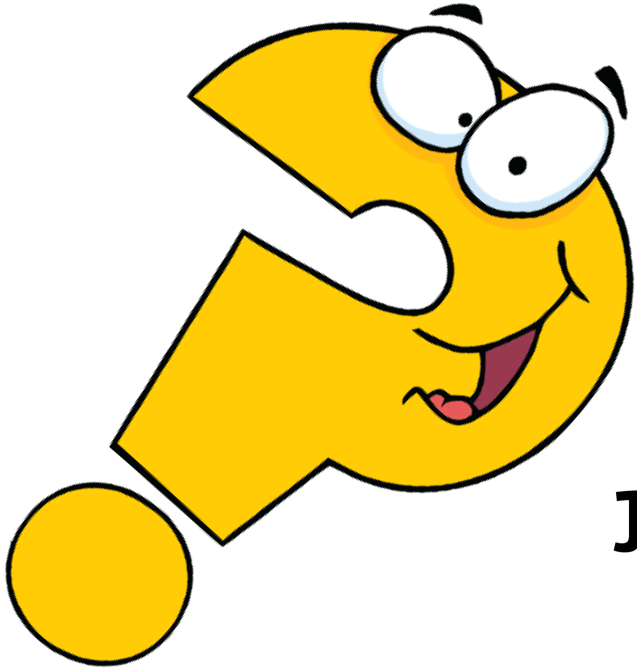
דוגמא

- בהנחה של ניסוי מחזורי עם מחזור 2 שניות, איך תראה ה-PSTH?



נושאים עקריים

- ✓ תהליכי נקודה - הקדמה
- ✓ סוגי תהליכים
  - ←פואסון הומוגני
  - ←פואסון לא הומוגני
  - ←התחדשות/Renewal
  - ←תהליך נקודה כללי
- ✓ בדיקת תלות בין מרווחים
- ✓ כימות מידת הרגולריות ע"י CV
- ✓ שערוך הפונקציות השונות: INT ו-PSTH



שאלות

תרגול 11 – תהליכי נקודה:
חלק II

נושאים עקריים

- שאלת חזרה
- סימולציה של תהליך נקודה
  - IPFM
  - Time Rescaling
  - שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - Maximum Likelihood
  - Time Rescaling
- סיכום

נושאים עקריים

- שאלת חזרה
- סימולציה של תהליך נקודה
  - IPFM
  - Time Rescaling
  - שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - Maximum Likelihood
  - Time Rescaling
- סיכום

תזכורת:

תהליך נקודה כללי

מתואר ע"י $\mu(t;N_t,w_t)$ או $\tilde{\mu}(\tau_{N+1};N,\underline{\tau})$

1. ההסתברות למאורע תלויה בזמן, בהסטוריה, וכו'..

2. ההסתברות לאורך מרווח תלויה בהסטוריה ובזמן שעבר מאז המאורע האחרון

תהליך renewal

מתואר ע"י $\tilde{\mu}(\tau_{N+1};N,\underline{\tau})=h(\tau)$

ההסתברות לאורך מרווח לא תלויה בהסטוריה

הסתברות למאורע תלויה רק בזמן שעבר מהמאורע האחרון

תהליך פואסון הומוגני

מתואר ע"י $h(\tau)=\lambda$

הסתברות למאורע לא תלויה בזמן או בהסטוריה.

מרווחים מתפלגים אקספוננציאלית

תהליך פואסון כללי

מתואר ע"י $\mu(t;N_t,w_t)=\lambda(t)$

ההסתברות למאורע תלויה בזמן בלבד

(לא תלויה בהסטוריה של התהליך)

תזכורת: CV

- ככל שהמדד יותר קטן התהליך שלנו יותר דטרמיניסטי/ניתן לחיזוי:

$$\boxed{C.V(\tau)=\frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}}$$

דוגמאות:

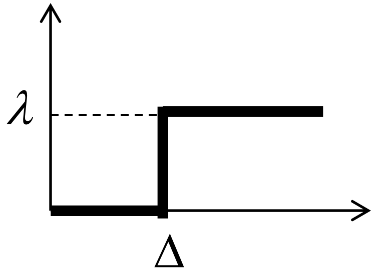
- עבור תהליך פואסון הומוגני:

$$C.V.=\frac{\sqrt{\mathrm{var}(\tau)}}{E(\tau)}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}=1$$

- עבור תהליך דטרמיניסטי (קוצב):

$$C.V.=\frac{\sqrt{\mathrm{var}(\tau)}}{E(\tau)}=\frac{0}{E(\tau)}=0$$

- בתהליך Renewal עם פונקציית hazard מהצורה:



$$C.V.=\frac{1}{1+\lambda\Delta}$$

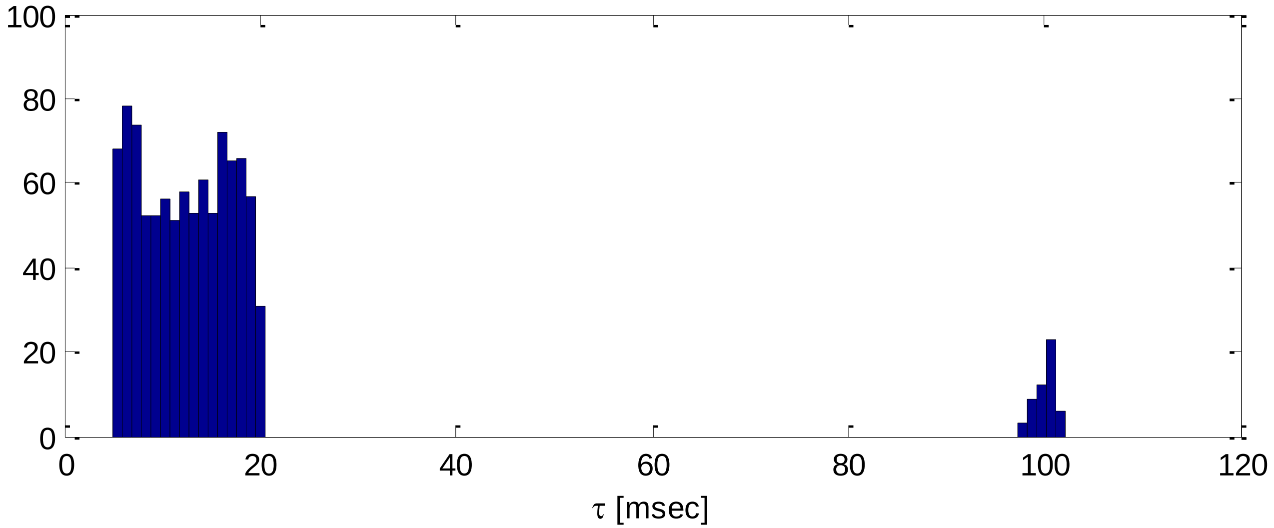
שאלה ממבחן

(17 נק') נוירון יורה קבוצה של פו"פ (burst) בהפרש של 100 מילישניות (מסוף ה-burst הקודם). התקופה הרפרקטורית שלו כ-5 מילישניות והמרווח המכסימלי בין פו"פ סמוכים בתוך ה-burst הוא 20 מילישניות.

א. (5 נק') צייר סכמטית את הסטוגרמת האינטרוולים של תהליך הנקודה הנתון.

פתרון

א. למשל:



- פרטים חשובים: מרווח מינימלי – 5 מילישניות, מרווח מקסימלי במרווחים הקצרים – 20 מילישניות.

  קיום של מספר מרווחים נוספים ב- 100 מילישניות.

שאלה ממבחן

ב. (6 נק') הנח כעת שבתוך ה-burst האינטרוולים נקבעים בדיוק לפי התקופה הרפרקטורית. במצב זה, מה תהיה ההשפעה של ביטול כל האינטרוולים הארוכים (של 100 מילישניות) על ה-CV של הפונק' צפיפות המרווחים (עולה/יורד/לא משתנה).

פתרון

ב. CV הוא מדד לאקראיות הסיגנל: $C.V. = \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}$

אם מבטלים את האינטרוואלים הארוכים, נישאר עם אינטרוואלים קבועים של 5 מילישניות, כלומר השונות של המרווחים תקטן לאפס ולכן CV יקטן ויהיה <u>שווה לאפס</u>.

שאלה ממבחן

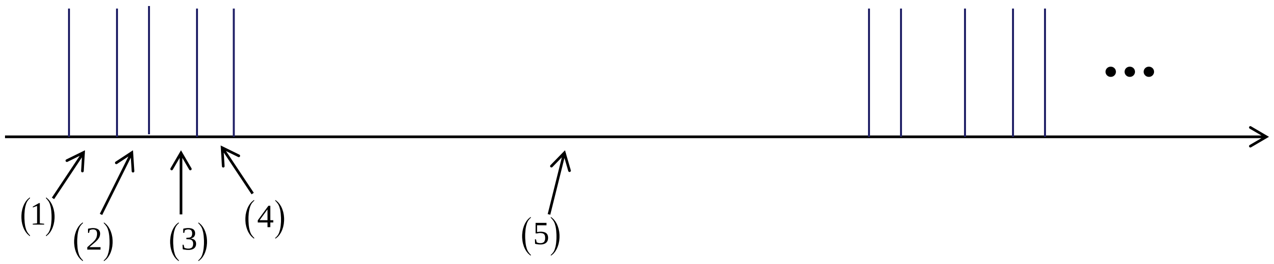
ג. (6 נק') הנח כעת שהאינטרוולים בתוך ה-burst מתפלגים אקספוננציאלית עם $\lambda = \frac{1}{5}$.
בתוספת תקופה רפרקטורית τ_0 של 5 מילישניות, כלומר:

$$p_\tau(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(\tau - \tau_0)} & \tau \geq \tau_0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

כמו כן המרווחים בין ה-bursts הם 100 מילישניות ובכל burst יש **<u>בדיוק</u>** חמישה פו"פ. חשבו את האינטרוול הממוצע של תהליך זה.

פתרון

ג. דוגמא לתהליך:



1/5 מהמרווחים ארוכים: 100 מילישניות

4/5 מהמרווחים קצרים ומפולגים לפי:

$$p_\tau\left(\tau\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\left(\tau-\tau_0\right)} & \tau\geq\tau_0\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

לכן:

$$E\left[\tau\right]=\tfrac{1}{5}\cdot 100+\tfrac{4}{5}\cdot E\left[\tau_{short}\right]$$

פתרון

נתון:

$$p_\tau\left(\tau\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\left(\tau-\tau_0\right)} & \tau\ge\tau_0\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

לכן:

$$\left[\tau_{short}-\tau_0\right]\sim Exp\left(\lambda\right)$$

$$E\left[\tau_{short}-\tau_0\right]=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5\left[m\sec\right]$$

$$\Rightarrow E\left[\tau_{short}\right]=\tau_0+5\left[m\sec\right]=10\left[m\sec\right]$$

$$\Rightarrow E\left[\tau\right]=\tfrac{1}{5}\cdot 100+\tfrac{4}{5}\cdot 10=28\left[m\sec\right]$$

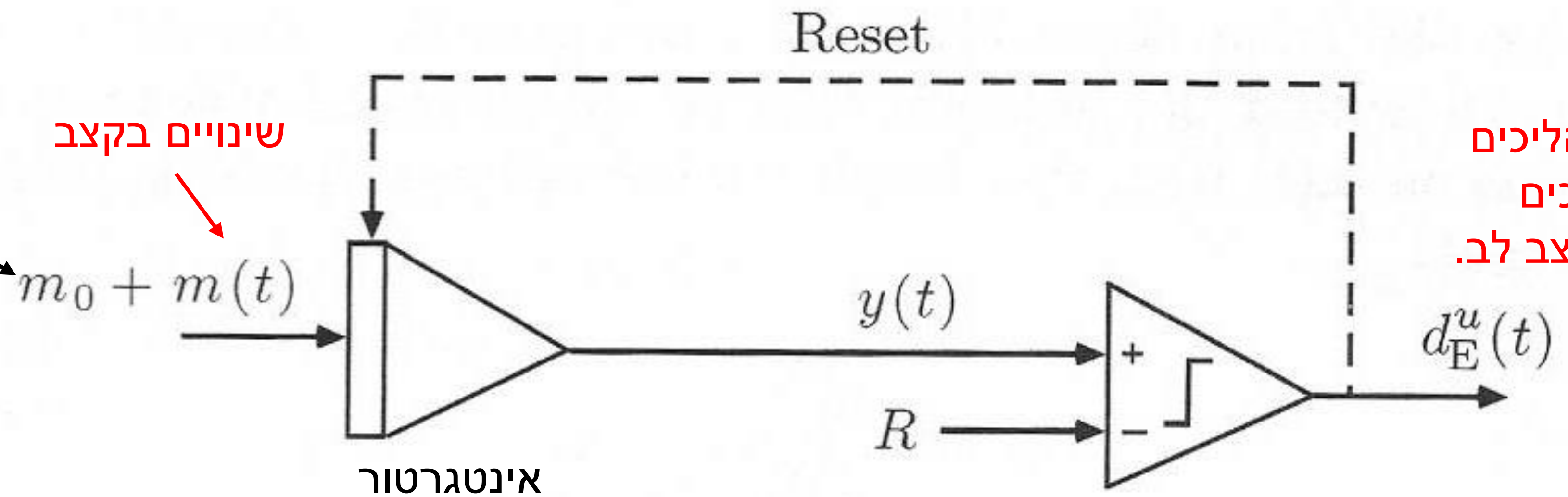
נושאים עקריים

- ✓ שאלת חזרה
- סימולציה של תהליך נקודה
  - IPFM
  - Time Rescaling
  - שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - Maximum Likelihood
  - Time Rescaling
- סיכום

IPFM (Integral Pulse Frequency Modulation)

קצב ממוצע

שינויים בקצב



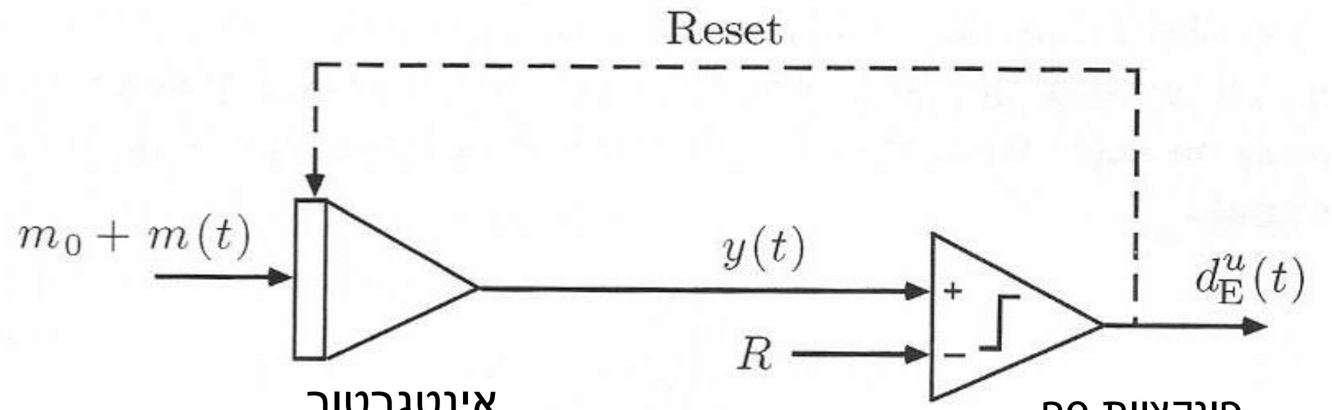
שיטה המתאימה לתהליכים
הקרובים יותר לתהליכים
דטרמיניסטיים, כגון קצב לב.

אינטגרטור

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(m_0 + m(t)\right) dt = R$$

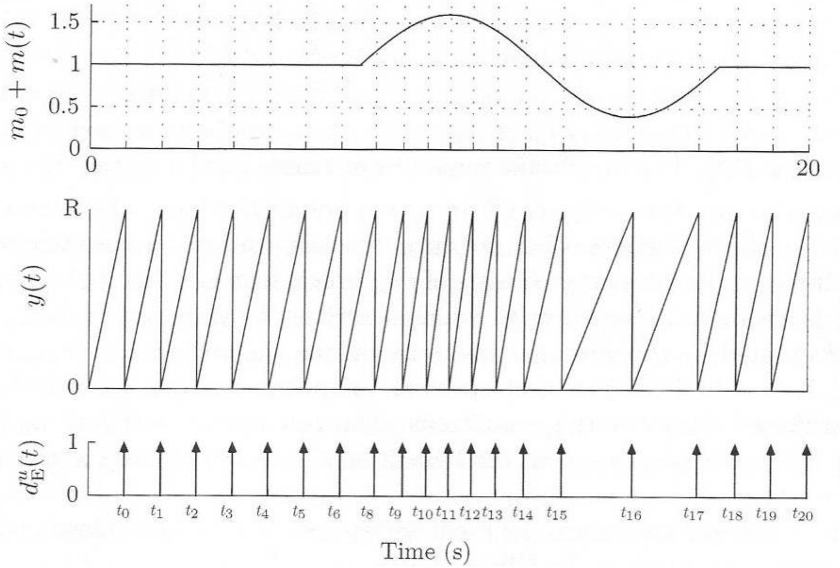
פונקציית סף
כאשר y עובר את ערך
הסף R מוציאים
מאורע ומאפסים את
האינטגרטור.

IPFM – דוגמה 1



אינטגרטור

פונקציית סף
כאשר y עובר את ערך הסף R
מוציאים מאורע ומאפסים את
האינטגרטור.

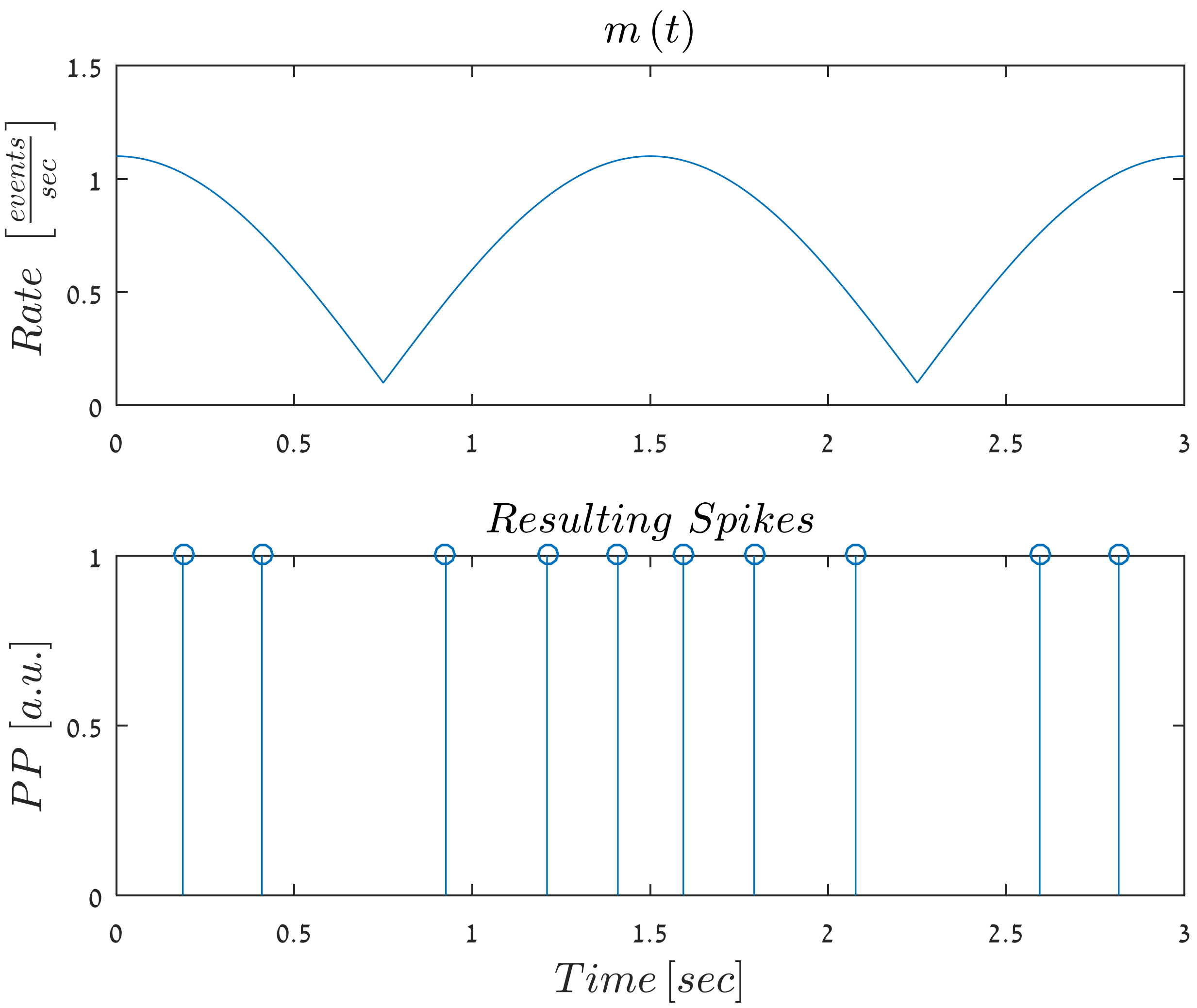


האינטגרנד

האינטגרל

תהליך הנקודה

IPFM – דוגמה 2



$m(t)$
1.5
1
0.5
0
$Rate\ \left[\frac{events}{sec}\right]$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$Resulting\ Spikes$
1
0.5
0
$PP\ [a.u.]$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$Time\ [sec]$

קוד לדוגמה – IPFM

```
% time axis and increment for integration
t = linspace(0,2,3000);
dt = 1/1000;

% rate function m(t), numerical integral, and threshold for firing
m = 0.1*ones(1,3000) + abs(cos(0.5*2*pi*t));
I = cumsum(m)*dt;
R = 0.2;

% IPFM sim.
k = 1; Ishort = I; t0 = 0; % Inits.
tspikes = []; % output spiking times
while Ishort(end) > R
    tspikes(k) = find((Ishort-R)>=0,1) + t0; % kth spikes time
    Ishort = I(tspikes(k):end) - I(tspikes(k)); % remaining integral
    t0 = tspikes(k); % time from which the (k+1)th spike is found
    k = k + 1; % advance counter
end
```

נושאים עקריים

✓ שאלת חזרה

- סימולציה של תהליך נקודה
  - IPFM←
  - Time Rescaling
  - שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - Maximum Likelihood
  - Time Rescaling
- סיכום

Time Rescaling theorem

- "כל התהליך נקודה עם $\mu\left(t; N, \underline{w_t}\right)$ אינטגרבילית אפשר להפוך לתהליך פואסון עם $\lambda = 1$"
- בהינתן זמני מאורעות $\{t_k\}_{k=1}^{N}$ ופונקציית קצב $\mu\left(t; N, \underline{w}_t\right) > 0 \;\; \forall t, \underline{w}_t$ שיצרה את תהליך הנקודה, הביטוי:

$$\Lambda\left(t_k\right) = \int_0^{t_k} \mu\left(s; N, \underline{w}_s\right) ds$$

מגדיר זמנים של מאורעות בתהליך פואסון הומוגני עם $\lambda = 1$

Brown et al. [2002]

Time Rescaling הוכחה

AIV. Proof of the time rescaling theorem

Let $(0,T]$ be an observation interval and let $N(t)$ for $0<t\le T$ be the counting process of a point process with conditional intensity function $\lambda(t\,|\,H_t)$. Assume we observe a set of spikes $0<s_1<\ldots<s_{N(T)}\le T$. Define z_i for $i=1,\ldots,N(T)$ as in Equation #####. Define a Jacobian matrix whose i,j^{th} element is

$$z_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mu\left(s;N,\underline{w}_s\right)ds$$

$$J_{i,j}=\frac{dz_i}{ds_j}=\begin{cases}\lambda(s_i\,|\,H_i) & \text{if } i=j\\ -\lambda(s_j\,|\,H_j) & \text{if } i=j-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

This Jacobian is lower triangular, so its determinant is just the product of its diagonal elements, $|J|=\prod_{i=1}^{N(T)}\lambda(s_i\,|\,H_{s_i})$.

Using Equation 6, the joint density function of the first n spike times is given by

$$\begin{aligned}f_{S_1,\ldots,S_n}(s_1,\ldots,s_n)&=\prod_{i=1}^{n}f_{S_i}(s_i\,|H_{s_{i-1}})\\&=\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda(s_i\,|\,H_{s_i})\exp\left\{-\int_{s_{i-1}}^{s_i}\lambda(t\,|\,H_t)dt\right\}\right)\end{aligned}$$

U. Eden notes

Time Rescaling הוכחה

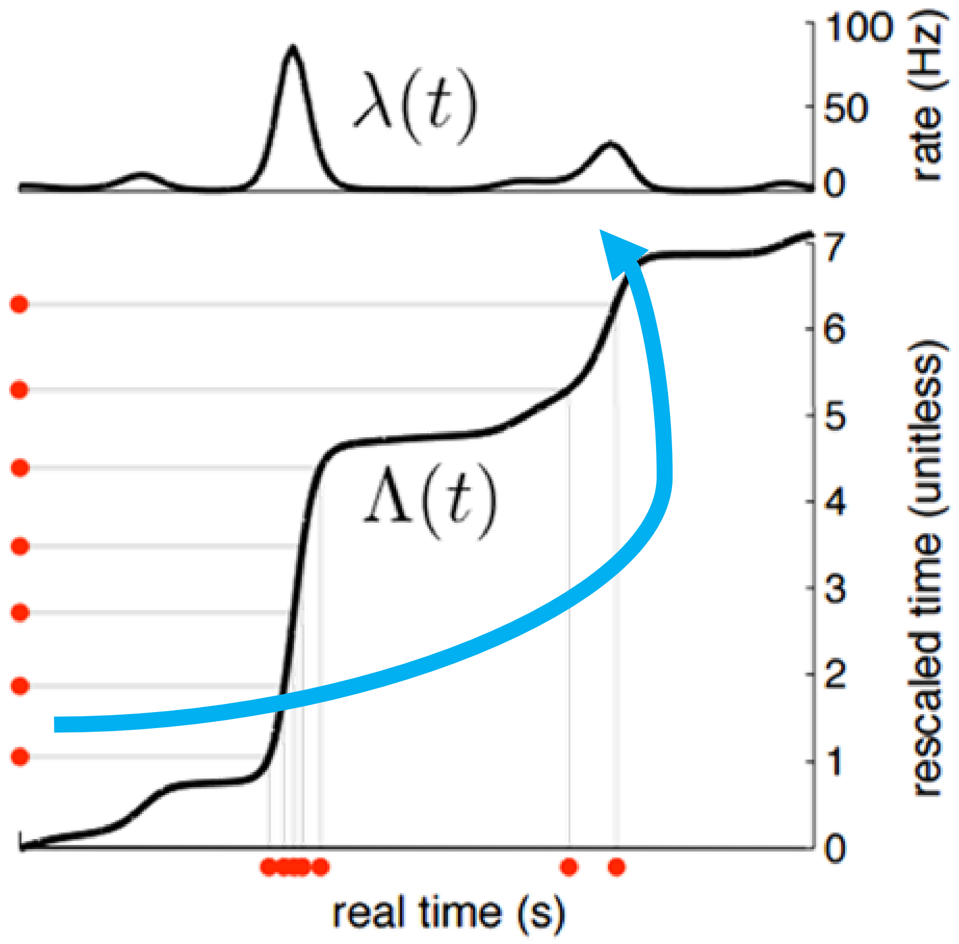
According to the change of variables formula, the joint density function of the random variables $Z_i = \int_{S_{i-1}}^{S_i} \lambda(t \mid H_t)dt$, for $i = 1, \ldots, N(T)$ is given by

$$f_{Z_1,\ldots,Z_{N(T)}}\left(z_1,\ldots,z_{N(T)}\right) = f_{S_1,\ldots,S_{N(T)}}\left(s_1,\ldots,s_{N(T)}\right)|J|^{-1}$$
$$= \prod_{i=1}^{N(T)}\left(\lambda(s_i \mid H_{s_i})\exp\left\{-\int_{s_{i-1}}^{s_i} \lambda(t \mid H_t)dt\right\}\right)\left(\prod_{i=1}^{N(T)} \lambda(s_i \mid H_{s_i})\right)^{-1}$$
$$= \prod_{i=1}^{N(T)}\left(\exp\{-z_i\}\right),$$

which is the joint probability density of independent exponential random variables with unit rate parameter.

U. Eden notes

Time Rescaling theorem



ז"א שאפשר להתמיר
תהליך פואסון $\lambda = 1$
לכל תהליך נק' עם
פונקציית קצב נתונה.

Pillow et al. (2009)

סימולציה של אות נקודה

- בהינתן פונק' הקצב מגרילים: $E_N \sim \exp(1)$ $MATLAB: exprnd \to$

בעזרת μ

- מחשבים אינטגרל על $\mu(t_{N+1}; N, \underline{w}_t)$ עד שמגיעים לערך E_{N+1} ומוצאים את t_{N+1}

$$\int_{t_N}^{t_{N+1}} \mu(\alpha; N, \underline{w}_t)\, d\alpha = E_{N+1}$$

בעזרת $\tilde{\mu}$

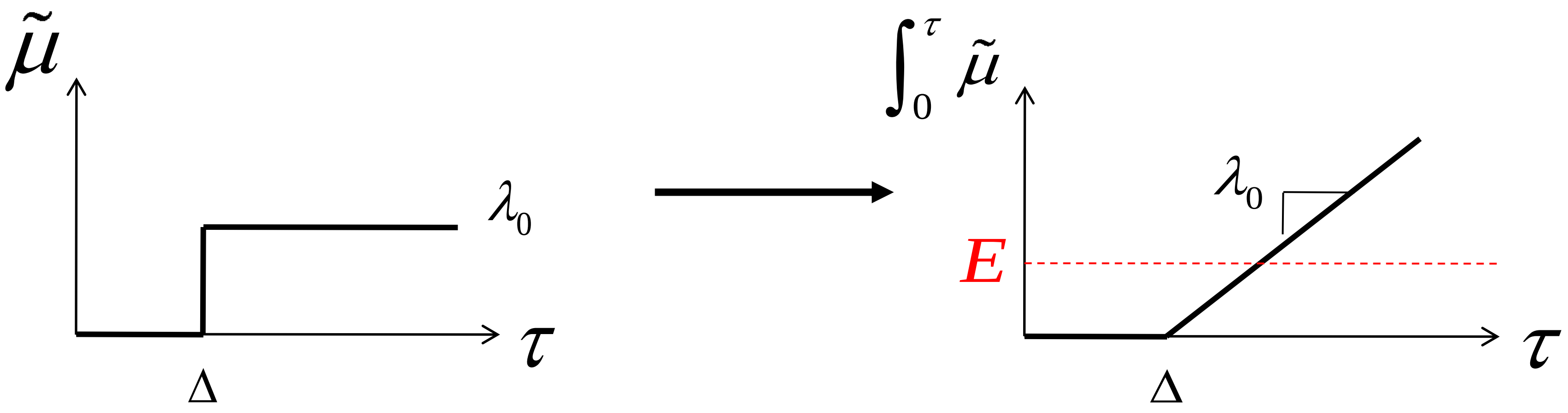
- מחשבים אינטגרל על $\tilde{\mu}(\tau_{N+1}; N, \boldsymbol{\tau})$ עד שמגיעים לערך E_{N+1} ומוצאים את τ_{N+1}

$$\int_{0}^{\tau_{N+1}} \tilde{\mu}(\alpha; N, \boldsymbol{\tau})\, d\alpha = E_{N+1}$$

דוגמה

- נניח נתון תהליך renewal עם תקופה רפרקטורית:

$$\tilde{\mu}\left(\tau_{N+1}; N, \boldsymbol{\tau}\right) = \tilde{\mu}\left(\tau_{N+1}\right) = \lambda_0 \cdot u\left(\tau_{N+1} - \Delta\right)$$



במקרה זה ניתן לפתור אנליטית ולקבל: $\boxed{\tau_{N+1} = E_{N+1} / \lambda_0 + \Delta}$

מימוש לדוגמה

נתונה!

```
function tspikes = TimeRescalingSimulation( lambdat,Ttot,deltaint )
% function simulates a point process depending on it's stochastic intensity
% function lambda(t), for a desired Ttot period of time. The numerical
% integration is carried out in steps of deltaint (minimal interval value)
%
% Inputs
% lambdat   - given stochastic intensity function of our PP
% Ttot      - total "experiment"/simulation length
% deltaint  - minimal interval value/ numerical integration difference
%
% Outputs
% tspikes   - simulated spike times for PP with lambdat

% Inits.
tlow = 0; % initialize the lower bound of the integral
thigh = deltaint; % initialize the upper bound of the integral
E = exprnd(1); % initial threshold
h = waitbar(0,'Please wait...'); % add a wait bar

% intergrate and out
tspikes = [];
while thigh <= Ttot
    intval = integral(lambdat,tlow,thigh); % integral value

    % check if it crosses the threshold
    if intval >= E
        tspikes = [tspikes thigh]; % save the current upper bound
        tlow = thigh; % new lower bound
        thigh = tlow + deltaint; % new upper bound
        E = exprnd(1); % cast a new threshold
    else
        thigh = thigh + deltaint; % new upper bound
    end

    waitbar(thigh/Ttot) % update waitbar
end
close(h); % close waitbar
end
```

בסה"כ אינטגרציה עד שעוברים
סף. באותה מידה ניתן היה
להשתמש ב-cumtrapz..

מימוש יותר יעיל

נתונה!

```
function tspikes = TimeRescalingSimulation_v2(lambdat,Ttot,deltaint)
% function simulates a point process depending on it's stochastic intensity
% function lambda(t), for a desired Ttot period of time. The numerical
% integration is carried out in steps of deltaint (minimal interval value)
%
% Inputs
% lambdat   - given stochastic intensity function of our PP
% Ttot      - total "experiment"/simulation length
% deltaint  - minimal interval value/ numerical integration difference
%
% Outputs
% tspikes   - simulated spike times for PP with lambdat

intaxis = (0:deltaint:Ttot)'; % the integration time axis
intval = cumtrapz(intaxis,lambdat(intaxis)); % the integral evaluated at each point
E = exprnd(1); % initial threshold
ind = find(intval>=E); % find the initial spike time
tspikes = intaxis(ind(1)); % initial spike time
thigh = tspikes; % initialize the upper integral time limit
h = waitbar(0,'Please wait...'); % add a wait bar

% intergrate and out
while thigh < Ttot
    intval = intval - intval(ind(1)); % current integral value
    E = exprnd(1); % cast a new threshold

    % find the appropriate spike time
    ind = find(intval>=E);
    if isempty(ind)
        break;
    end
    tspikescurr = intaxis(ind(1)); % current spike time
    tspikes = [tspikes tspikescurr]; % save the result
    thigh = tspikescurr; % new upper bound
    waitbar(thigh/Ttot) % update waitbar
end
close(h); % close waitbar
end
```

הבדל עיקרי שמחשבים את
האינטגרל "המצטבר" מראש..

נושאים עקריים

✓ שאלת חזרה
- סימולציה של תהליך נקודה
  - ←IPFM
  - ←Time Rescaling
  - שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - Maximum Likelihood
  - Time Rescaling
- סיכום

אוטו-קורלציה של תהליך נקודה

בתהליך פואסון בלבד: הקשר בין האוטו-קורלציה של תהליך הקצב לאוטו-קורלציה של תהליך הנקודה:

$$R_{\Delta N,\Delta N}(\tau)=R_{\lambda,\lambda}(\tau)+\delta(\tau)\cdot E[\lambda]$$

מסקנה:

- על מנת לייצר תהליך נקודה בעל אוטו-קורלציה רצויה, די לייצר תהליך קצב בעל אותה אוטו-קורלציה, ולייצר ממנו תהליך נקודה בשיטות שלמדנו.

קרוס-קורלציה של תהליך נקודה

הקשר בין הקרוס-קורלציה של תהליכי הקצב לקרוס-קורלציה של תהליכי הנקודה:

$$R_{\Delta N_1,\Delta N_2}\left(\tau\right)=R_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\tau\right) \qquad R_{\Delta N_1,\lambda_2}\left(\tau\right)=R_{\lambda_1,\Delta N_2}\left(\tau\right)$$

מסקנות:

- על מנת לייצר תהליך נקודה בעל קרוס-קורלציה רצויה עם אות אחר, די לייצר תהליך קצב בעל אותה קרוס-קורלציה עם אותו אות, ולייצר ממנו תהליך נקודה בשיטות שלמדנו.
- שאלה: למה אנחנו מעדיפים לעבוד עם הקצב? אות רציף!

ייצור תהליך נקודה בעל אוטו-קורלציה רצויה

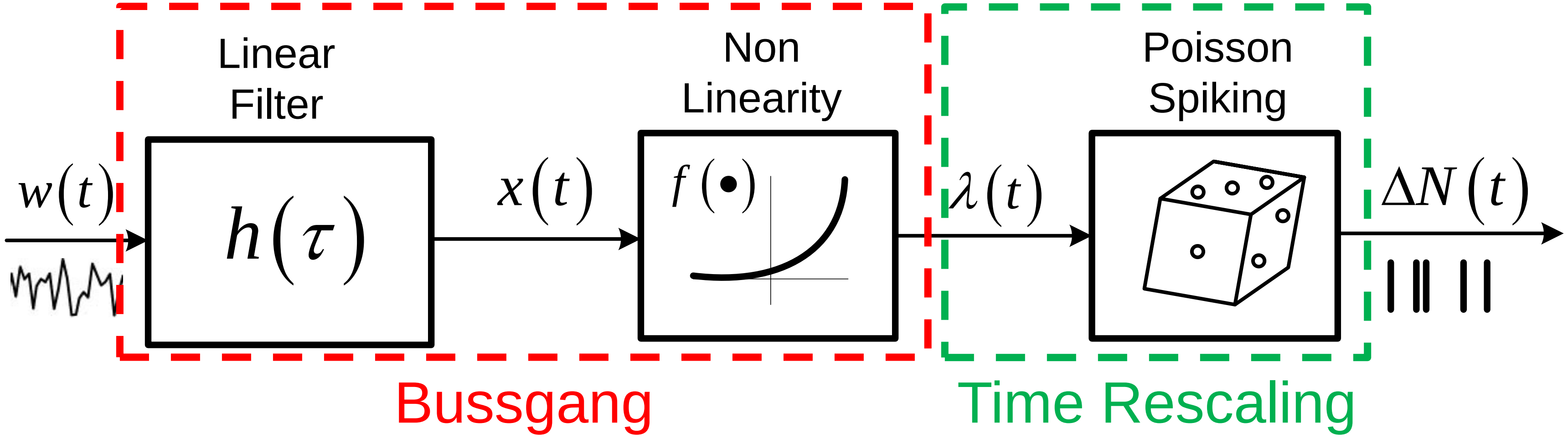
הבעיה:

- תהליך קצב חייב להיות אי-שלילי
- למדנו לייצר קורלציות לפי דרישה רק בתהליכים גאוסיים (IIR/FIR) ותהליכים גאוסיים אינם אי שליליים.

הפתרון:

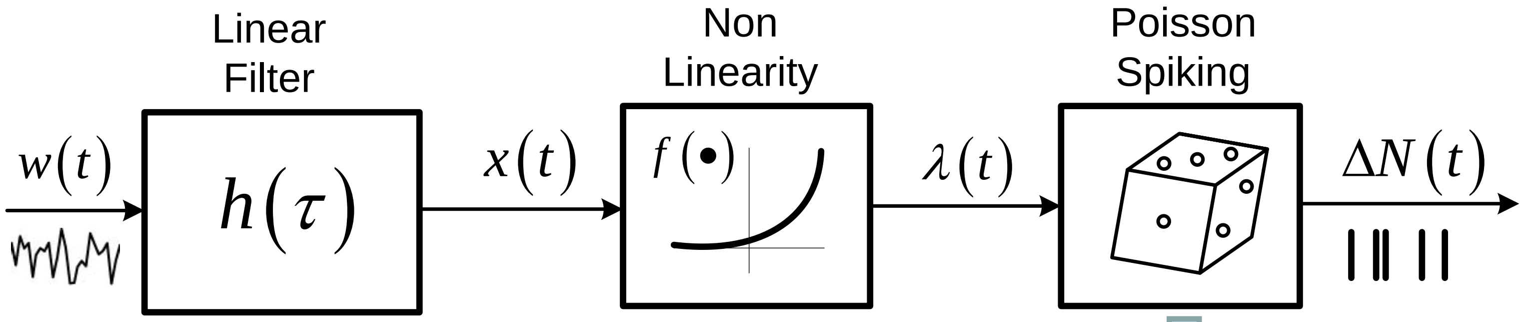
- נשתמש בתהליכים גאוסיים ונהפוך אותם לאי-שליליים
- נצטרך לבדוק כיצד הדבר משפיע על הקורלציות.

אלגוריתם לייצור תהליך נקודה בעל קורלציה רצויה



- חישוב האוטו-קורלציה הדרושה בכניסה לטרנספורמציה הלא לינארית
- ייצור רעש לבן גאוסי
- העברת הרעש במערכת לינארית שתייצר את הקורלציה הדרושה
- העברת האות המתקבל במערכת הלא-לינארית לקבלת תהליך הקצב
- ייצור תהליך נקודה המתאים לתהליך הקצב בעזרת Time Rescaling

LNP (Linear-Nonlinear-Poisson) cascade



$$R_x(\tau)=h(\tau)*h(-\tau)*R_w(\tau)$$

$$R_{\Delta N,\Delta N}(\tau)=R_{\lambda,\lambda}(\tau)+\delta(\tau)\cdot E[\lambda]$$

$$R_{\Delta N_1,\Delta N_2}(\tau)=R_{\lambda_1,\lambda_2}(\tau)$$

$$R_x(\tau)\overset{?}{\leftrightarrow}R_\lambda(\tau)$$

נפתור שאלה לדוגמה בתרגול חזרה

נושאים עקריים

- ✓ שאלת חזרה
- ✓ סימולציה של תהליך נקודה
  - ←IPFM
  - ←Time Rescaling
  - ←שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - Maximum Likelihood
  - Time Rescaling
- סיכום

גישת Maximum Likelihood

- נניח נתון תהליך פואסון ומוצעים מספר מודלים שונים לקצב התהליך $\lambda(t)$.
- בהינתן זמני המאורעות של התהליך, נבחן את הנראות של התהליך תחת הנחת המודלים השונים:

$$L\left(w_1,\ldots,w_{N(T)}\right)=\prod_{i=1}^{N(T)}\left(\lambda\left(w_i\right)\right)\cdot\exp\left\{-\int_0^T\lambda(t)\,dt\right\}$$

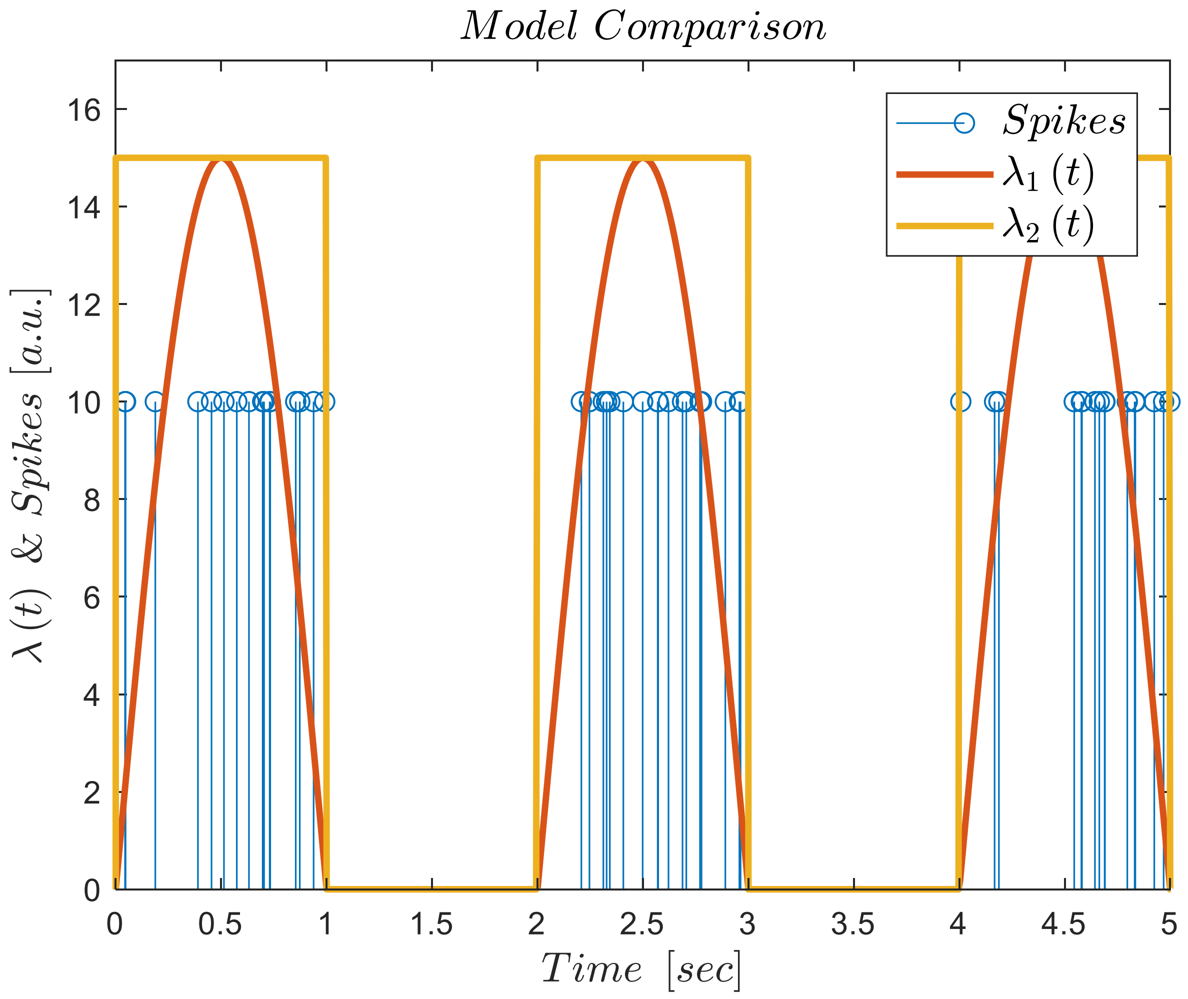
הסתברות לקבלת המאורעות
בדיוק בזמנים שהתקבלו

הסתברות לא לקבל
מאורעות בשום זמן אחר

- המודל שימקסם את L (ln(L)) הוא המודל המתאים ביותר.

דוגמה

- נתון:



מקבלים:

$$\ln\left(L\left(\{t_i\};\lambda_1(t)\right)\right)\approx 328$$

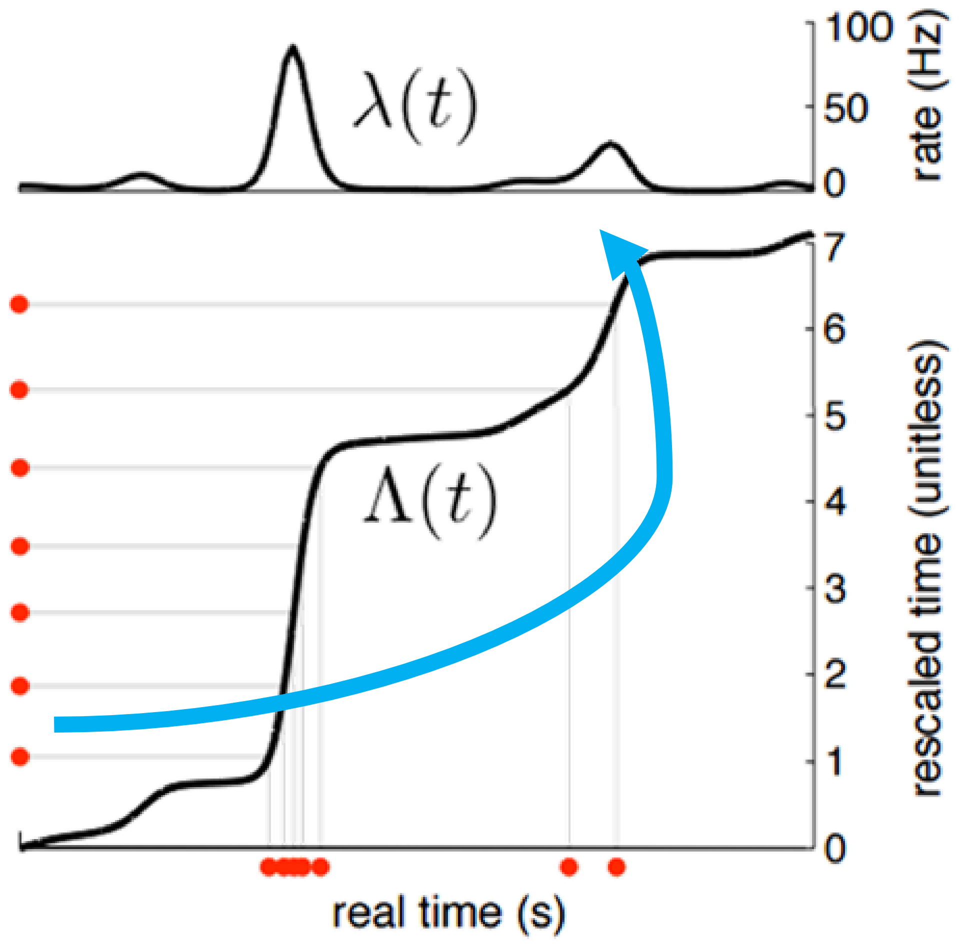
$$\ln\left(L\left(\{t_i\};\boxed{\lambda_2(t)}\right)\right)\approx 400$$

שאלה: איזה מודל נבחר?

נושאים עיקריים

- ✓ שאלת חזרה
- ✓ סימולציה של תהליך נקודה
  - ←IPFM
  - ←Time Rescaling
  - ←שליטה בקורלציות
- השוואה בין מודלי קצב
  - ←Maximum Likelihood
  - – Time Rescaling
- סיכום

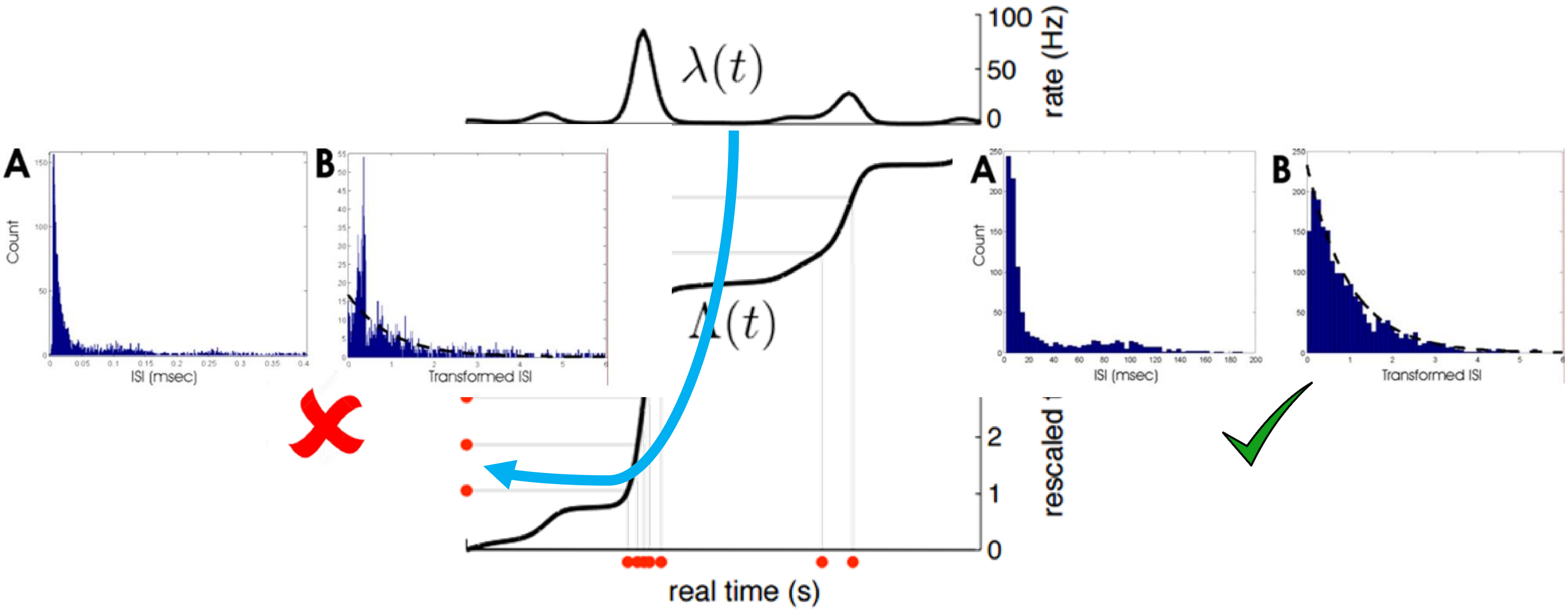
סימולציה - Time Rescaling



ז"א אפשר להתמיר
תהליך פואסון $\lambda = 1$
לכל תהליך נק' עם
פונקציית קצב נתונה.

Pillow et al. (2009)

השוואת מודלים - Time Rescaling



Pillow et al. (2009)

השוואת מודלים

- בהינתן סדרת ספייקים ופונק' קצב $\mu(t_{N+1};N,\underline{w}_t)$ שרוצים לבחון, מחשבים את האינטרוואלים E_{N+1} בציר "ההומוגני":

בעזרת μ

- מחשבים אינטגרל על $\mu(t_{N+1};N,\underline{w}_t)$ בין זמני הספייקים הנתונים t_N ו- t_{N+1} :

$$\int_{t_N}^{t_{N+1}} \mu(\alpha;N,\underline{w}_t)\,d\alpha = E_{N+1}$$

בעזרת $\tilde{\mu}$

- מחשבים אינטגרל על $\tilde{\mu}(\tau_{N+1};N,\boldsymbol{\tau})$ מ-0 ועד אורך האינטרוול הנתון τ_{N+1} :

$$\int_{0}^{\tau_{N+1}} \tilde{\mu}(\alpha;N,\boldsymbol{\tau})\,d\alpha = E_{N+1}$$

המודל המתאים
יותר ייתן:
$E_{N+1} \sim \exp(1)$

מימוש לדוגמה

```matlab
function [ E,tspikeshom ] = TimeRescalingComparison( lambdat,Tau )
% function generates a homogenous poisson point process depending
% from a process with stochastic intensity function lambda(t) with intervals
% vector Tau assuming the first interval is calculated from zero. the
% output is the intervals in the homogeneous Time-Rescaled poisson process
% (supposed to be distributed ~exp(1)) and the appropriate spikes.

% spiking times
tspikes = cumsum(Tau);

% Inits.
tlow = 0; % initial lower integration bound
thigh = tspikes(1); % initial higher integration bound
h = waitbar(0,'Please wait...'); % add a wait bar
E = zeros(1,length(tspikes)-1); % initialize the output

% integrate on lambda(t) to calculate EN
for i=1:numel(tspikes)-1
    E(i) = integral(lambdat,tlow,thigh); % current integration result
    tlow = thigh; % update lower bound
    thigh = tspikes(i+1); % update higher bound
    waitbar(i/(numel(tspikes)-1)) % update waitbar
end
close(h); % close waitbar

% spikes in the homogeneous axis
tspikeshom = cumsum(E);
end
```

נתונה סדרת ספייקים/מרווחים ומוצעים כמה מודלי קצב.

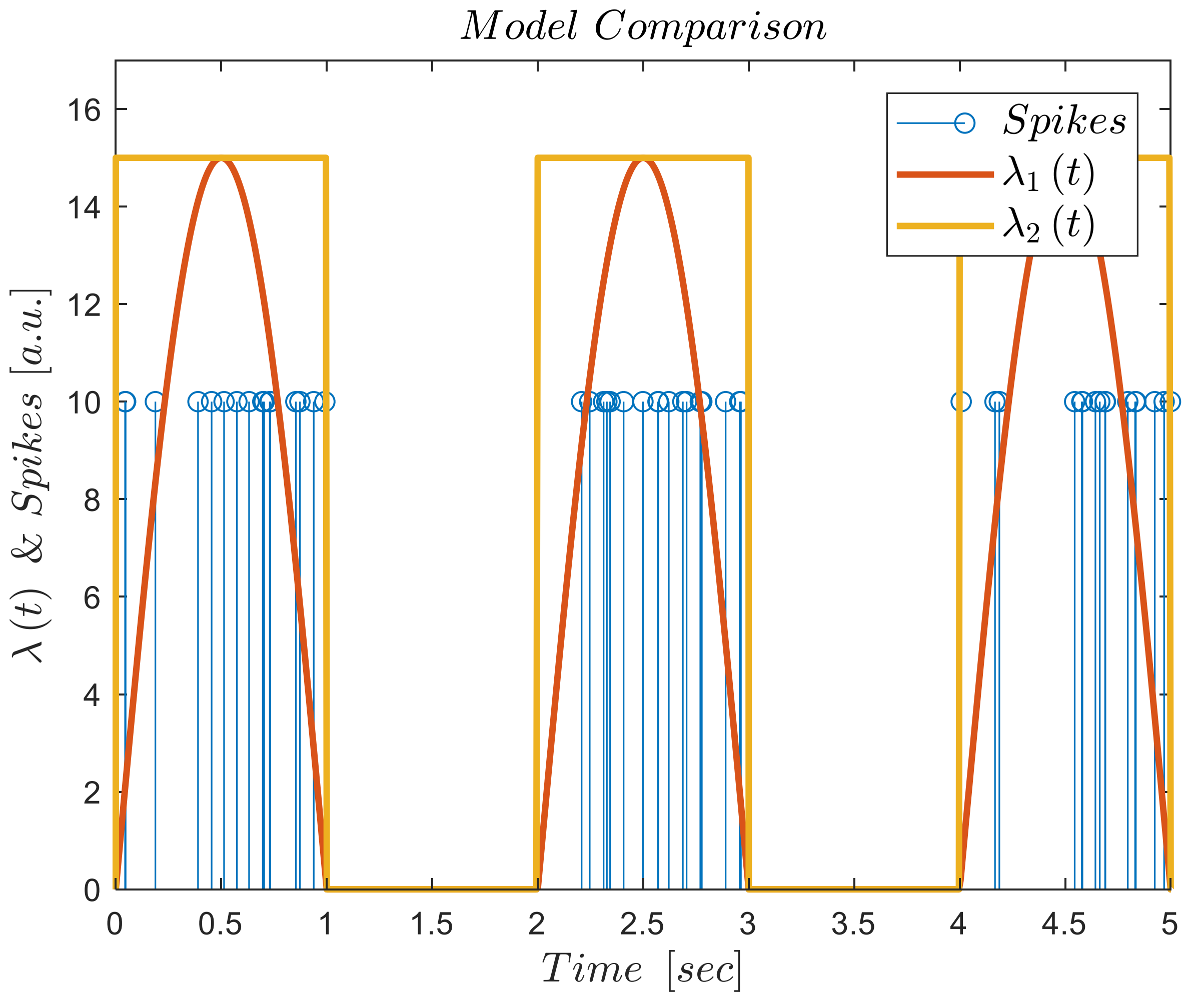
בהינתן מודל מסוים מחשבים את המרווחים בציר "ההומוגני" (E), ובודקים לאחר מכן התאמה למודל אקספוננציאלי.

אפשר למשל לבדוק את המרחק של השונות והממוצע מ-1:

$$E\left[E_{N+1}\right]=Var\left(E_{N+1}\right)=1$$

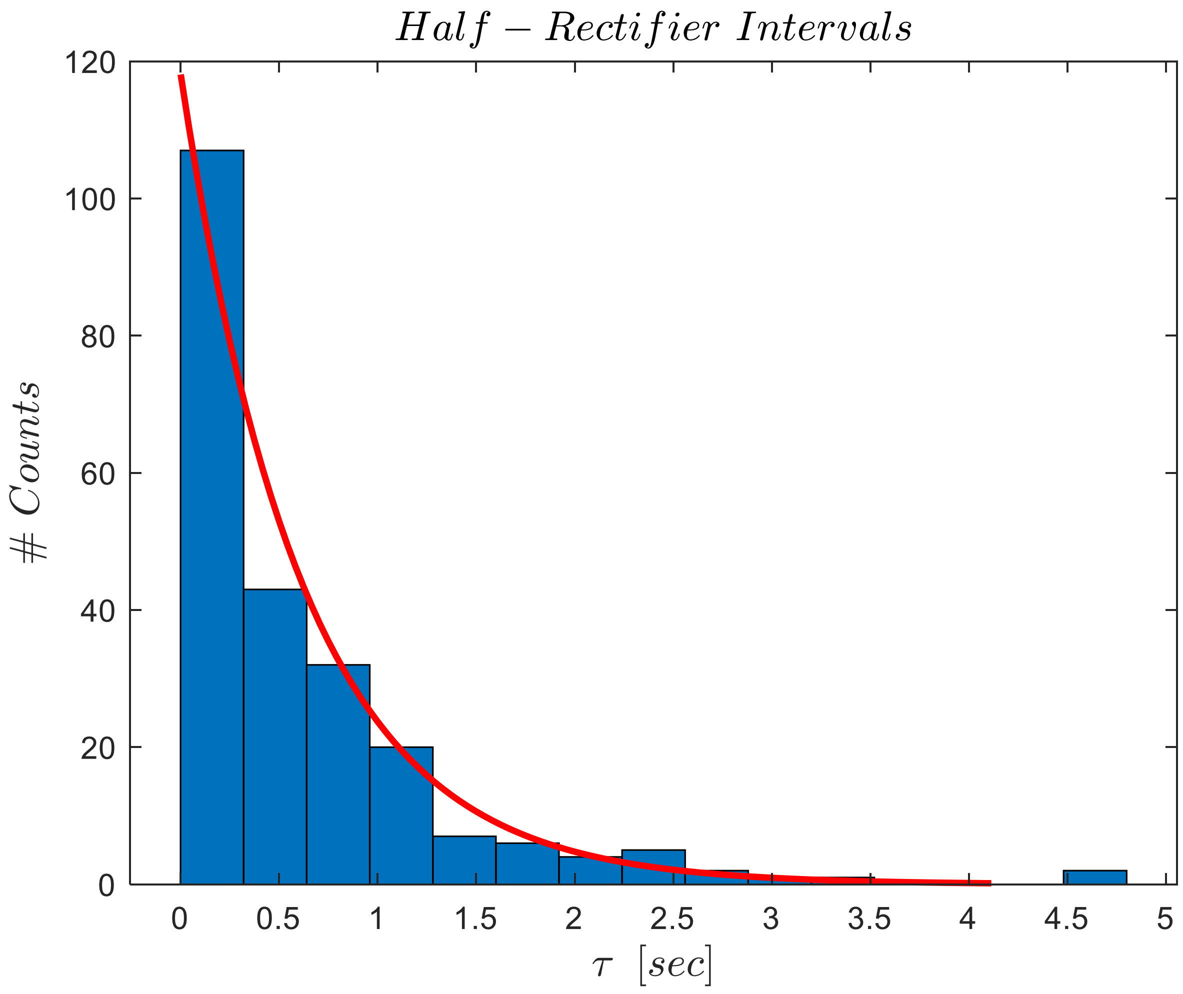
דוגמה

- נתון:



שאלה: איך לדעתכם יראו היסטוגרמות המרווחים לאחר Time Rescaling של שני המודלים?

דוגמה



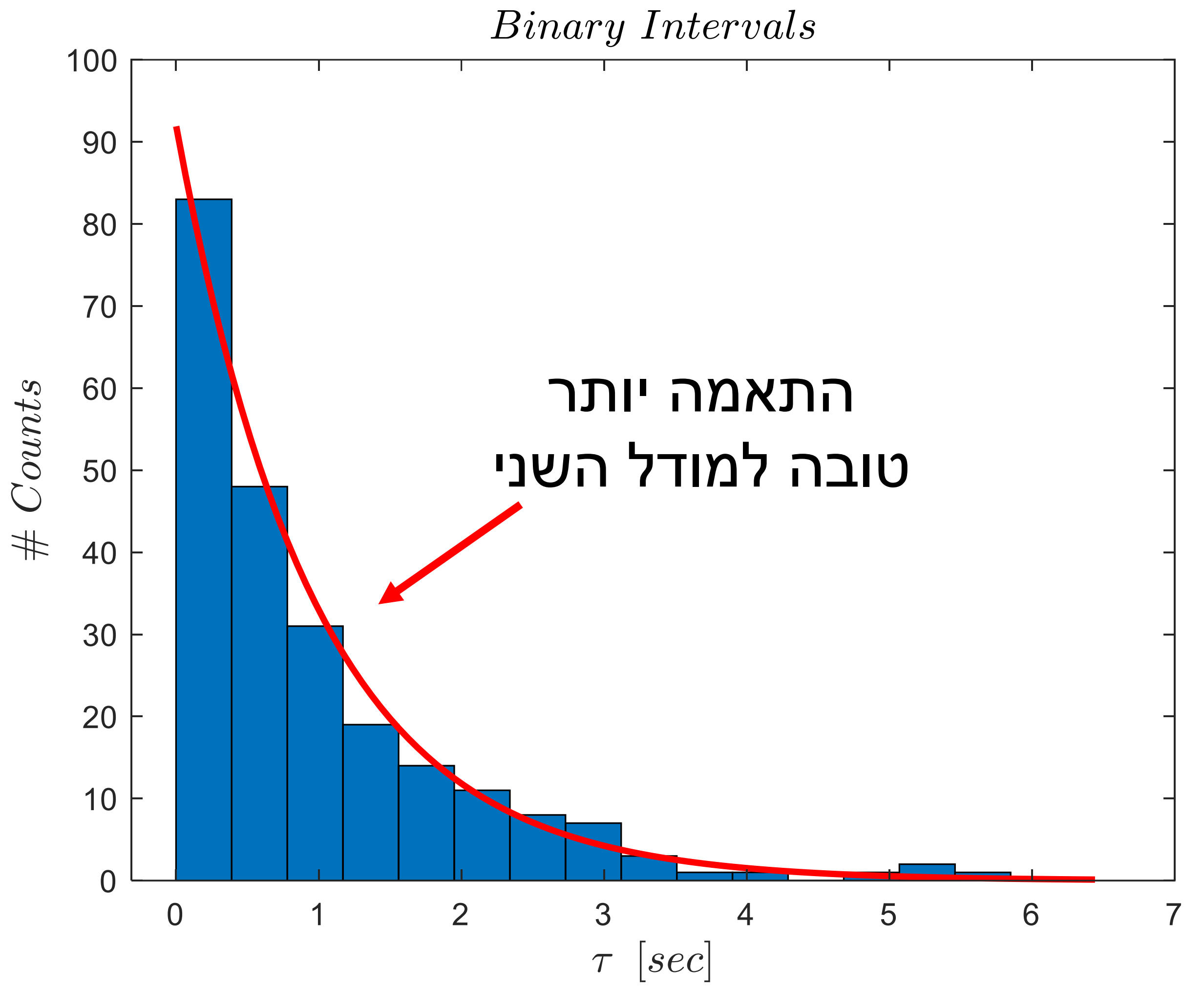
- עבור $\lambda_1(t)$:

שיערוך ממוצע ושונות אמפירים נותן:

$$E\left[E_{N+1}\right] \approx 0.62$$

$$Var\left(E_{N+1}\right) \approx 0.55$$

דוגמה



- עבור $\lambda_2(t)$:

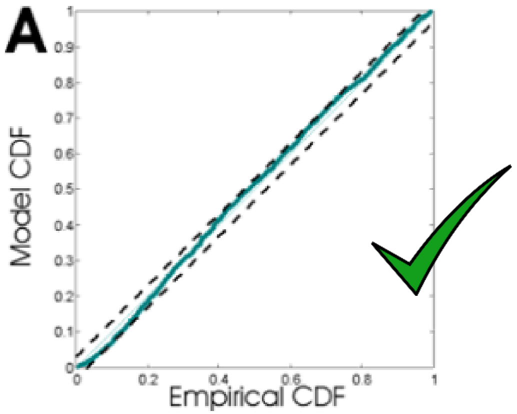
שיערוך ממוצע ושונות אמפירים נותן:

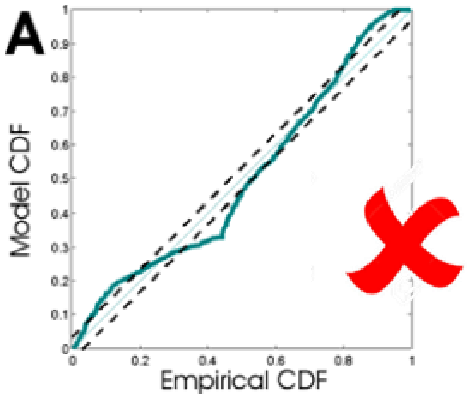
$$E\left[E_{N+1}\right] \approx 0.97$$

$$Var\left(E_{N+1}\right) \approx 1.03$$

Time Rescaling GOF testing

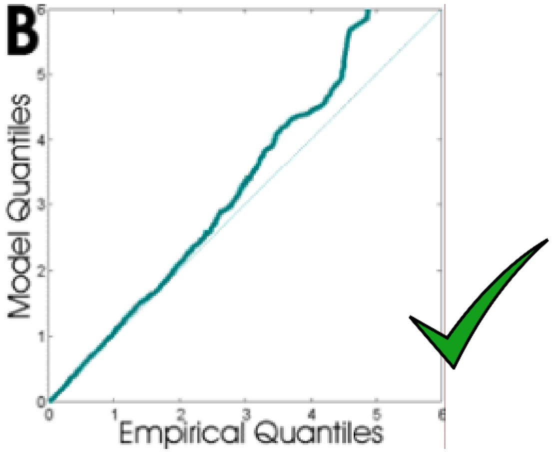
- שיטות סטטיסטיות גרפיות לבדיקה של מידת ההתאמה של הפילוג המתקבל לפילוג $\exp(\lambda = 1)$
  - **Kolgomorov-Smirnov test** – גרף שבודק כמה פונקציית הצפיפות המצטברת המשוערת מתאימה לתוצאות האמפיריות. במידה ויש התאמה הKS plot יראה כמו קו ב45 מעלות

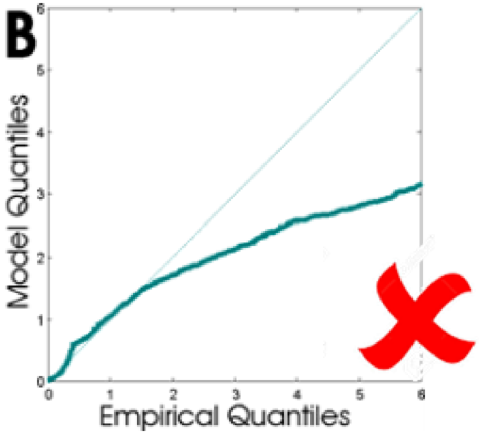




Time Rescaling GOF testing

- שיטות סטטיסטיות גרפיות לבדיקה של מידת ההתאמה של הפילוג המתקבל לפילוג $\exp(\lambda = 1)$
  - **quantile-quantile (QQ) plot** – מצייר את הquantiles האמפיריים מול אלה של המודל ירי. גם כאן נצפה לקו של 45 מעלות.





נושאים עקריים

- ✓ שאלת חזרה
- ✓ סימולציה של תהליך נקודה
  - ←IPFM
  - ←Time Rescaling
  - ←שליטה בקורלציות
- ✓ השוואה בין מודלי קצב
  - ←Maximum Likelihood
  - ←Time Rescaling
- סיכום

Background:

Filters, Estimators,
Auto- cross- correlation functions

T1-T3

Stationary Signal Analysis

T5

Simulation of correlated Gaussian processes
- AR
- FIR

LTI & R_{xy}
- h(τ) estimation
- Delay estimation
- Removal of EEG artifacts

T4

LTI & Correlations
- R_{xx}, R_{xy} estimation and FFT for S_{xx}, S_{xy} estimation

AR model
- Regular signals
- Yule-Walker equations

T7

Spectral Analysis:
- Non-parametric
  - Tapering
  - Multi-tapering
    - Sinus detection

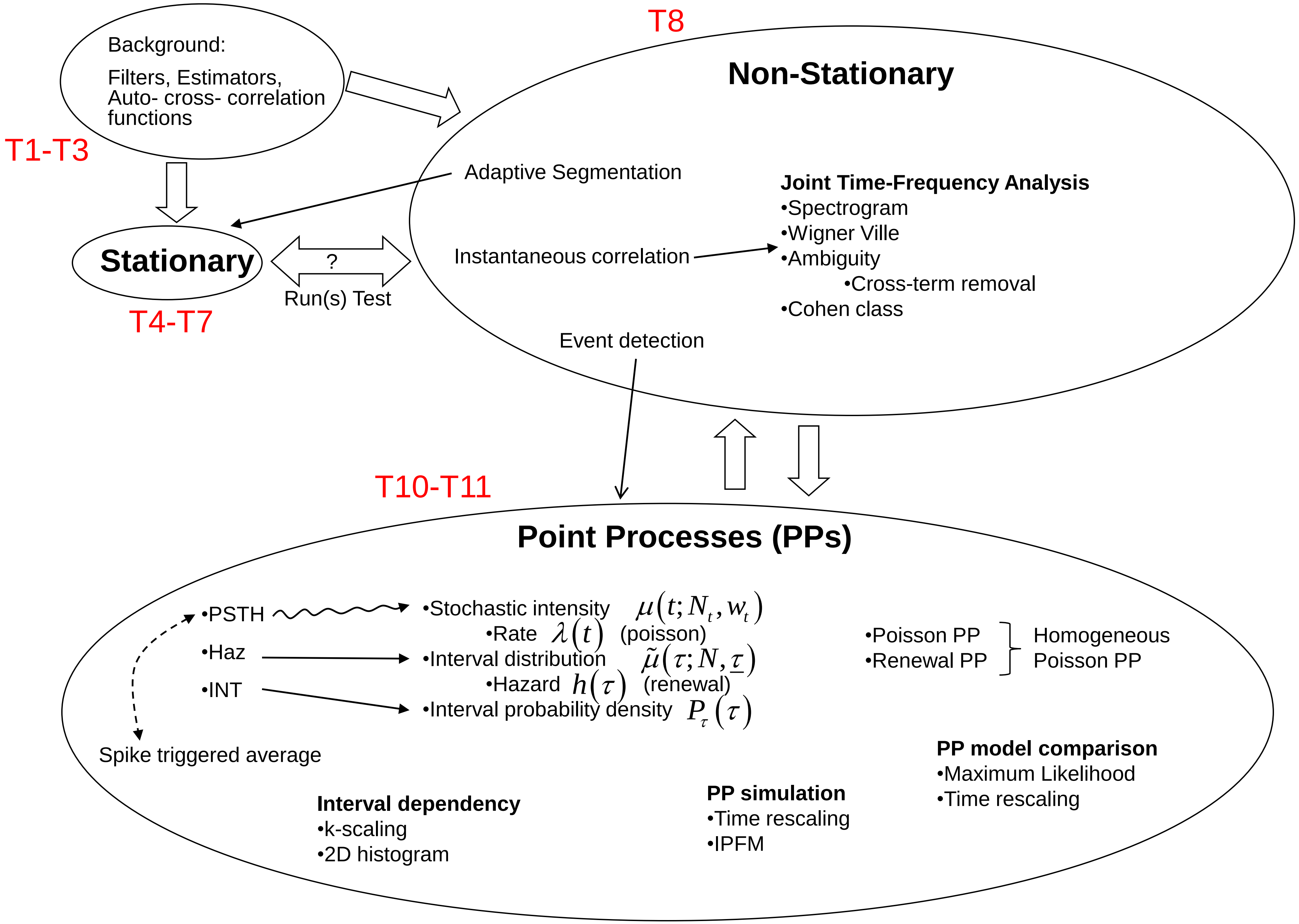
T6

- Averaging between trials
  - Uncorrelated noise
  - Correlated noise
  - Spike triggered average
- Bussgang
- S_{xx}, S_{xy} estimation
  - Parametric (AR)

Run(s) Test

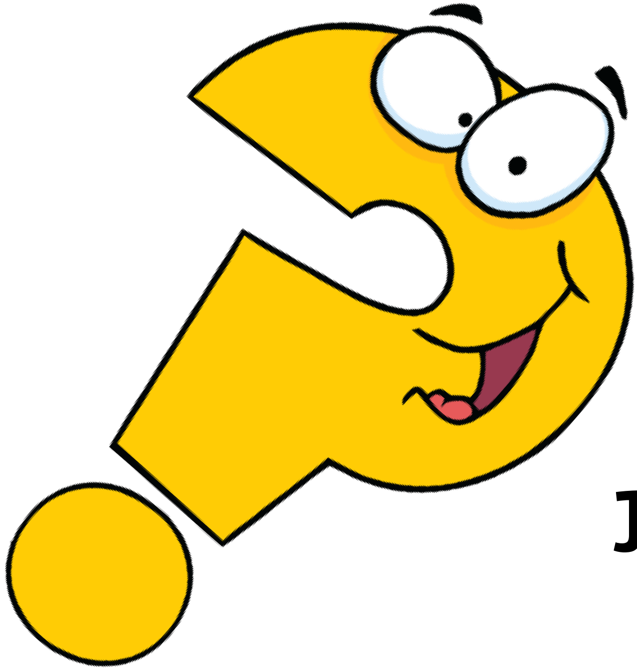
T1

Non-Stationary


T8
Background:
Filters, Estimators, Auto- cross- correlation functions
T1-T3
Non-Stationary
Adaptive Segmentation
Joint Time-Frequency Analysis
•Spectrogram
•Wigner Ville
•Ambiguity
•Cross-term removal
•Cohen class
Stationary
?
Run(s) Test
Instantaneous correlation
T4-T7
Event detection
T10-T11
Point Processes (PPs)
•PSTH
•Haz
•INT
•Stochastic intensity $\mu(t; N_t, w_t)$
•Rate $\lambda(t)$ (poisson)
•Interval distribution $\tilde{\mu}(\tau; N, \underline{\tau})$
•Hazard $h(\tau)$ (renewal)
•Interval probability density $P_\tau(\tau)$
•Poisson PP
•Renewal PP
Homogeneous Poisson PP
Spike triggered average
PP model comparison
•Maximum Likelihood
•Time rescaling
Interval dependency
•k-scaling
•2D histogram
PP simulation
•Time rescaling
•IPFM

נושאים עקריים

- ✓ שאלת חזרה
- ✓ סימולציה של תהליך נקודה
  - ←IPFM
  - ←Time Rescaling
  - ←שליטה בקורלציות
- ✓ השוואה בין מודלי קצב
  - ←Maximum Likelihood
  - ←Time Rescaling
- ✓ סיכום



שאלות

תרגול 12 – חזרה

נושאים עיקריים

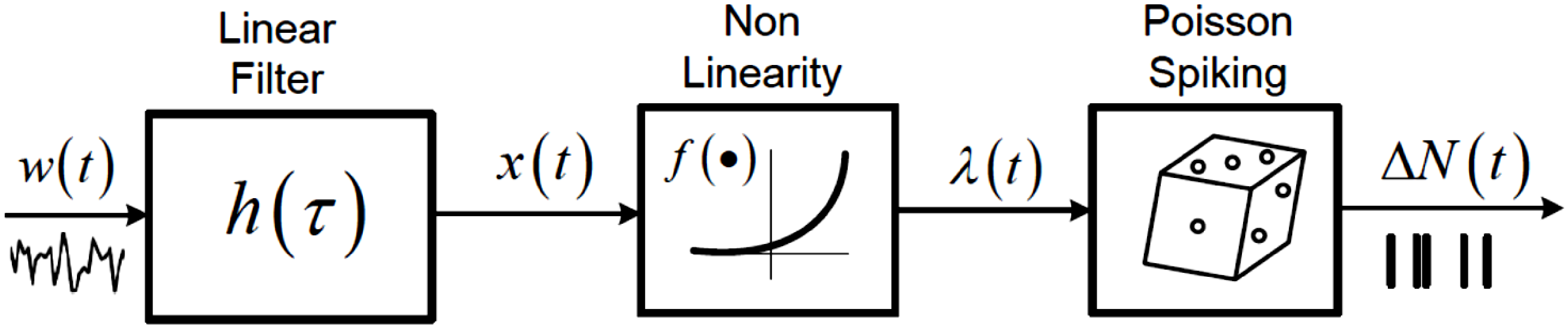
- שאלה בנושא LNP Cascade
- שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard
- שאלה בנושא AR (מועד א 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)
- מבנה המבחן וטיפים איך ללמוד

נושאים עיקריים

- שאלה בנושא LNP Cascade
- שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard
- שאלה בנושא AR (מועד א 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)
- מבנה המבחן וטיפים איך ללמוד

שאלה בנושא LNP Cascade

המודל הבא מתאר את תגובתו של תא עצב לגירוי סנסורי:



$w(t)$ - הגירוי – רעש גאוסי לבן בכניסה למערכת.

$h(\tau)$ - גרעין של פילטר ליניארי.

$f(x(t))$ - אי-ליניאריות סטאטית.

$\Delta N(t)$ - הפעילות של תא העצב (ספייקים – MUAP).

שאלה בנושא LNP Cascade

בקובץ LNP.mat נתונות תוצאות אחד הניסויים: גיורי בוקטור w וזמני ירי של יחידה מוטורית בוקטור times. תדר הדגימה של סיגנל הגירוי הוא 100Hz.

א. הציעו שיטה לשיערוך הגרעין של הפילטר הליניארי $h(\tau)$.

ב. שערכו את הפילטר הליניארי $h(\tau)$. נרמלו את הפילטר לפי $\|h(\tau)\|=1$.

ג. חשבו את $x(t)$.

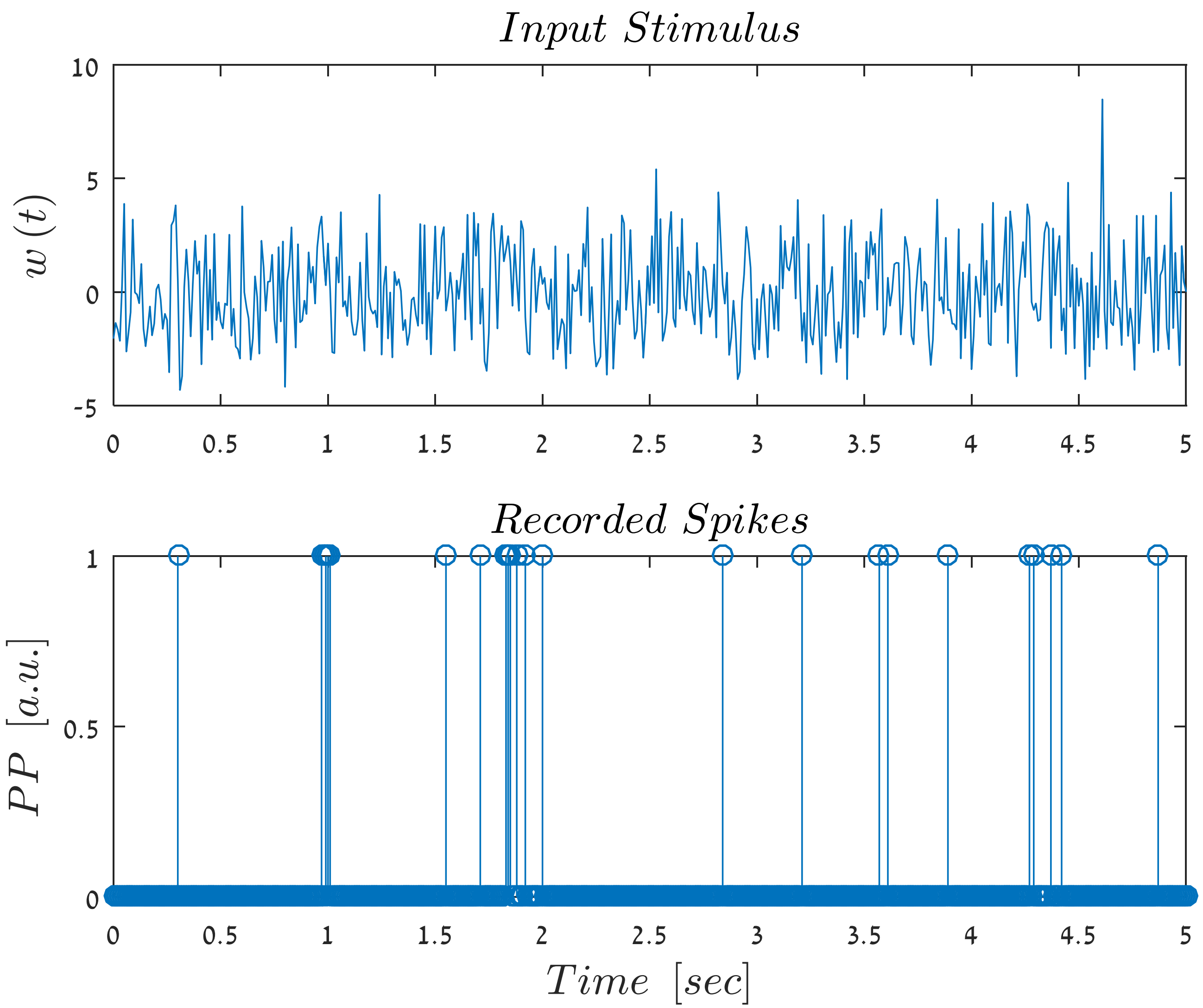
ד. חשבו את $\lambda(t)$ הנתונה ע"י $\lambda(t)=\exp(x(t))$.

ה. השתמשו ב $\lambda(t)$ כתהליך קצב של תהליך פואסון לא הומוגני וחשבו פונקציית מדגם של תהליך נקודה כזה.

ו. השוו את התוצאה מהסעיף הקודם לאות MUAP הנתון בשאלה. **הסבירו**.

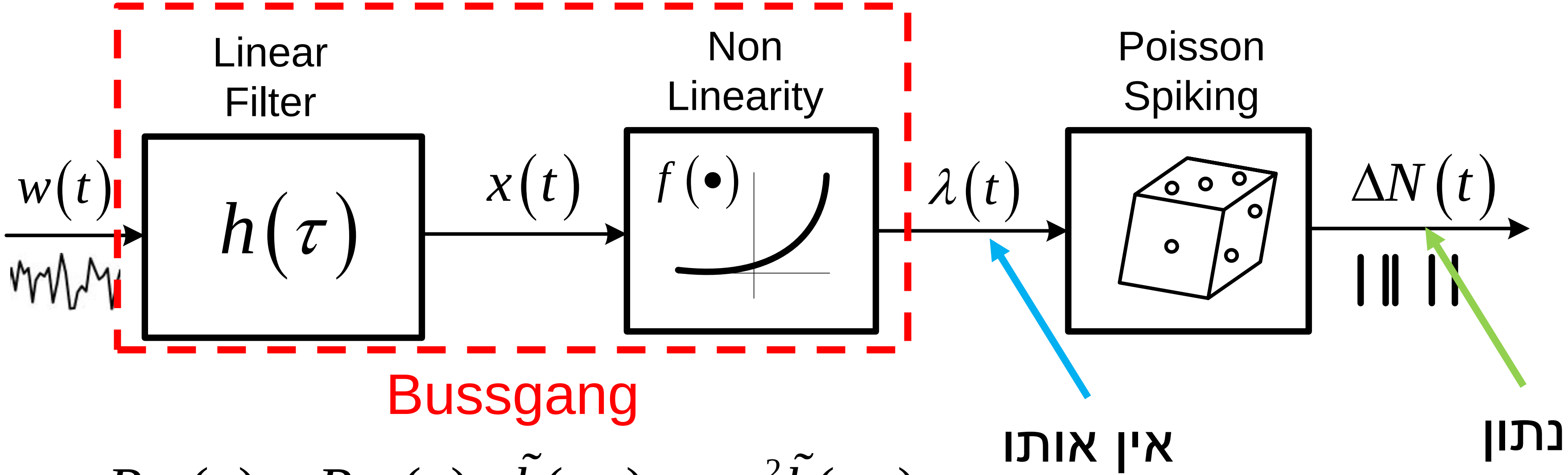
LNP Cascade שאלה בנושא

- נתון:



שאלה בנושא LNP Cascade

א. הציעו שיטה לשיערוך הגרעין של הפילטר הליניארי $h(\tau)$.



$$R_{w\lambda}(\tau) = R_{ww}(\tau) * \tilde{h}(-\tau) = \sigma_w{}^2 \tilde{h}(-\tau)$$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{h}(\tau) = \frac{R_{w\lambda}(-\tau)}{\sigma_w{}^2} = \frac{R_{w\lambda}(-\tau)}{R_{ww}(0)}}$$

שאלה: מה עושים?

שאלה בנושא LNP Cascade

- ניזכר במשפט מתרגול 11: הקשר בין הקרוס-קורלציה של תהליכי הקצב לקרוס-קורלציה של תהליכי הנקודה:

$$R_{\Delta N_1,\Delta N_2}\left(\tau\right)=R_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\tau\right)$$

- ניתן להרחיב את המשפט ולהראות שמתקיים:

$$\tilde{h}(\tau)=\frac{R_{w\lambda}(-\tau)}{R_{ww}(0)}=\frac{R_{w\Delta N}(-\tau)}{R_{ww}(0)}$$

- כיוון שהגירוי ותהליך הנקודה נתונים ניתן לשערך את החלק הליניארי.

שאלה בנושא LNP Cascade

ב. שערכו את הפילטר הליניארי $h(\tau)$. נרמלו את הפילטר לפי $\|h(\tau)\|=1$.

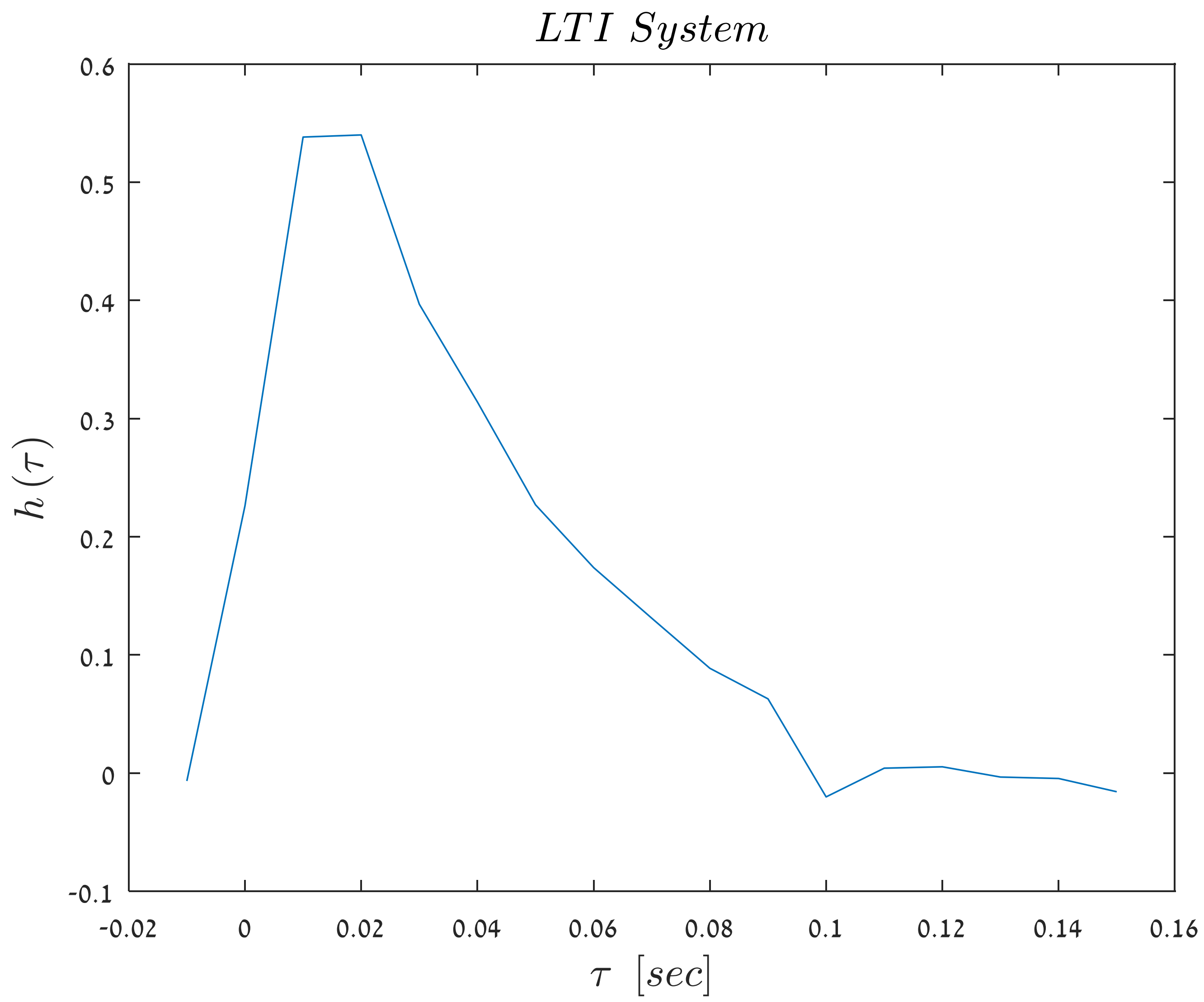
```
% load the data
load('LNP.mat');

%% Section B

N = length(w); % signal length
t = (0:N-1)./Fs; % create the time axis
PP = zeros(N,1); % point process
PP(round(times*Fs)) = ones(size(times)); % spikes at given times

% LTI filter estimation up to const.
[Rww,tauw] = xcorr(w); % stimulus autocorrelation
[RwN,tauwN] = xcorr(w,PP); % stimulus PP cross-correlation
hgal = flipud(RwN)/Rww(tauw==0); % estimate the compound system (LN)

% Norm restriction and cropping only the central part to reduce noise
h = hgal(tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15)/...
    norm(hgal(tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15),2);

% Nonlinear constant
kg = norm(hgal(tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15),2);
```

חישוב הפילטר
עד כדי קבוע

מציאת הקבוע לפי
אילוץ הנורמה

שאלה בנושא LNP Cascade

התוצאה:



שאלה בנושא LNP Cascade

ג. חשבו את $x(t)$.

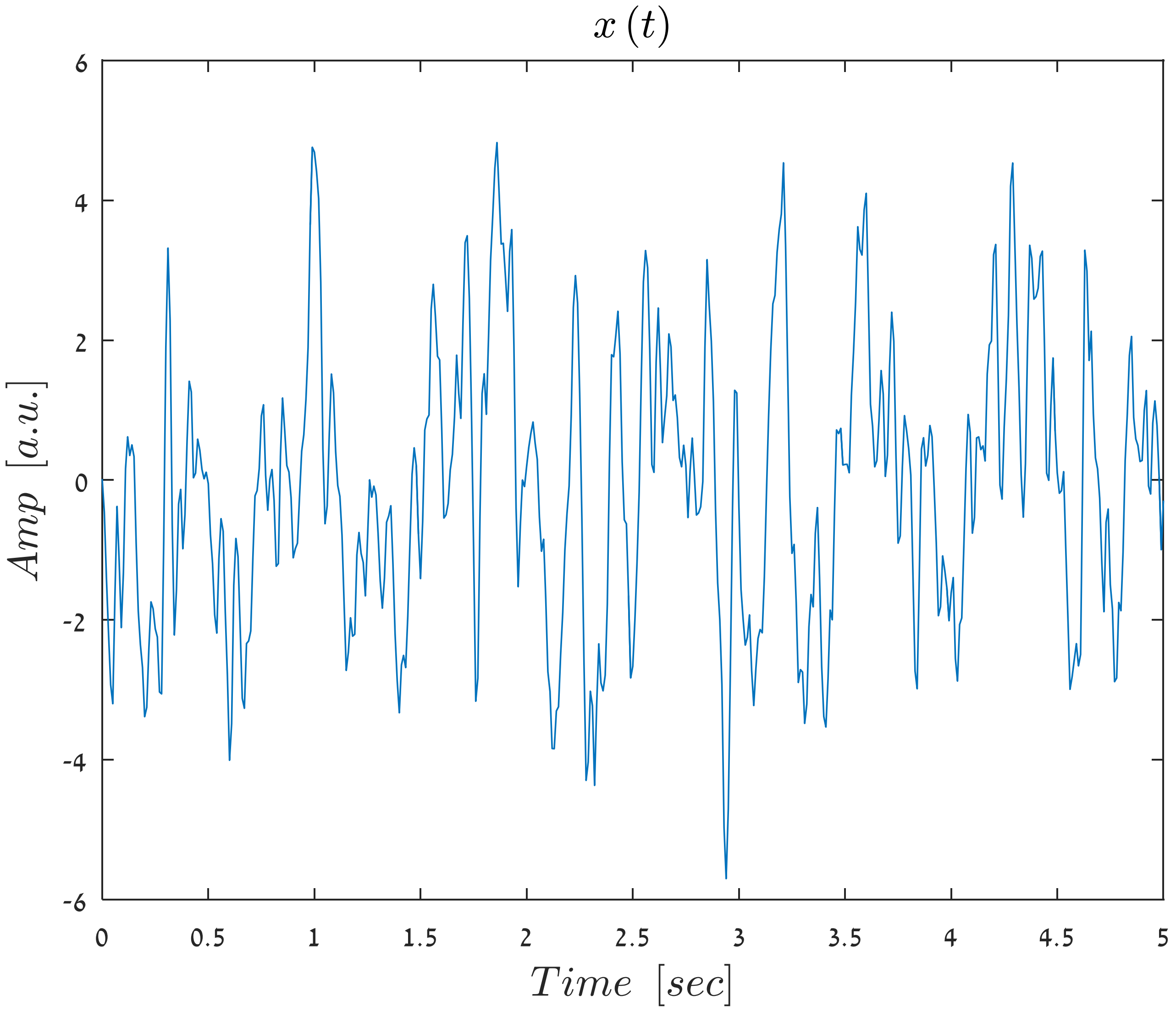
ד. חשבו את $\lambda(t)$ הנתונה ע"י $\lambda(t)=\exp\left(x(t)\right)$.

```
%% Section C

x = filter(h,1,w); % simply filtering w with the derived filter

% plot the result
figure();plot(t,x);xlim([0 5]);
hx = xlabel('$Time \ \left[sec\right]$');
hy = ylabel('$Amp \ \left[a.u.\right]$');
ht = title('$x\left(t\right)$');
set([hx, hy, ht], 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 13);
```

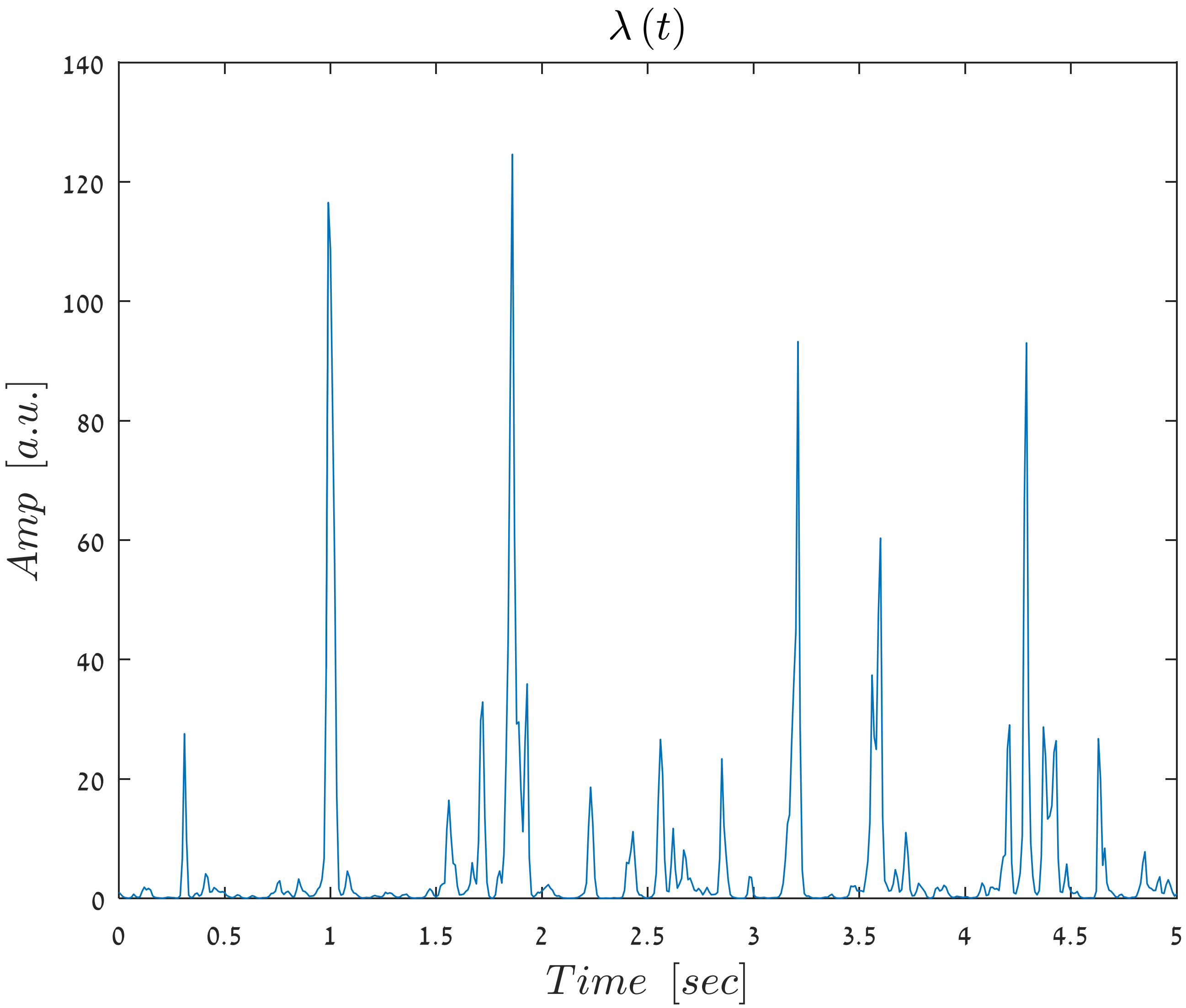
```
%% Section D

lambda = exp(x); % applying an element-wise exponential

% plot the result
figure();
plot(t,lambda);xlim([0 5]);
hx = xlabel('$Time \ \left[sec\right]$');
hy = ylabel('$Amp \ \left[a.u.\right]$');
ht = title('$\lambda\left(t\right)$');
set([hx, hy, ht], 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 13);
```

שאלה בנושא LNP Cascade

ה- $x(t)$ המתקבל:



LNP Cascade שאלה בנושא

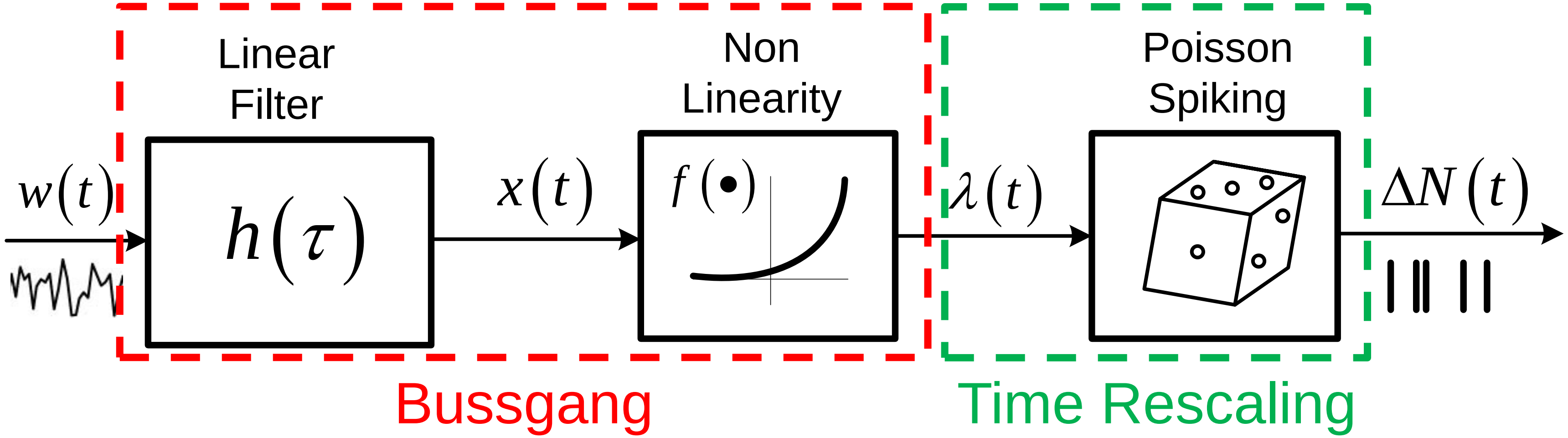


ה-$\lambda(t)$ המתקבל:

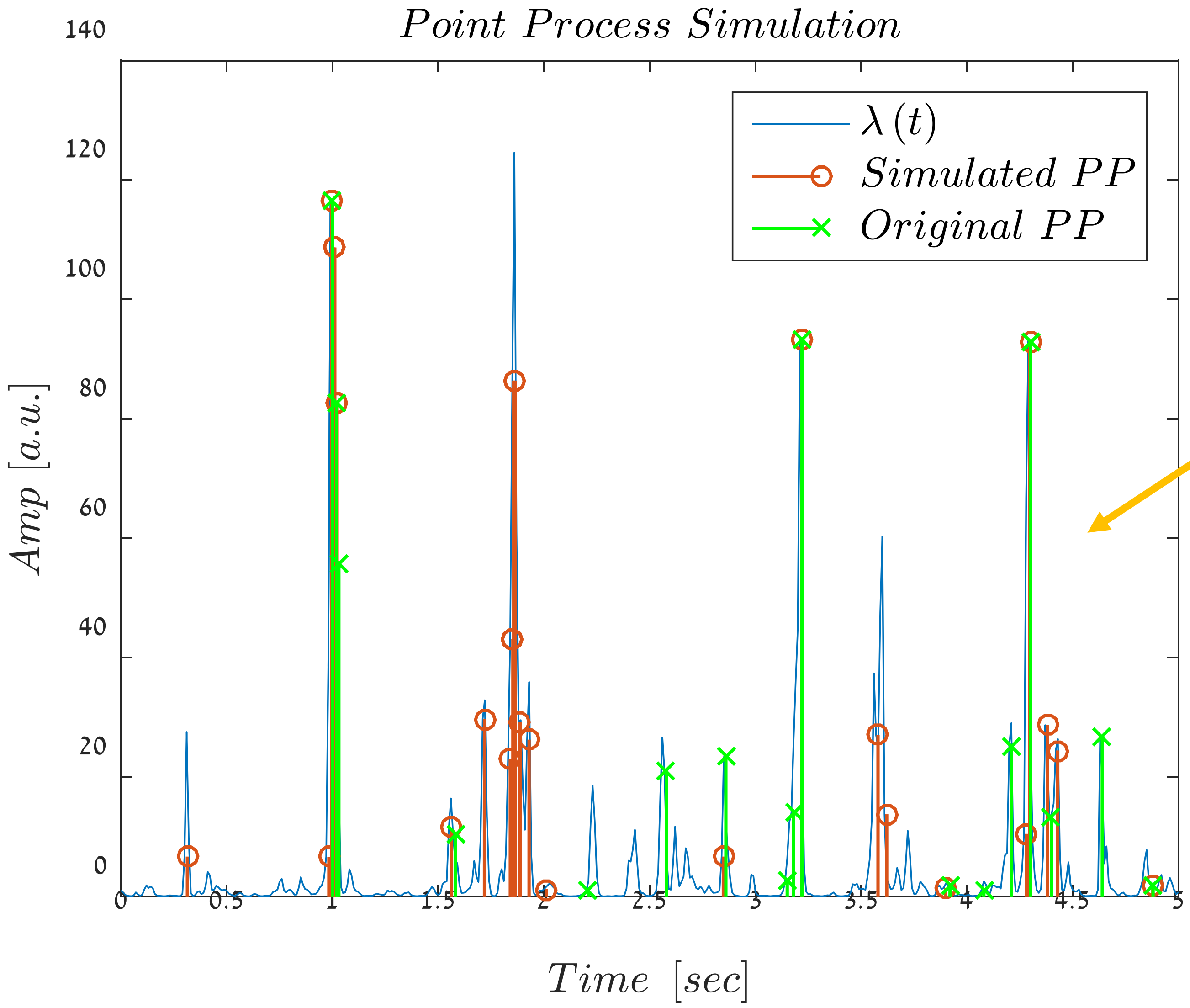
שאלה בנושא LNP Cascade

ה. השתמשו ב- $\lambda(t)$ כתהליך קצב של תהליך פואסון לא הומוגני וחשבו פונקציית מדגם של תהליך נקודה כזה.

ו. השוו את התוצאה מהסעיף הקודם לאות MUAP הנתון בשאלה. **הסבירו.**



שאלה בנושא LNP Cascade



תוצאה מתקבלת:

התאמה לא רעה בין פונקציית הקצב לבין הספייקים, גם המסומלצים וגם הנתונים, מה שמעיד על שיערוך נכון.

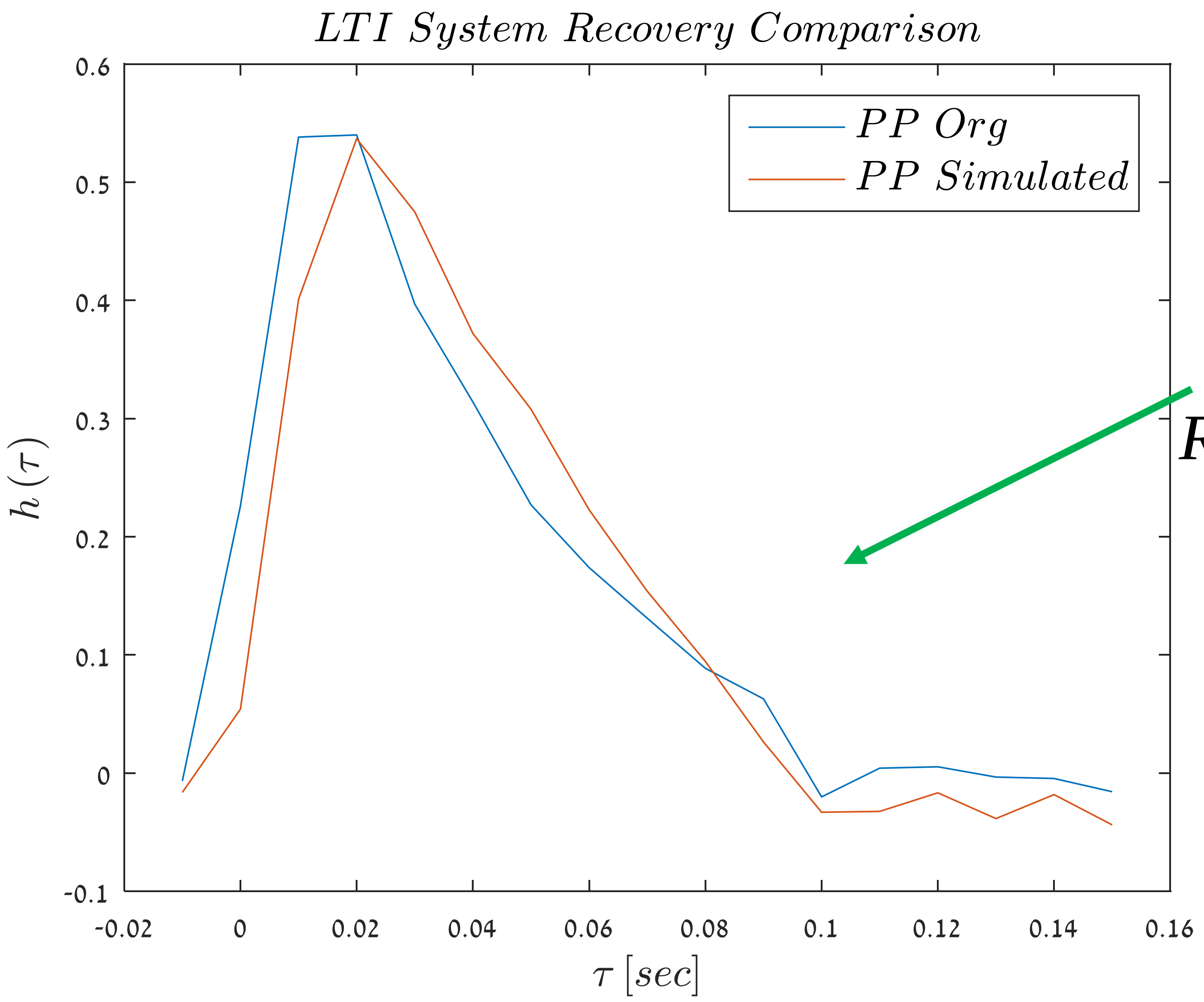
שאלה בנושא LNP Cascade

ז. שערכו כעת את הגרעין הלינארי של המודל בעזרת תהליך הנקודה החדש שסימלצתם והתהליך הגאוסי הלבן הנתון בשאלה. **הסבירו את התוצאה.**

קרוסקורלציה עם התהליך המסומלץ!

```
%% Section Z

% LTI filter estimation up to const.
[Rww,tauw] = xcorr(w); % stimulus autocorrelation
[RwNsim,tauwN] = xcorr(w,PPsim); % stimulus PP cross-correlation
hgal = flipud(RwNsim)/Rww(tauw==0); % estimate the compound system (LN)

% Norm restriction and cropping only the central part to reduce noise
hsim = hgal(tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15)/...
    norm(hgal(tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15),2);

% Nonlinear constant
kg = norm(hgal(tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15),2);

% Compare the LTI results
figure();
plot(tauwN((tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15))./Fs,h);hold on;
plot(tauwN((tauwN./Fs>=-0.01 & tauwN./Fs<=0.15))./Fs,hsim);
hx = xlabel('$\tau \left[sec\right]$');
hy = ylabel('$h\left(\tau\right)$');
ht = title('$LTI \ System \ Recovery \ Comparison$');
hl = legend('$PP \ Org$','$PP \ Simulated$');
set([hx, hy, ht, hl], 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 13);
```

LNP Cascade שאלה בנושא



- התוצאה:

לא מפתיע - לפי המשפט מתרגול 11:

$$R_{\Delta N_1,\Delta N_2}(\tau)=R_{\lambda_1,\lambda_2}(\tau)$$

נושאים עיקריים

✓ שאלה בנושא LNP Cascade
- שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard
- שאלה בנושא AR (מועד א 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)
- מבנה המבחן וטיפים איך ללמוד

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

הנתונים נמצאים בקובץ Q1.mat ודגומים בתדר של 100 Hz.

המטריצה signal מכילה 100 קטעי ECG שהתקבלו לאחר הפעלת גירוי דומה 100 פעמים. הניחו כי הגירויים היו מספיק רחוקים זה מזה כך ששורות המטריצה אינן תלויות זו בזו.

א. מצאו את מיקומי קומפלקסי ה-QRS לפי חציית סף של ¾ הגובה המקסימלי, והמירו את אותות ה-ECG לאותות נקודה.

ב. התייחסו לאות כ-Renewal process ושערכו את פונקציית ה-Hazard שלו. הציגו את התוצאה.

ג. בכדי לבדוק חשד לפתולוגיה מסוימת עליכם לשחזר במדויק את צורת קומפלקסי ה-QRS ע"י מיצוע.

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

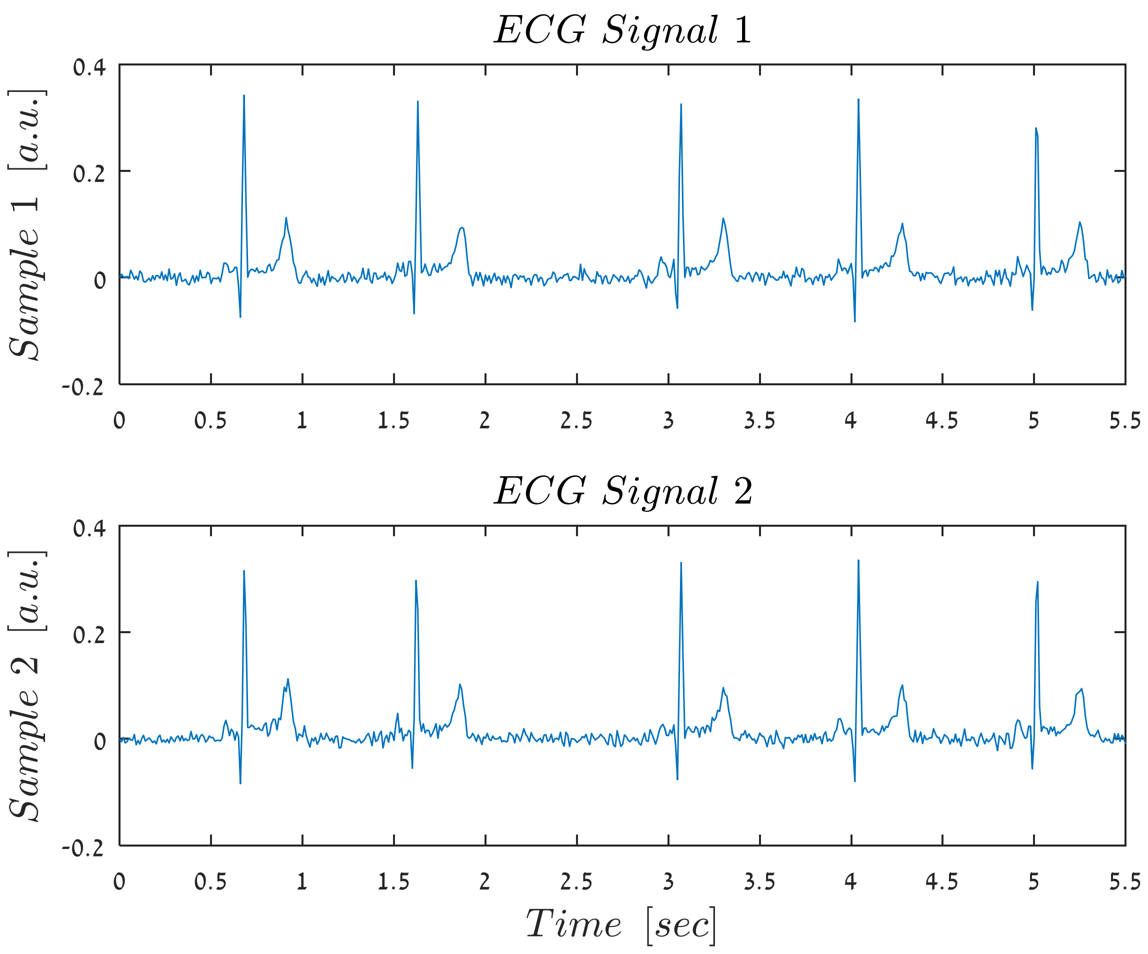
המשך ג. לצורך כך חתכנו בשבילכם מבעוד מועד 100 מקופלקסי ה-QRS המורעשים, והם נמצאים בשורות המטריצה complexes. שימו לב כי לא טרחנו להתאים את תחילת הפולסים כך שיחפפו במדויק, ועליכם להזיז אותם בזמן לצורך המיצוע. הציגו את צורת הפולס הממוצע ותארו אותה.

ד. הדגימו עבור אות ה-ECG הראשון במטריצה, כיצד קונבולוציה של סדרת אימפולסים והאות האופייני של הקומפלקס (שקבלתם בסעיף הקודם), משחזרת את אות ה-ECG ללא רעש.

ה. חשבו את הרעש. האם הרעש לבן?

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

נתון:



⋮

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

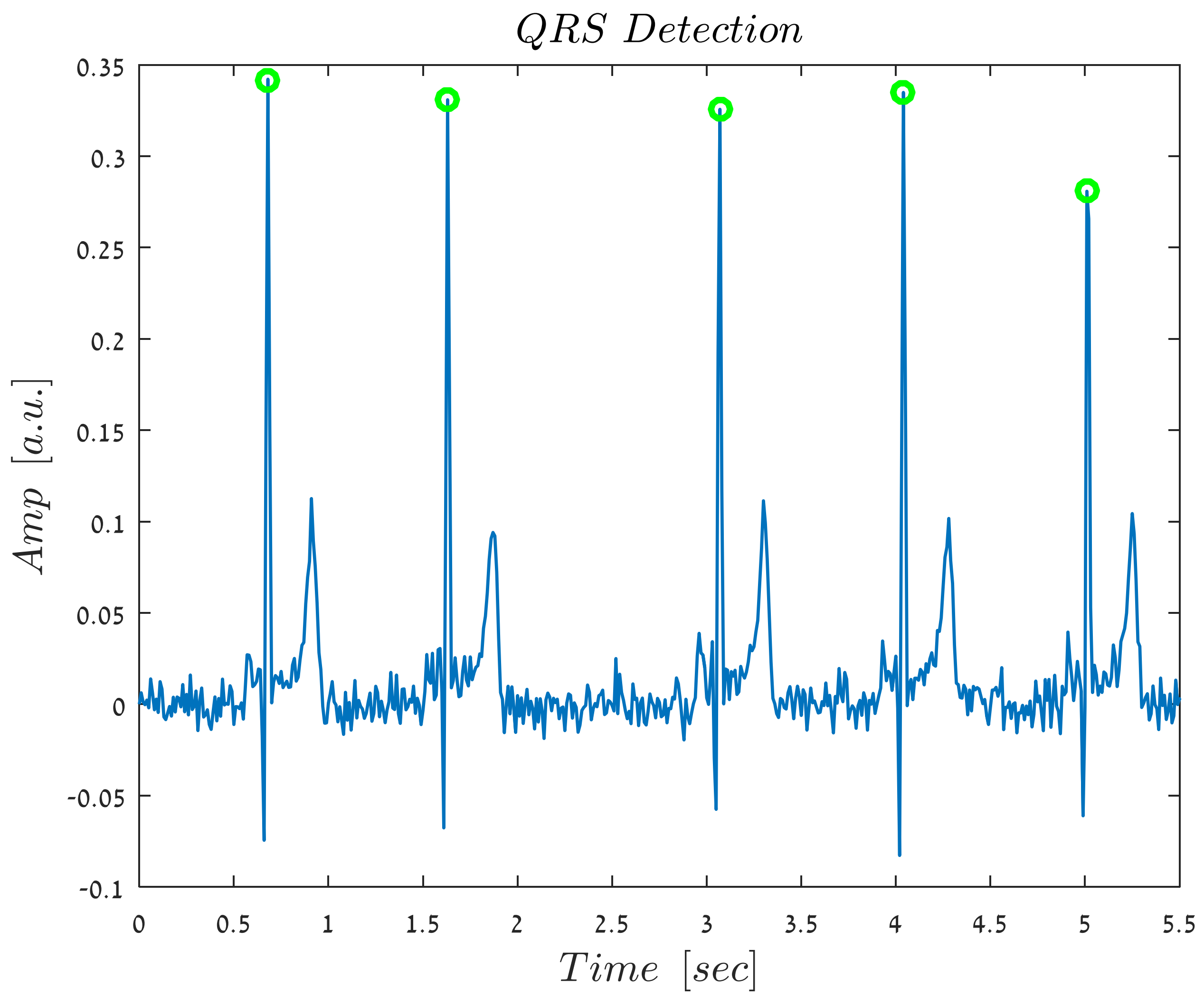
- א. מצאו את מיקומי קומפלקסי ה-QRS לפי חציית סף של ¾ הגובה המקסימלי, והמירו את אותות ה-ECG לאותות נקודה.

```
function [ Indicator ] = FindRwave( ECG,thresh )
% function assumes the signal is detrended, and parallel to the x axis.
% the detection is based on simple thresholding fraction of the signal maximal
% value, and local maximum criterion. The signal is assumed to be denoised
% before entering the function or have a relatively low noise.
%
% Inputs
% ECG       - input ecg signal for QRS detection
% thresh    - threshold as a fraction of the maximal value
%
% Output
% Indicator - indicator with 1s at the R wave.

Indicator = zeros(size(ECG)); % initialize the indicator
maxVal = max(ECG); % find the maximal value

% run along with thresholding and maximum criterion
for i=2:length(ECG)-1
    if ECG(i) > maxVal*thresh && ECG(i) > ECG(i-1) && ECG(i) > ECG(i+1)
        Indicator(i) = 1;
    end
end

end
```

גילוי גל R ע"י מציאת מקסימום מיקומי שעובר סף

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

תוצאה לדוגמה:



שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

ב. התייחסו לאות כ-Renewal process ושערכו את פונקציית ה-Hazard שלו. הציגו את התוצאה.

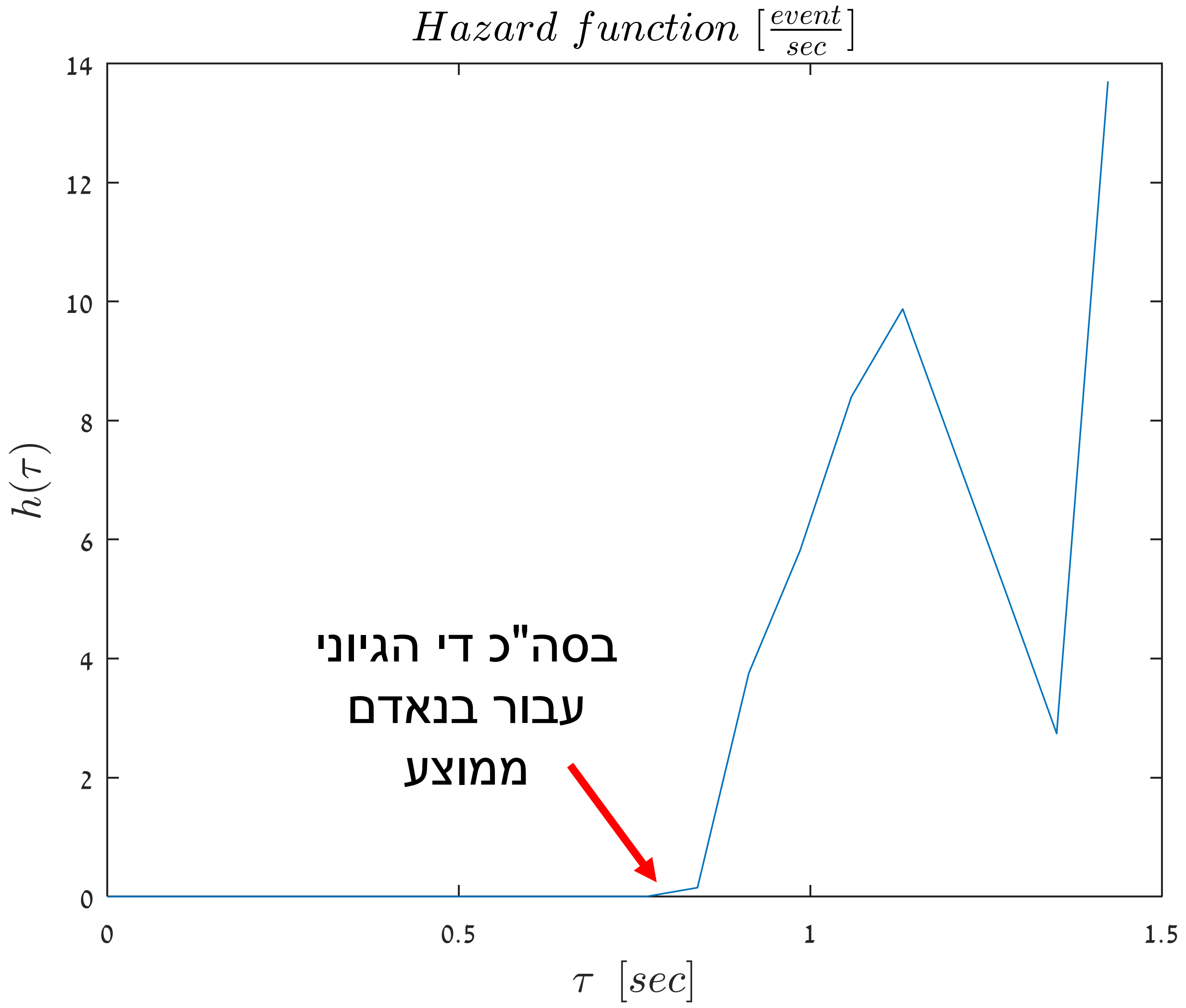
```
function [hazard,tauaxis] = EstimateHazard(tau,nbins)
% this function estimates the hazard function of a process depending on
% its' intervals vector and the specified number of bins in the histogram.
%
% Inputs
% tau       - input intervals vector
% nbins     - number of bins in the histogram
%
% Outputs
% hazard    - estimated hazard function
% tauaxis   - appropriate tau axis

figure(1000); % new figure for histogram
h = histogram(tau,nbins,'Normalization','pdf','BinLimits',[0 max(tau)]);
delta = h.BinWidth; % extract the binwidth
den = flipud(cumsum(flipud(h.Values(:)))).*delta; % the denominator
hazard = h.Values(:)./den; % estimate the hazard function
hazard = [0 ;hazard]; % add the value at zero
tauaxis = (h.BinEdges(1:end-1) + h.BinEdges(2:end))./2; % appropriate tau axis
tauaxis = [0 tauaxis]; % add the value at zero
close 1000; % close the histogram figure
end
```

דרך נוחה לשימוש ב-histogram.

$$Haz(l) = \frac{INT(l)}{\sum_{k=l}^{\infty} INT(k)\cdot\delta}$$

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

מקבלים:



שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

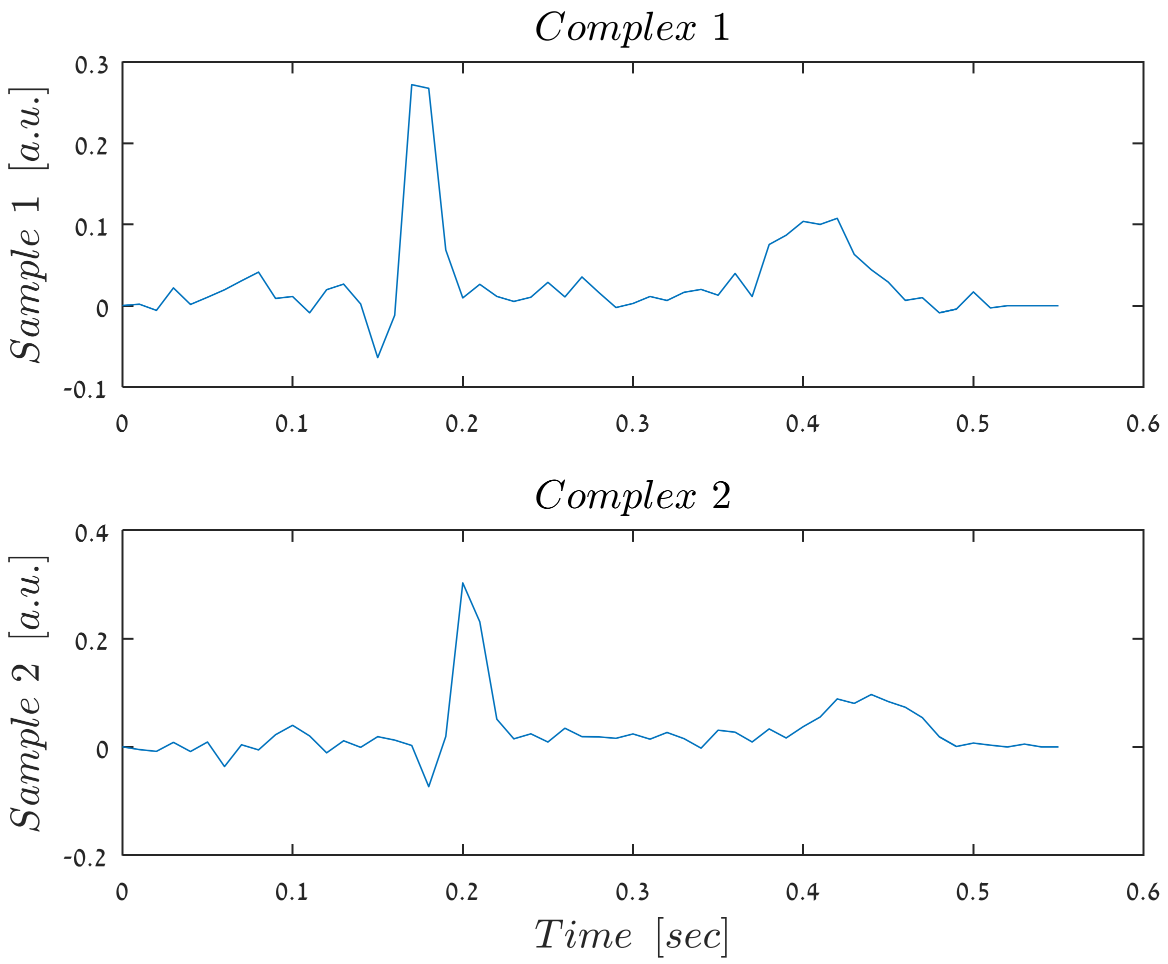
ג. בכדי לבדוק חשד לפתולוגיה מסוימת עליכם לשחזר במדויק את צורת קומפלקסי ה-QRS ע"י מיצוע. לצורך כך חתכנו בשבילכם מבעוד מועד 100 מקופלקסי ה-QRS המורעשים, והם נמצאים בשורות המטריצה complexes. שימו לב כי לא טרחנו להתאים את תחילת הפולסים כך שיחפפו במדויק, ועליכם להזיז אותם בזמן לצורך המיצוע. הציגו את צורת הפולס הממוצע ותארו אותה.

שאלה: איך ניישר את כל הקומפלקסים על מנת למצע?

תשובה: נחשב השהייה לפי קרוסרוקלציה! אחד הקומפלקסים ישמש אותנו כרפרנס..

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

נתון:



⋮

קוד יישור לדוגמה

```
function compAligned = AlignQRS(complexes)
% function align the QRS complexes by cross correlation with first complex
% and afterwards shifting the complexes according to the first one,
% and padding with zeros outside the support.
%
% Input
% complexes      - shifted complexes
%
% Output
% compAligned    - complexes aligned according to the first one

% number of complexes and samples in each complex
[K,N] = size(complexes);

% run and calculate the offset of the complexes
compAligned = zeros(size(complexes));
compAligned(1,:) = complexes(1,:); % assume the first is the reference
for i=2:K
    [R1i,tau] = xcorr(complexes(1,:),complexes(i,:)); % cross-correlation
    [~,maxind] = max(R1i); % find maximal index
    offset = tau(maxind); % find offset in samples

    % check if it's positive or negative and expand accordingly
    if offset == 0
        compAligned(i,1:N) = complexes(i,:);
    elseif offset < 0
        compAligned(i,1:N+offset) = complexes(i,1-offset:end);
    else
        compAligned(i,1+offset:N) = complexes(i,1:end-offset);
    end
end

end
```

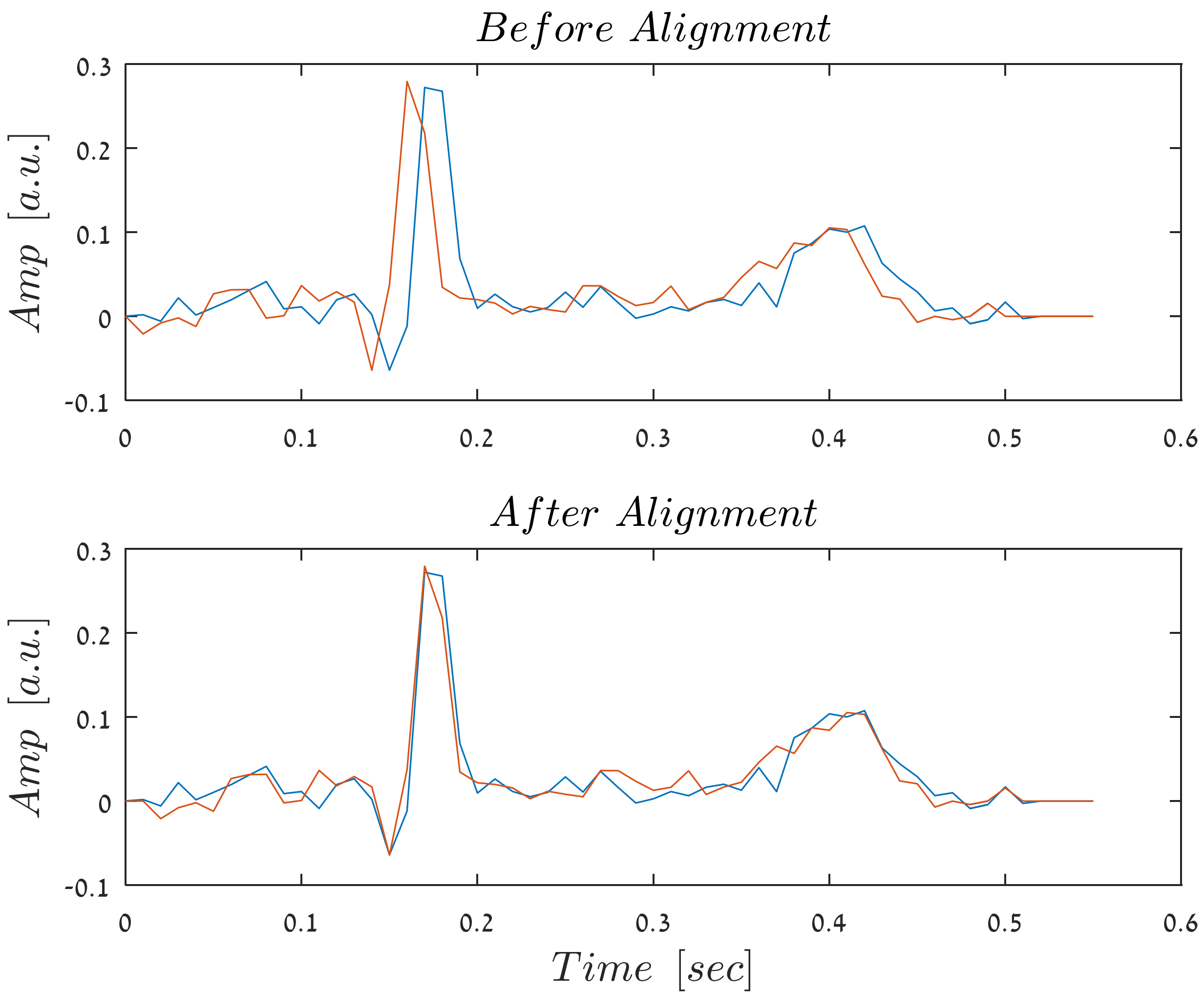
בוחרים שרירותית
קומפלקס רפרנס
(למשל הראשון)

חישוב השהייה לפי
קרוסקורלציה סטנדרטי

ריפוד באפסים/
חיתוך בהתאם

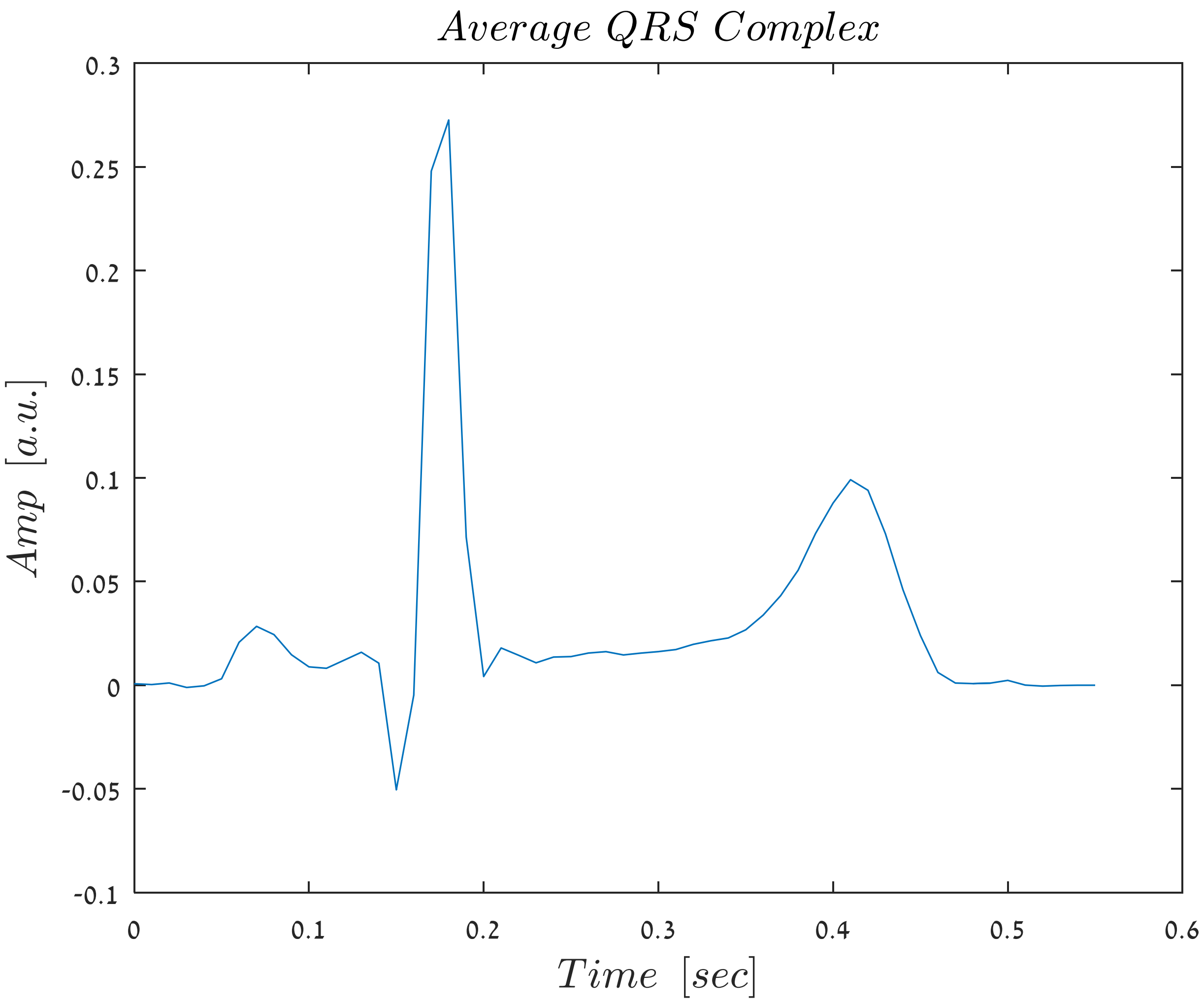
שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

תוצאת היישור:



שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

הקומפלקס
הממוצע:



שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

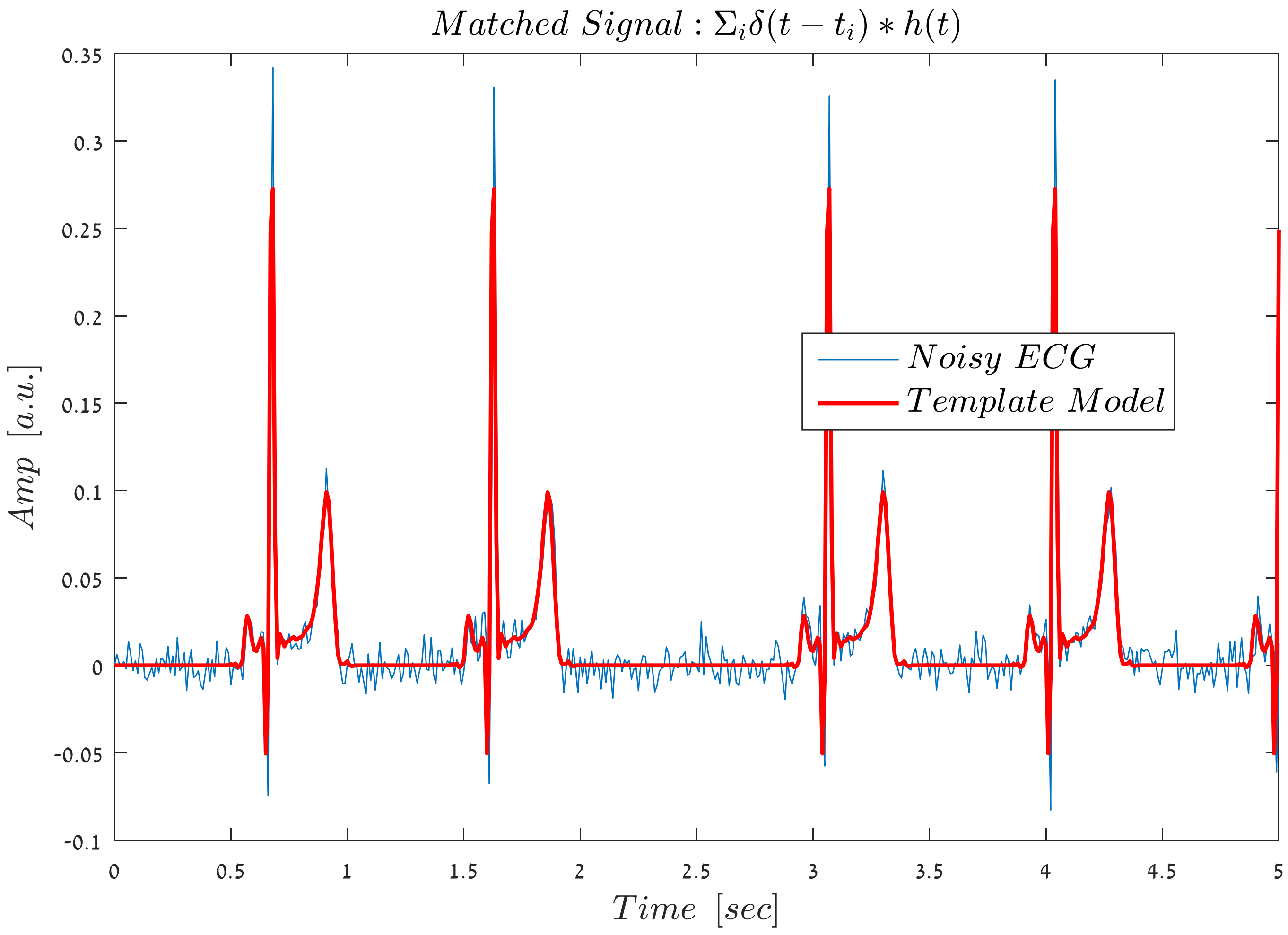
ד. הדגימו עבור אות ה-ECG הראשון במטריצה, כיצד קונבולוציה של סדרת אימפולסים והאות האופייני של הקומפלקס (שקבלתם בסעיף הקודם), משחזרת את אות ה-ECG ללא רעש.

```
%% Section D

MatchedSignal = conv(PPsignal(1,:),AVGcomplex); % shifted templates
[~,Rloc] = max(AVGcomplex); % R wave location in the template
shift = length(AVGcomplex) - Rloc + 1; % resulting index shift

% plot the matched templates on top of the signal
figure();
plot(t,signal(1,:));hold on;
plot(t,MatchedSignal(Rloc:end-shift+1),'r','LineWidth',1.5);xlim([0 5]);
```

לשים לב שמרכז הקומפלקס הוא לא ב-0!

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

מקבלים:



שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

ה. חשבו את הרעש. האם הרעש לבן?

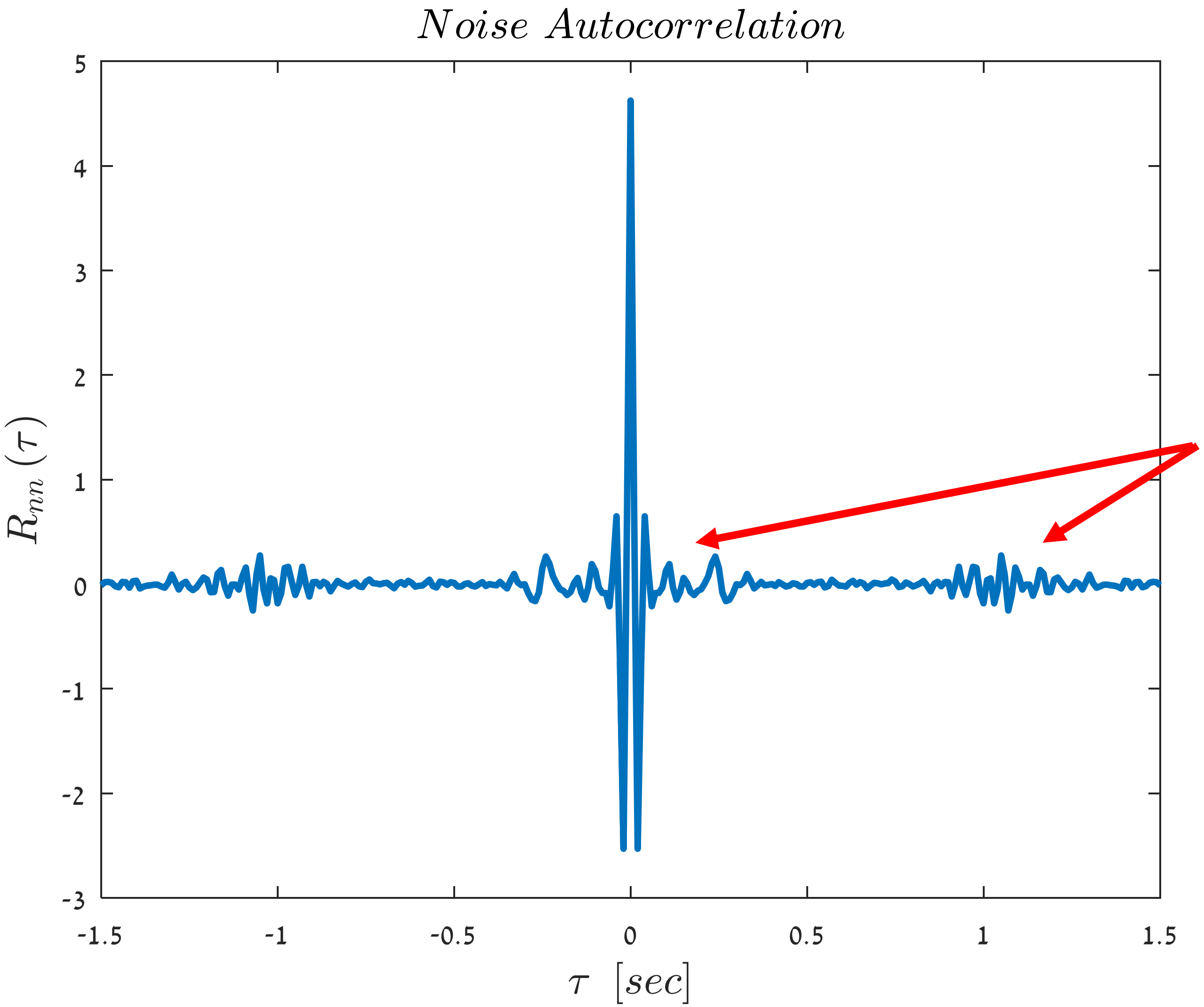
שאלה: איך נקבע אם הרעש לבן?

תשובה: אוטוקורלציה דלתא/ ספקטרום קבוע.

```
%% Section E

noise = signal(1,:) - MatchedSignal(Rloc:end-shift+1); % resulting noise
[Rnn, taun] = xcorr(noise); % noise cross-correlation

% plot result
figure();
plot(taun/fs, Rnn, 'LineWidth',2);xlim([-1.5 1.5]);
hx = xlabel('$\tau \ \left[sec\right]$');
hy = ylabel('$R_{nn}\left(\tau\right)$');
ht = title('$Noise \ Autocorrelation$');
set([hx,hy,ht],'interpreter','latex', 'FontSize', 13);
```

שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard

• מקבלים:



רעש לא לבן!

נושאים עיקריים

- ✓ שאלה בנושא LNP Cascade
- ✓ שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard
- שאלה בנושא AR (מועד א 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)
- מבנה המבחן וטיפים איך ללמוד

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

כאשר אנו מנסים להתמקד בנקודה נייחת, העין שלנו מבצעת תנועות רנדומליות מהירות הנקראות micro-‘saccades, ידוע שזהו תהליך רגולרי. חוקרת המעוניינת ללמוד על מאפייני תנועה זו, מדדה את תנועת העיניים מנבדק בריא במשך חצי שעה. הנתונים נמצאים בקובץ healthy.mat.

א. החוקרת רוצה להסתכל על הנתונים ברזולוציה של $\Delta f = 0.05Hz$, מהו מספר הדגימות שתקבל במישור התדר N_s עבור תדירות הדגימה המקורית? שערכו את הצפיפות הספקטרלית של האות, S_{xx}, כפונקציה של $\theta \in [-\pi,\pi]$ עם ציר תדר באורך $N_s + 1$.

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

ב. החוקרת רוצה להתאים מודל AR לאות שנמדד. כיצד עליה לקבוע את סדר המודל? מה הוא הסדר המינימלי? שערכו את מקדמי מודל הAR לפי הסדר שהצעתם, בעזרת האוטוקורלציה של האות.

ג. סמלצו אות לדוגמה על בסיס המקדמים ששערכתם בעזרת רעש לבן $\sim N(0,1)$. השוו בין הצפיפות הספקטרלית שלו לזו של האות המקורי. מדוע ישנם הבדלים? איך תתקנו זאת?

ד. החוקרת השיגה נתונים מעיניו של אדם החולה בטרשת נפוצה, ראו MSpatient.mat.

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

המשך ד - המחלה מתבטאת בניוון של מעטפות המיאלין העוטפות את תאי העצב במערכת העצבים, ובכך מביאה לשיבוש בתפקוד. באדם זה, תאי העצב המבקרים את התנועה הרנדומלית המהירה נפגעו מהמחלה רק באחת העיניים. הציעו דרך, העושה שימוש במקדמי המודל, לבדוק איזו מהעיניים היא העין החולה, הסבירו ויישמו אותה על הנתונים. תדר הדגימה כמו בסעיפים קודמים.

ה. החוקרת עובדת על תרופה שמטרתה לשפר את תפקוד העין החולה.

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

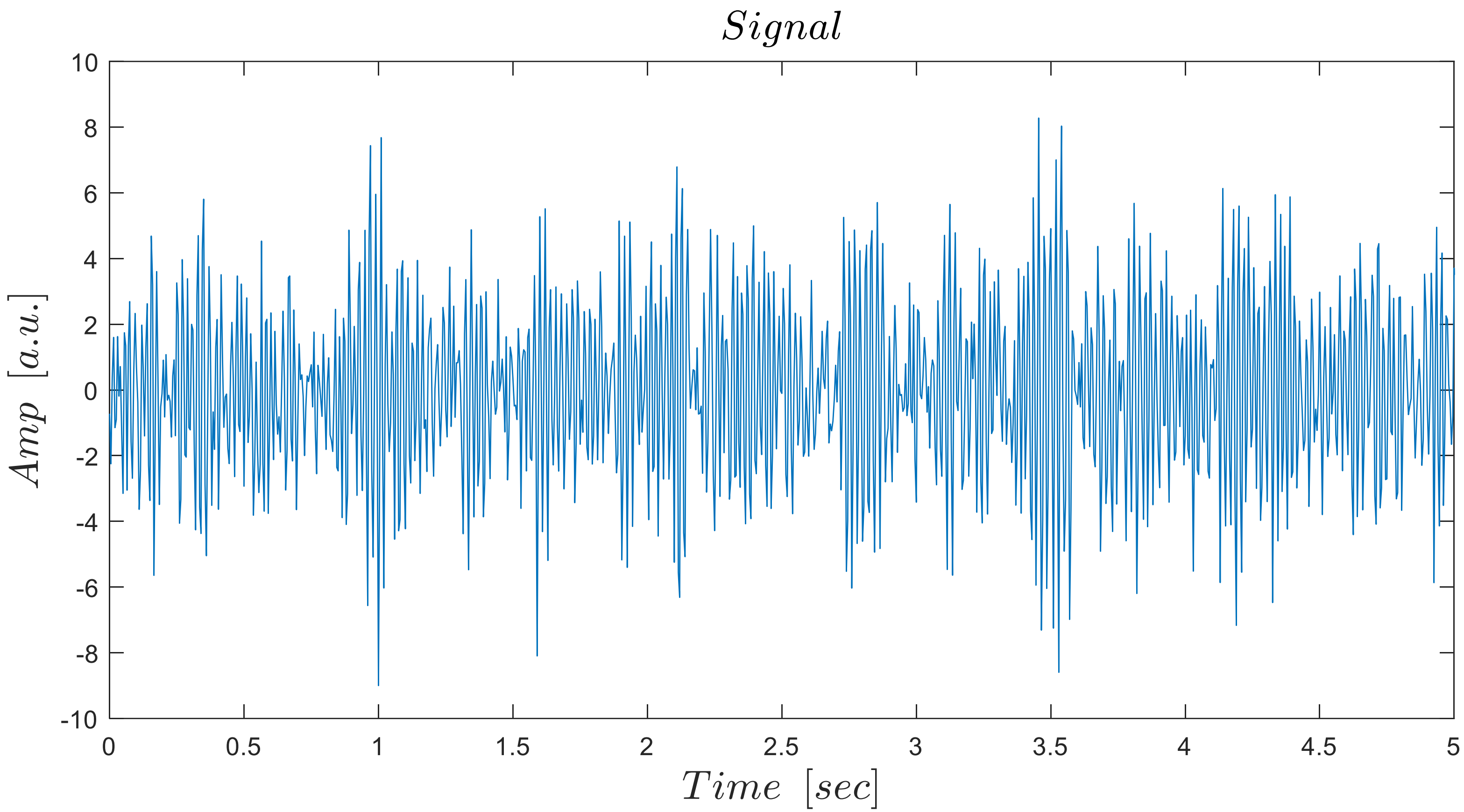
המשך ה- היא הצליחה לייצר תרופה שגורמת לתנועת העין להתנהג כיציאה של מודל AR עם פונקציית תמסורת בעלת קטבים בלבד, הנמצאים ב:

$$z_1 = \frac{3}{8} - i\,\frac{3}{4}\ , \qquad z_2 = \frac{3}{8} + i\,\frac{3}{4}$$

זהו את התדרים המרכזיים במודל (באופן אנליטי), חשבו בצורה פרמטרית את הצפיפות הספקטרלית החדשה כפונקציה של $\theta \in [-\pi, \pi]$ והציגו אותה. האם התרופה צפויה לשפר את התפקוד?

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

נתון:



…

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

א. החוקרת רוצה להסתכל על הנתונים ברזולוציה של $\Delta f = 0.05Hz$, מהו מספר הדגימות שתקבל במישור התדר N_s עבור תדירות הדגימה המקורית? שערכו את הצפיפות הספקטרלית של האות, S_{xx}, כפונקציה של $\theta \in [-\pi,\pi]$ עם ציר תדר באורך $N_s + 1$.

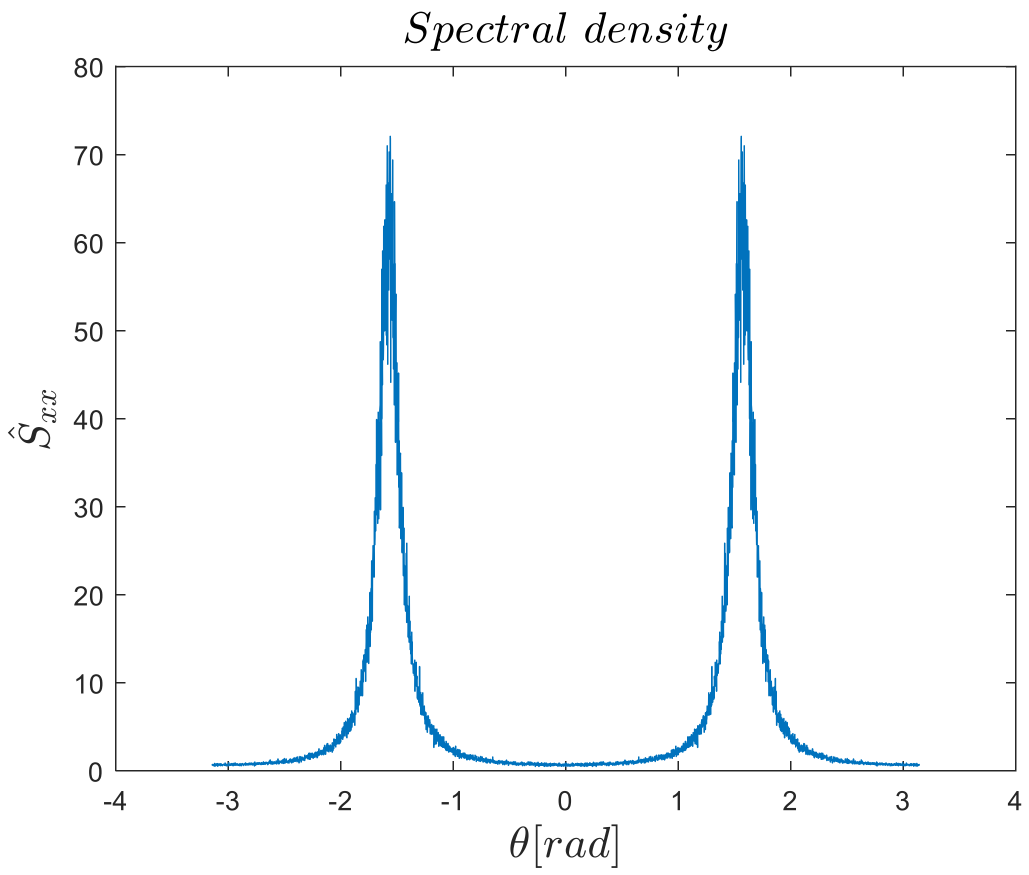
ציר התדר המתאים

חישוב הספקטרום עבור Ns+1 נקודות

```
% desired spectral resolution
df = 0.05; % Hz

% no. of samples in frequency space
Ns = fs/df;
f = (-fs/2 : df : fs/2);
theta = (2*pi/fs) * f;

% Estimate Sxx - non parametric
Rxx = xcorr(healthy,Ns/2,'unbiased');
Sxx = abs(fftshift(fft(Rxx)));

% plot result
figure();
plot(theta, Sxx);
hx = xlabel('$\theta [rad]$');
hy = ylabel('$\hat{S}_{xx}$');
ht = title('$Spectral \ density$');
set([hx, hy, ht], 'interpreter','latex','FontSize',16);
```

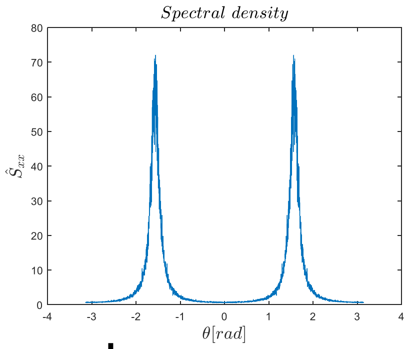
שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

- הספקטרום המתקבל:



שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

ב. החוקרת רוצה להתאים מודל AR לאות שנמדד. כיצד עליה לקבוע את סדר המודל? מה הוא הסדר המינימלי? שערכו את מקדמי מודל הAR לפי הסדר שהצעתם, בעזרת האוטוקורלציה של האות.



סדר מינימלי

```
%% Section B

% minimal Ar model order = number of peaks in spectrum
L = 2;

% get coefficients using Yule-Walker
R_hat = toeplitz(Rxx(Ns/2+1:Ns/2+L));
r_hat = -(Rxx(Ns/2+2:Ns/2+L+1))';
a_hat = R_hat\r_hat';
```

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

ג. סמלצו אות לדוגמה על בסיס המקדמים ששערכתם בעזרת רעש לבן $\sim N(0,1)$. השוו בין הצפיפות הספקטרלית שלו לזו של האות המקורי. מדוע ישנם הבדלים? איך תתקנו זאת?

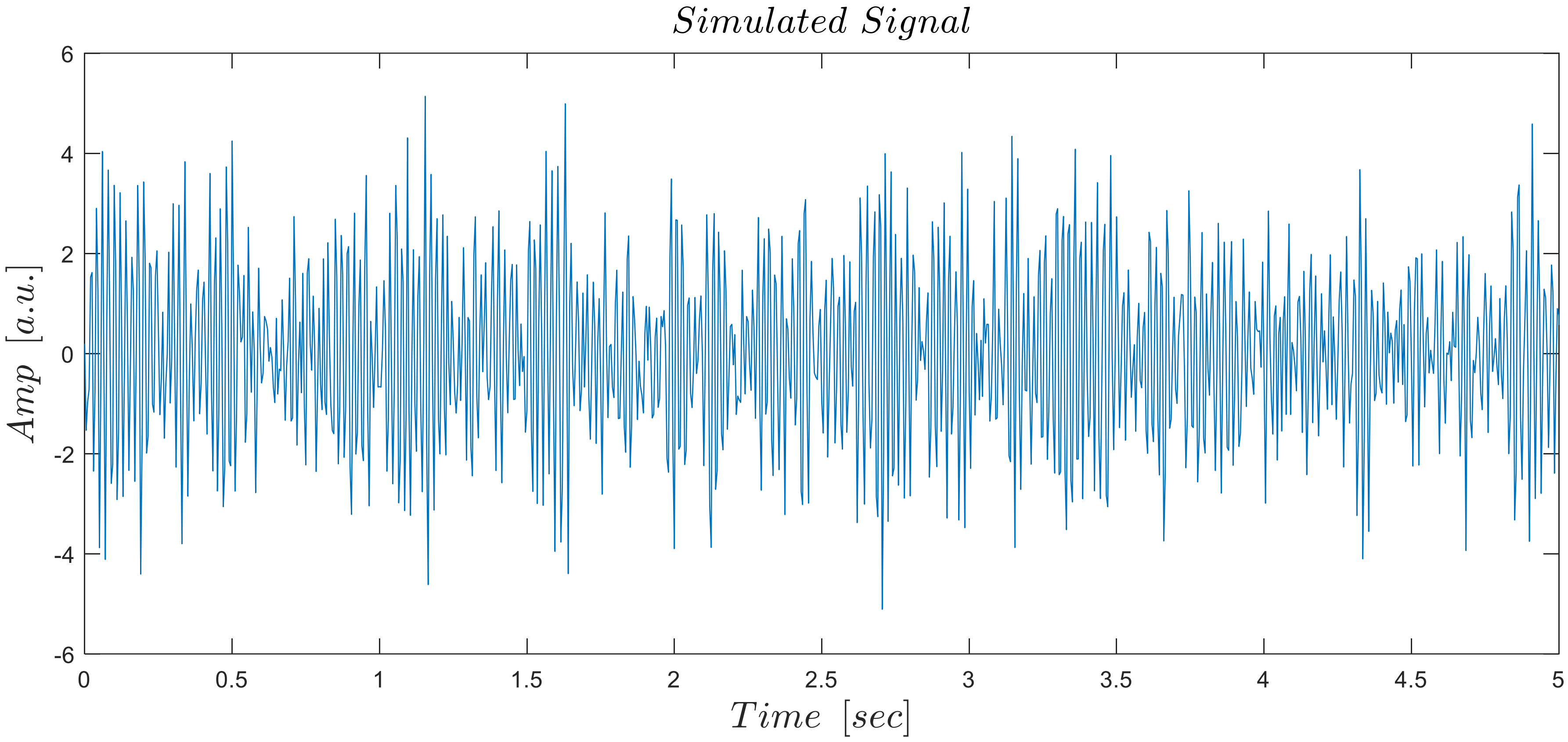
סימולציה של אות לדוגמה

חישוב הספקטרום

```
%% Section C

% simulate sample function using the AR model
w = randn(N,1);
simulated = filter(1,[1 a_hat'],w);

% plot simulated signal
figure();
plot(t,simulated);
xlim([0, 5]);
hx = xlabel('$Time \ \left[sec\right]$');
hy = ylabel('$Amp \ \left[a.u.\right]$');
ht = title('$Simulated \ Signal$');
set([hx, hy, ht], 'interpreter','latex','FontSize',16);

% calculate spectral density (not normalized!)
RxxSim = xcorr(simulated,Ns/2,'unbiased');
SxxSim = abs(fftshift(fft(RxxSim)));

% compare spectral density with the original signal
figure();
plot(theta, Sxx, theta, SxxSim);
hx = xlabel('$\theta [rad]$');
hy = ylabel('$\hat{S}_{xx}$');
ht = title('$Spectral \ density$');
hl = legend('$Original$','$Simulated$');
set([hx, hy, ht, hl], 'interpreter','latex','FontSize',16);
```

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

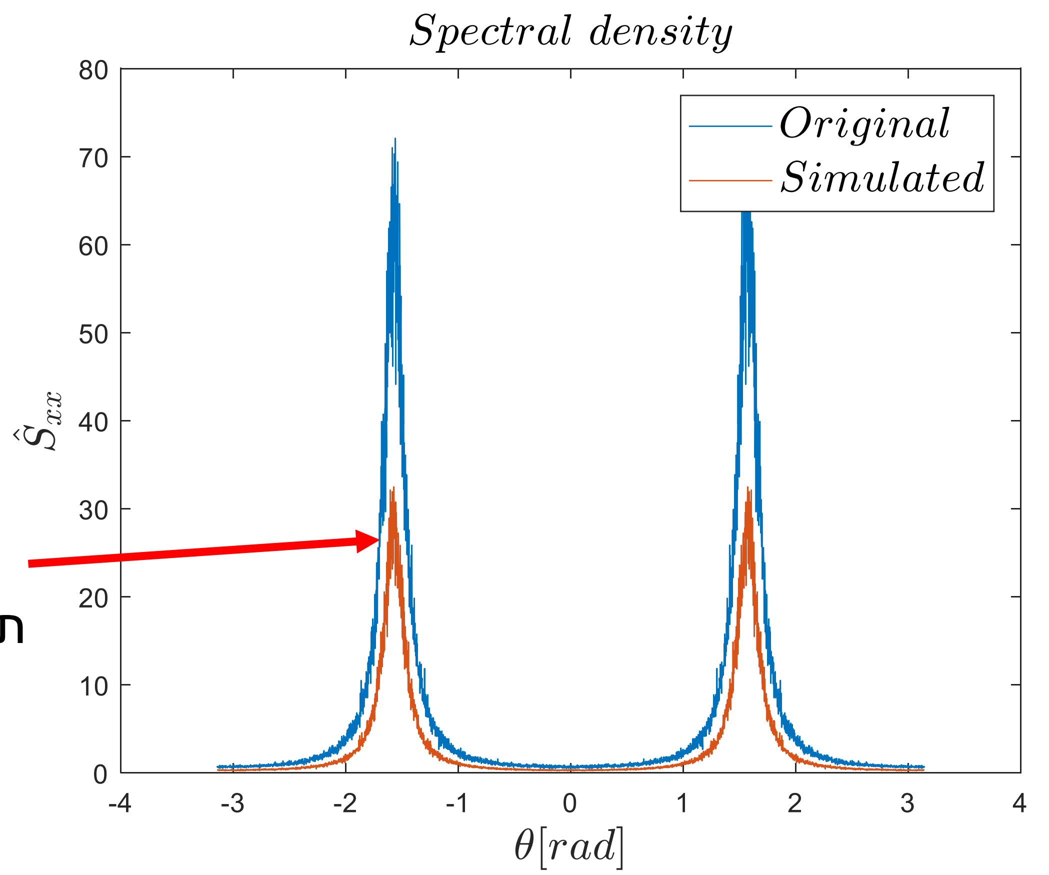
- מקבלים:



...

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

- מקבלים:



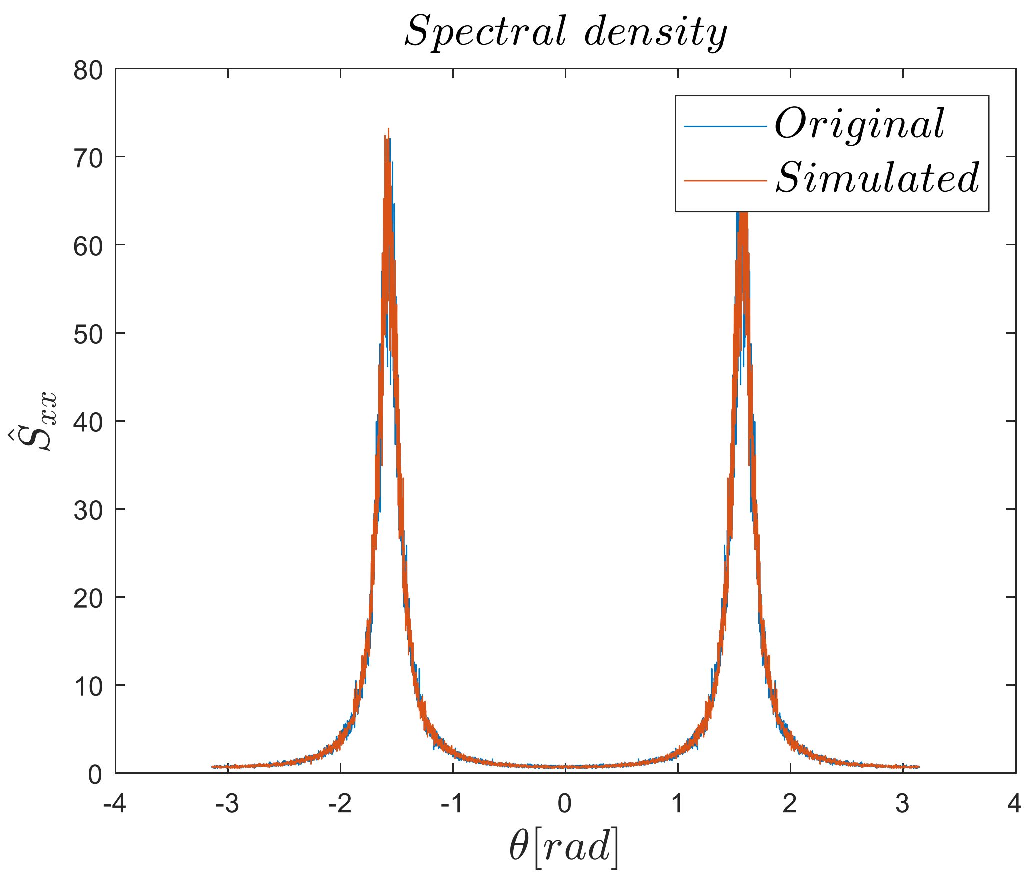
נדרש פקטור
תיקון לאנרגיה!

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

- שאלה: מהו פקטור התיקון? איך נחשב אותו?

שונות הרעש היוצר!

```
% calculate signal generating noise and it's variance
worg = filter([1, a_hat'], 1, healthy);
sigmaw2 = var(worg);

% spectral density normalized!
figure();
plot(theta, Sxx, theta, SxxSim*sigmaw2);
hx = xlabel('$\theta [rad]$');
hy = ylabel('$\hat{S}_{xx}$');
ht = title('$Spectral \ density$');
hl = legend('$Original$','$Simulated$');
set([hx, hy, ht, hl], 'interpreter','latex','FontSize',16);
```



שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

ד. החוקרת השיגה נתונים מעיניו של אדם החולה בטרשת נפוצה, ראו MSpatient.mat. המחלה מתבטאת בניוון של מעטפות המיאלין העוטפות את תאי העצב במערכת העצבים, ובכך מביאה לשיבוש בתפקוד. באדם זה, תאי העצב המבקרים את התנועה הרנדומלית המהירה נפגעו מהמחלה רק באחת העיניים. הציעו דרך, העושה שימוש במקדמי המודל, לבדוק איזו מהעיניים היא העין החולה, הסבירו ויישמו אותה על הנתונים. תדר הדגימה כמו בסעיפים קודמים.

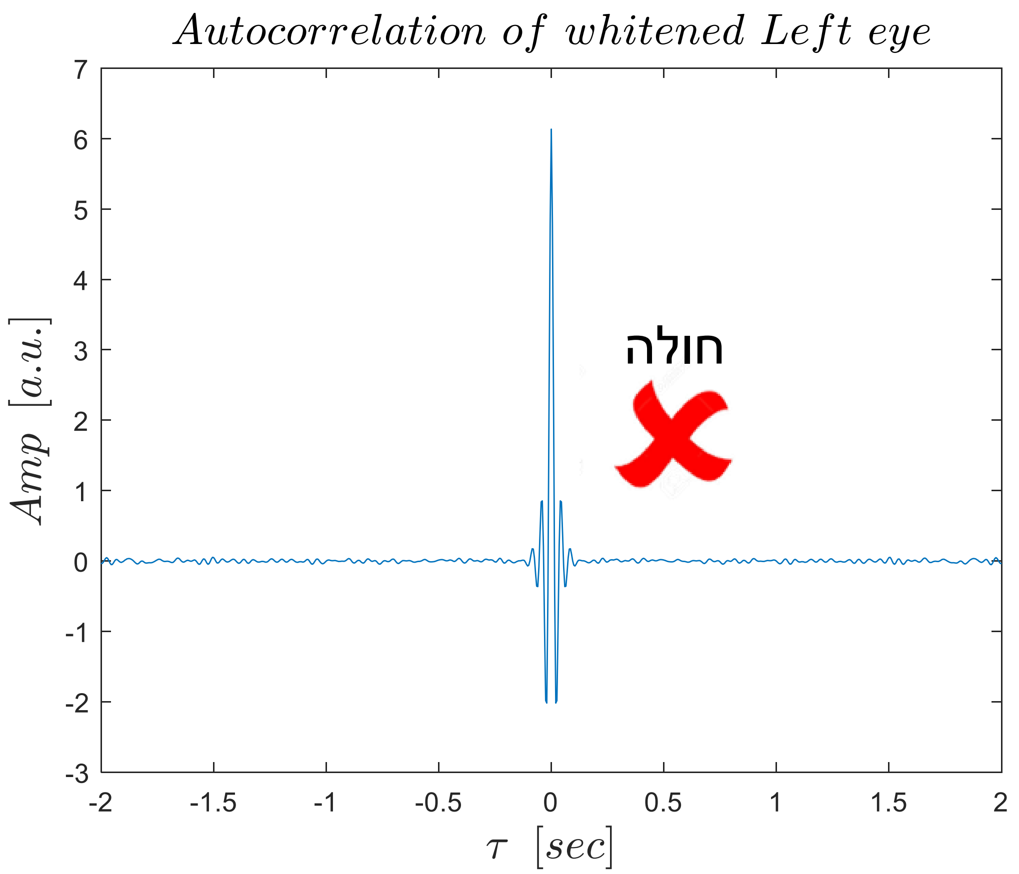
```
%%  Section D

% load eye signal of M.S. dude
load('MSpatient.mat');

% pass signals through whitenning filter
whitenLeft = filter([1 a_hat'],1,left_eye);
whitenRight = filter([1 a_hat'],1,right_eye);

% calculate cross-correlation of the resulting "noise"
[RxxWhiteLeft,tau1] = xcorr(whitenLeft,Ns/2,'unbiased');
[RxxWhiteRight,tau2] = xcorr(whitenRight,Ns/2,'unbiased');
```

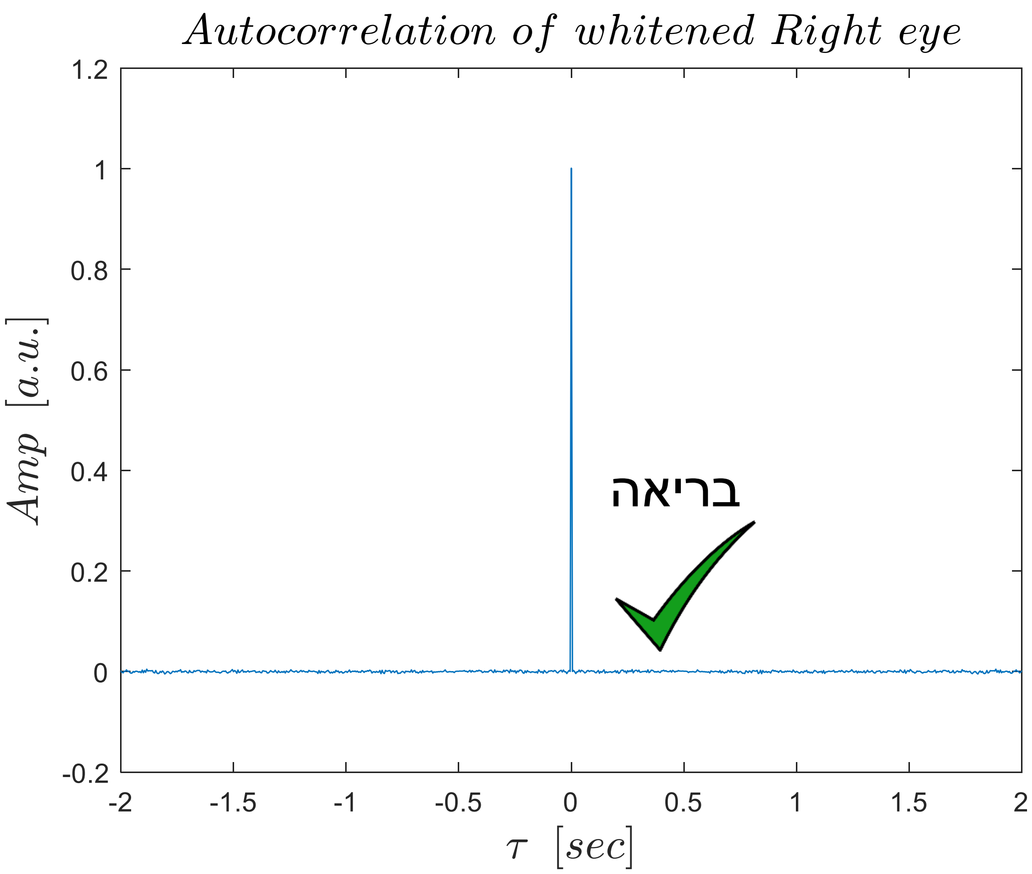
הלבנה של שני אותות העיניים

איך תראה האוטוקורלציה של רעש לבן?

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

- מקבלים:





שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

ה. החוקרת עובדת על תרופה שמטרתה לשפר את תפקוד העין החולה. היא הצליחה לייצר תרופה שגורמת לתנועת העין להתנהג כיציאה של מודל AR עם פונקציית תמסורת בעלת קטבים בלבד, הנמצאים ב:

$$z_1 = \frac{3}{8} - i\frac{3}{4}\ , \qquad z_2 = \frac{3}{8} + i\frac{3}{4}$$

זהו את התדרים המרכזיים במודל (באופן אנליטי), חשבו בצורה פרמטרית את הצפיפות הספקטרלית החדשה כפונקציה של $\theta \in [-\pi, \pi]$ והציגו אותה. האם התרופה צפויה לשפר את התפקוד?

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

התדרים המרכזיים נתונים על ידי θ בה נמצאים הקטבים:

$$tan\theta = \frac{Im(z)}{Re(z)} \rightarrow \theta_{1,2} = \pm \mathrm{atan}(2) \rightarrow f = \pm\theta \cdot \left(\frac{f_s}{2\pi}\right) = \pm 35.2\ Hz$$

נתון כי פונקציית התמסורת היא בעלת קטבים בלבד ולכן תראה כך:

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{z^{-2}(z - z_1)(z - z_1^*)} = \frac{1}{1 - z^{-1}2Re(z_1) + z^{-2}|z_1|^2}$$

מכאן שמקדמי המודל הינם:

$$a_1 = -2Re(z_1), \qquad a_2 = |z_1|^2$$

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

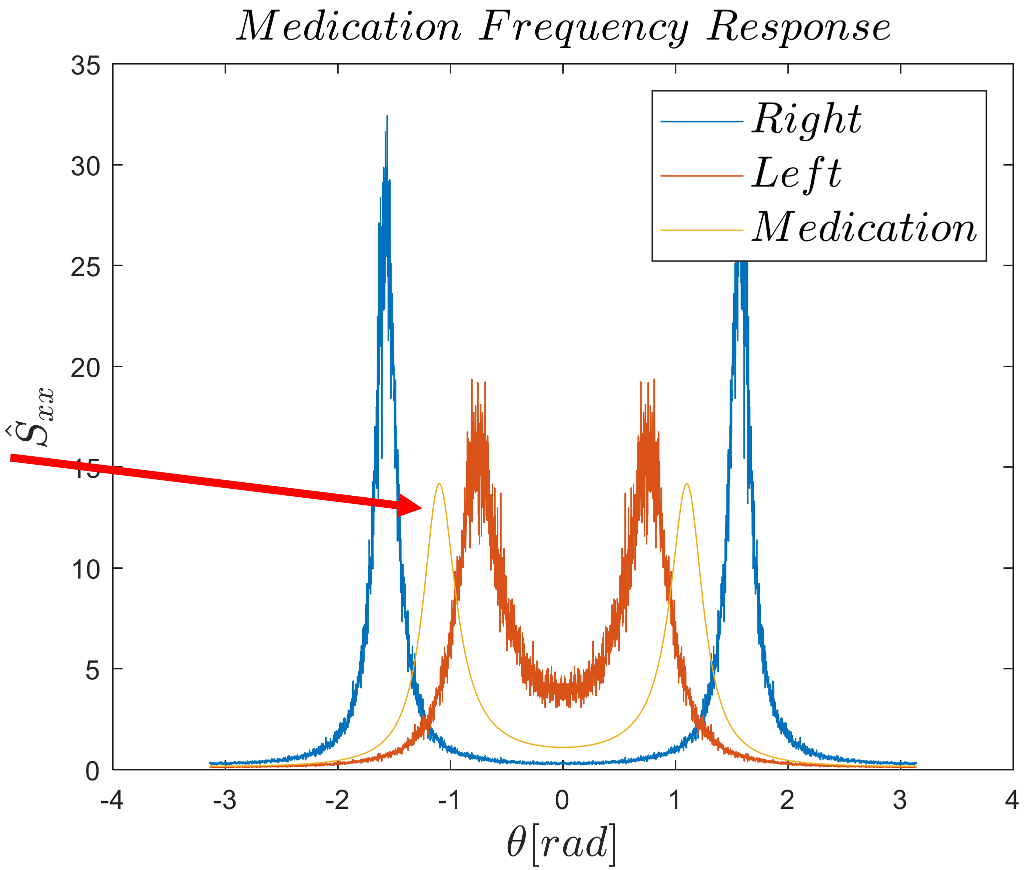
- קוד חישוב הספקטרום:

חישוב הספקטרום

```
%% Section H

% Spectrum of medication is composed of 2 poles (calc. analytically)
a1 = -2*(3/8);
a2 = abs(3/8-1i*3/4).^2;

% calculate spectrum of the medication
z = exp(1i*theta);
A = 1 + a1*z.^(-1) + a2*z.^(-2);
Spect_med= 1./(abs(A)).^2;

% calculate spectrum of both eyes of the MS patient
RxxRight = xcorr(right_eye,Ns/2,'unbiased');
SxxRight = abs(fftshift(fft(RxxRight)));
RxxLeft = xcorr(left_eye,Ns/2,'unbiased');
SxxLeft = abs(fftshift(fft(RxxLeft)));

% Compare Spectra with the two eyes: Does the medication improve the symptoms?
figure();
plot(theta,SxxRight,theta,SxxLeft,theta,Spect_med);
hx = xlabel('$\theta [rad]$');
hy = ylabel('$\hat{S}_{xx}$');
ht = title('$Medication \ Frequency \ Response$');
hl = legend('$Right$','$Left$','$Medication$');
set([hx, hy, ht, hl], 'interpreter','latex','FontSize',16);
```

שאלה בנושא AR (מועד א 2018)

- התוצאה המתקבלת:



התרופה עזרה? כן!

נושאים עיקריים

- ✓ שאלה בנושא LNP Cascade
- ✓ שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard
- ✓ שאלה בנושא AR (מועד א 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)
- מבנה המבחן וטיפים איך ללמוד

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

בניסוי מדויק ביותר נמדדו פוטנציאלי פעולה בניורון בודד בצלוחית פטרי. זמני המאורעות חולצו מהנתונים ברזולוציה זמנית של מיקרושניה (כלומר תדר דגימה של 1MHz), והם נתונים בקובץ em.mat.

1. תחת תנאי הניסוי, לניורון ישנה תקופה רפרקטורית לאחר כל מאורע, בה הוא אינו מגיב. ציירו את פונקציית האוטוקורלציה והעריכו ממנה את משך התקופה הרפרקטורית של הניורון. הסבירו.

2. מסתבר שבתנאי סביבה מסוימים (כתלות בריכוז יונים בתמיסה) משתנה פונקציית התגובה של הניורון. בניסוי מבוקר נמדדו שוב זמני מאורעות של הניורון עבור ריכוז יונים גבוה מהרגיל, והם נתונים בקובץ emLin.mat. ידוע שפונקציית התגובה של הניורון (Hazard function, $h(\tau)$) בתנאים אלה היא מהצורה:

$$h(\tau) = \begin{Bmatrix} a \cdot \tau & 0 < \tau < t_m \\ p_m & \tau \geq t_m \end{Bmatrix}$$

שערכו את a והסבירו כיצד עשיתם זאת כולל גרפים מתאימים.

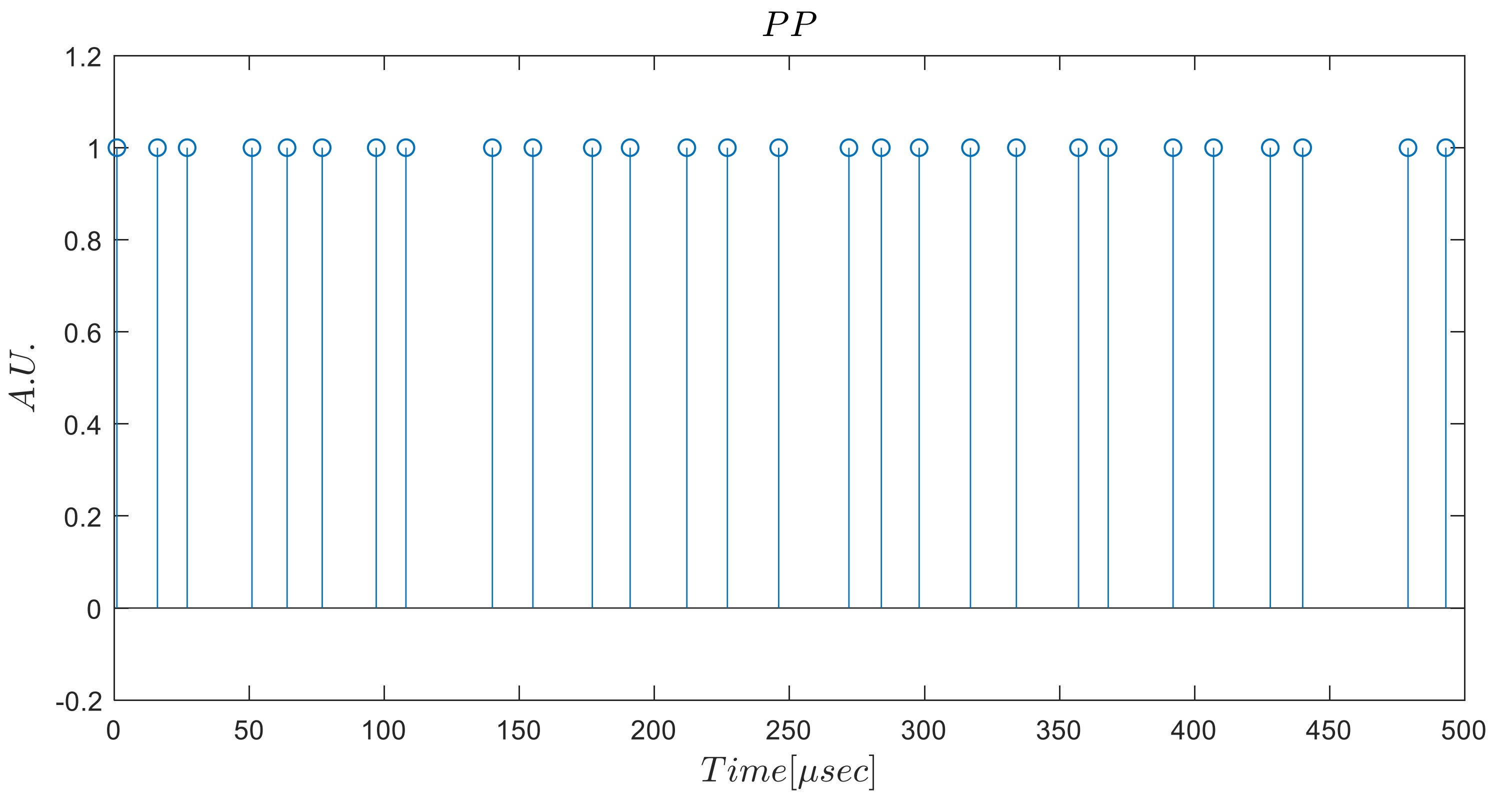
שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

3. הסטודנט המבצע את הניסוי מעוניין לקצר את משך המדידה כדי שיוכל להספיק לבצע עוד ניסויים. העריכו אמפירית מתוך הנתונים את סטיית התקן של שערוך a שצפוי לקבל הסטודנט ע"י מדידה של מאורעות בחלון של מילי-שניה אחת. הסבירו כיצד הערכתם זאת.

- רמז: שימו לב שזמן הניסוי הכולל ארוך בהרבה מ1 מילי-שניה.

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

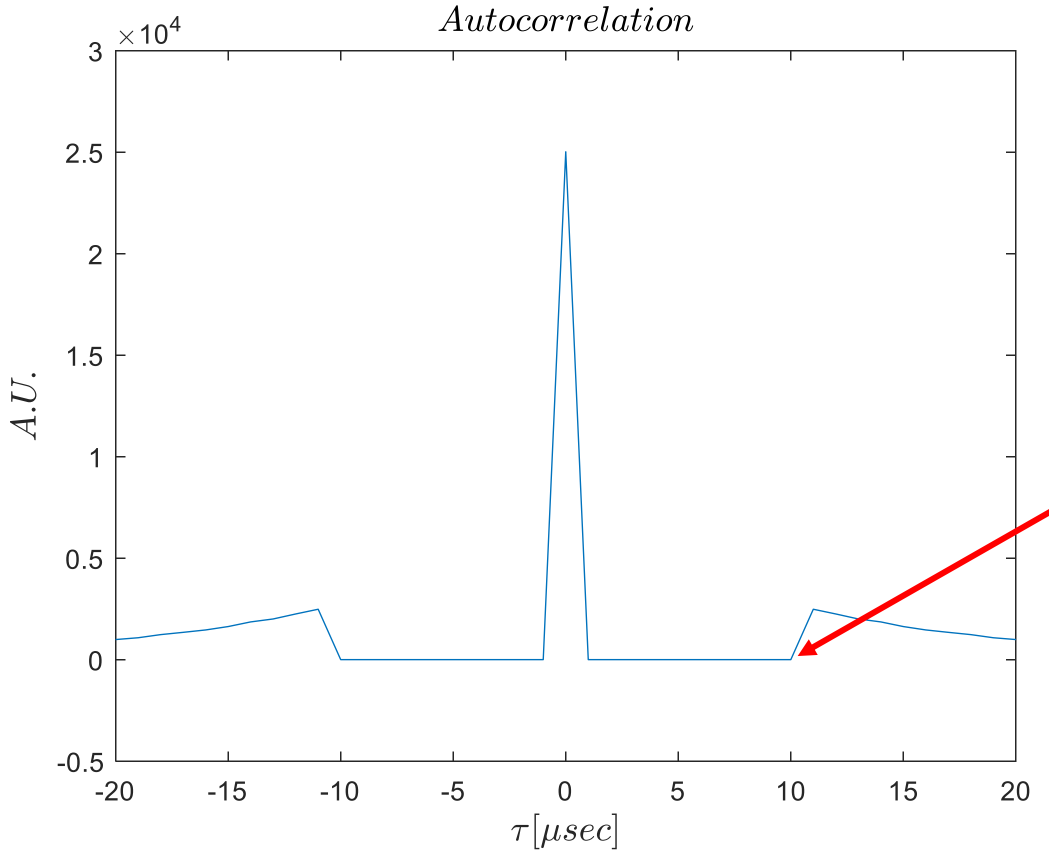
- נתון:



...

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

1. תחת תנאי הניסוי, לנוירון ישנה תקופה רפרקטורית לאחר כל מאורע, בה הוא אינו מגיב.
ציירו את פונקציית האוטוקורלציה והעריכו ממנה את משך התקופה הרפרקטורית של הנוירון.
הסבירו.



אוטוקורלציה 0 =
לא תתכן חפיפה בין
ספייקים בזמן הזה =
התקופה הרפרקטורית!

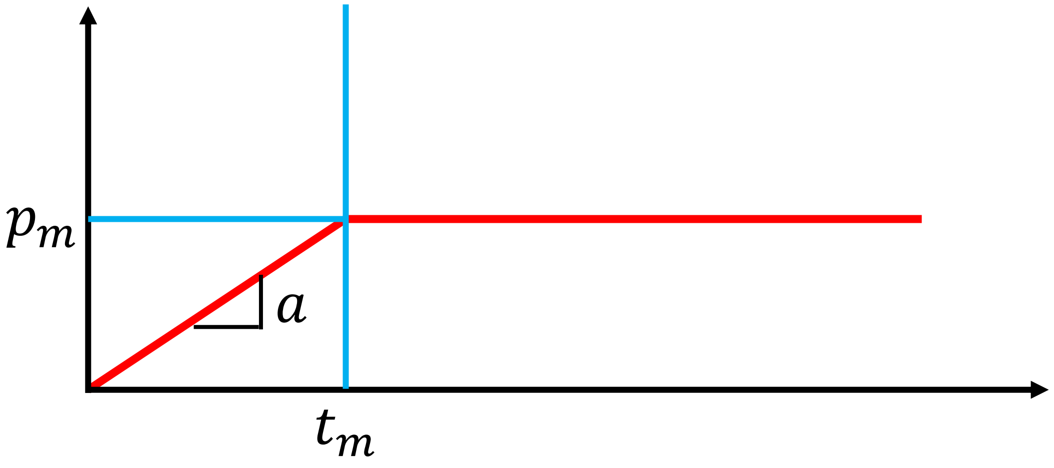
שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

2. מסתבר שבתנאי סביבה מסוימים (כתלות בריכוז יונים בתמיסה) משתנה פונקציית התגובה של הנוירון. בניסוי מבוקר נמדדו שוב זמני מאורעות של הנוירון עבור ריכוז יונים גבוה מהרגיל, והם נתונים בקובץ emLin.mat. ידוע שפונקציית התגובה של הנוירון (Hazard function, $h(\tau)$) בתנאים אלה היא מהצורה:

$$h(\tau) = \begin{cases} a \cdot \tau & 0 < \tau < t_m \\ p_m & \tau \geq t_m \end{cases}$$

שערכו את a והסבירו כיצד עשיתם זאת כולל גרפים מתאימים.

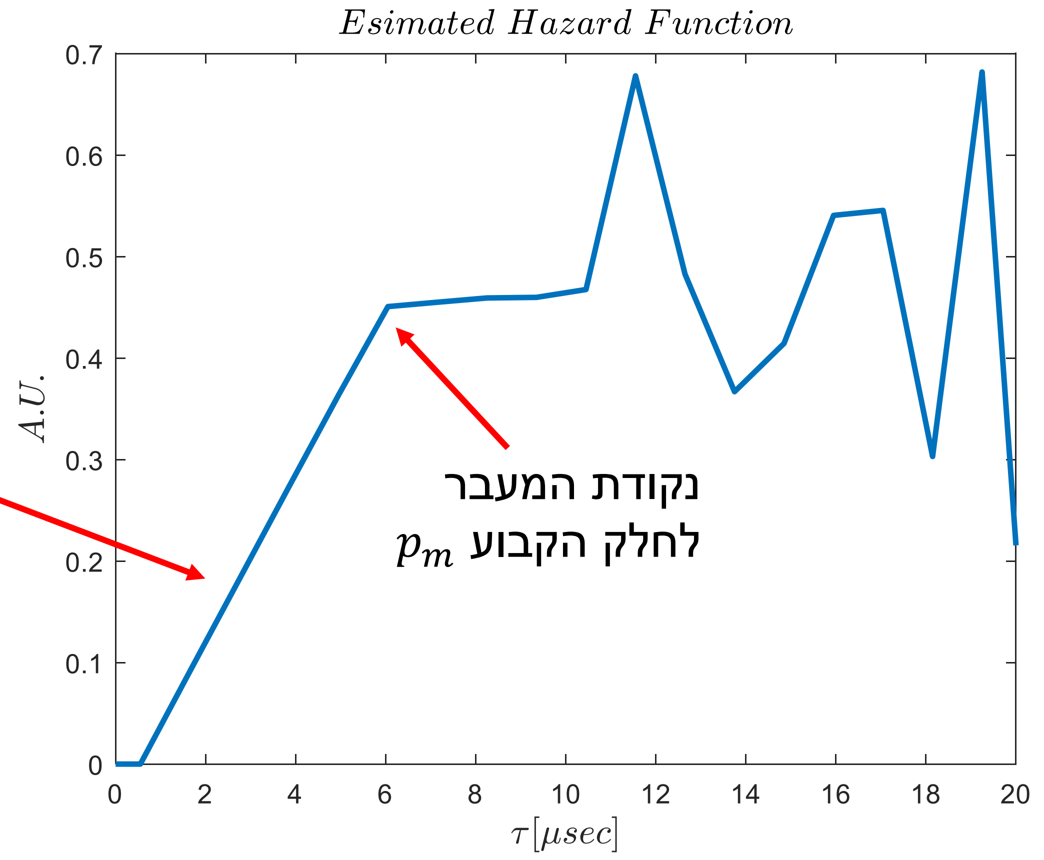
<u>שאלה:</u> איך תראה הפונקציה h?



שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

- מקבלים:

החלק הישר עם שיפוע a



נקודת המעבר
לחלק הקבוע p_m

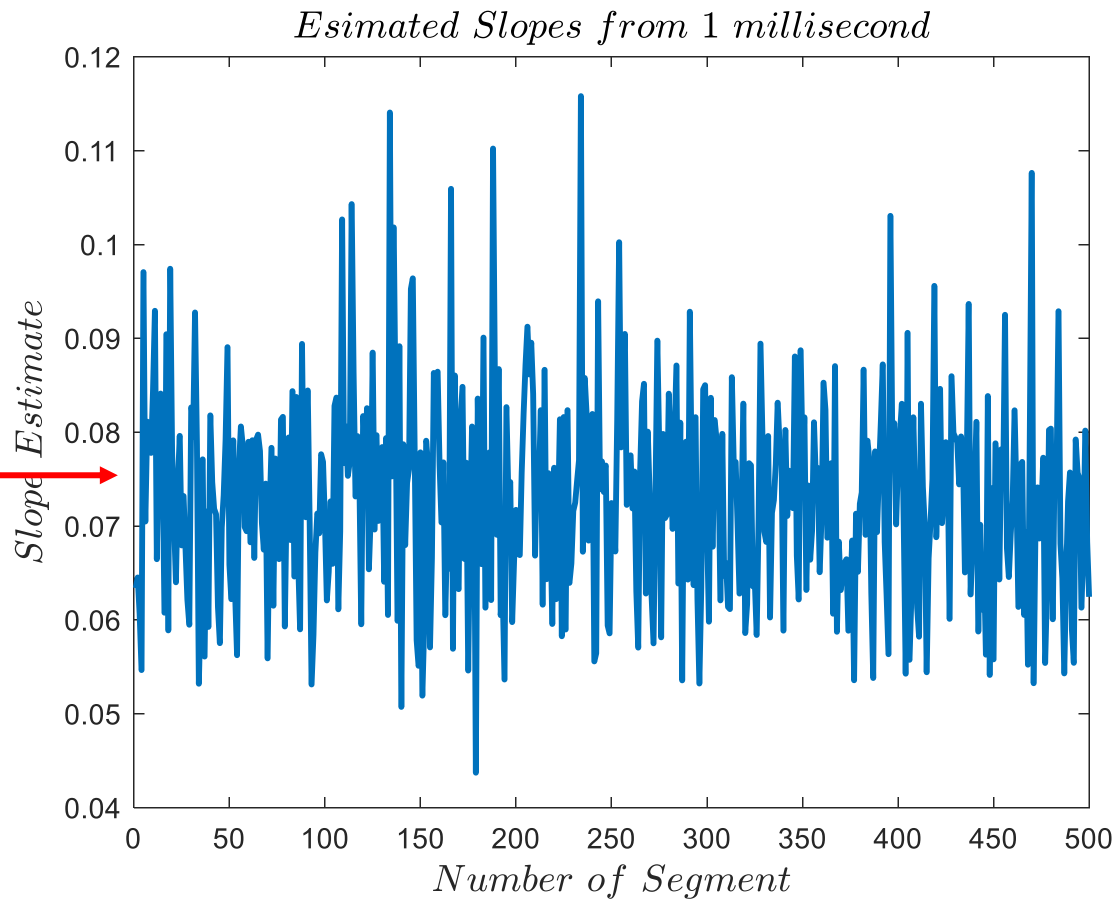
שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

3. הסטודנט המבצע את הניסוי מעוניין לקצר את משך המדידה כדי שיוכל להספיק לבצע עוד ניסויים. העריכו אמפירית מתוך הנתונים את סטיית התקן של שערוך α שצפוי לקבל הסטודנט ע"י מדידה של מאורעות בחלון של מילי-שניה אחת. הסבירו כיצד הערכתם זאת.

- רמז: שימו לב שזמן הניסוי הכולל ארוך בהרבה מ1 מילי-שניה.

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)

- מקבלים:



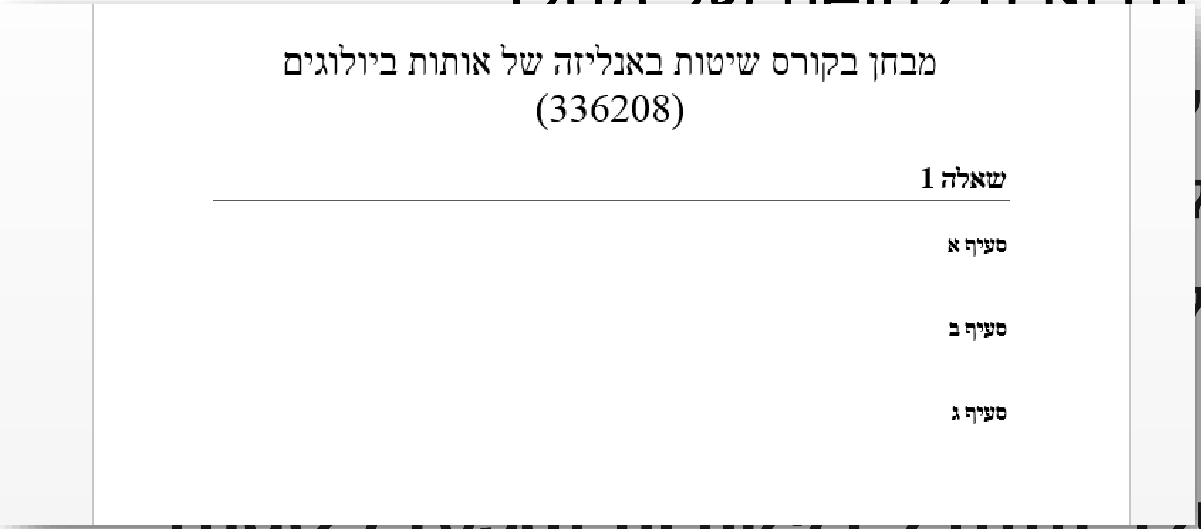
בממוצע אכן
השיפוע הנכון!

נושאים עיקריים

- ✓ שאלה בנושא LNP Cascade
- ✓ שאלה בנושא זיהוי מאורעות + פונקציית Hazard
- ✓ שאלה בנושא AR (מועד א 2018)
- ✓ שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2018)
- מבנה המבחן וטיפים איך ללמוד

מבנה המבחן

- 3 שאלות 3 שעות
- Matlab 2019b
- אין גישה לאינטרנט פרט לhelp של מטלב
- להשתמש אך ור... שאלה לגביי שימוש בפונקצייה תשא...
- יש template ש...
- תיקיית data ותי...
- **כל תשובה במט...** fig(271058)


מבחן בקורס שיטות באנליזה של אותות ביולוגים
(336208)

שאלה 1

סעיף א

סעיף ב

סעיף ג

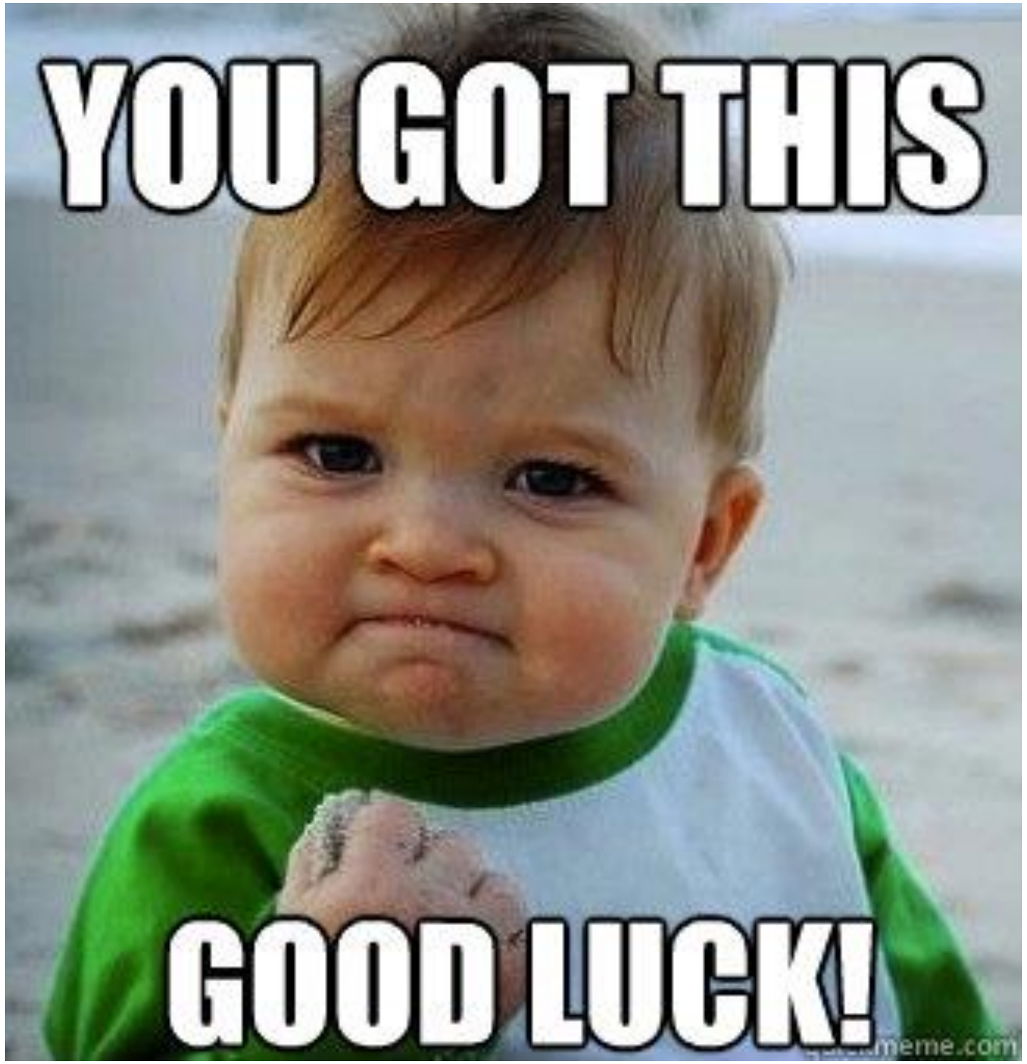
איך ללמוד וטיפים

- תסדרו טוב את הקוד כדי שיהיה נוח להשתמש בו
- תכינו מיפוי טוב של נושאים ואיפה אפשר למצוא אותם (ש.ב., תרגול, הרצאה, appendix)
- תעברו טוב וביסודיות על התרגולים וההרצאות
- ספציפית, תעברו על הסכמות המסכמות מהתרגולים ותוודאו שאתם מכירים את כל הכותרות שיש שם.
- סכמו יתרונות/חסרונות של שיטות שונות
- תסתכלו על הדאטה! יכול לרמז לכם מה צריך להיות בפתרון

איך ללמוד וטיפים

- אם אתם נתקעים במשהו ויש רק באג במימוש תרשמו את הפתרון ושיש באג שלא מצאתם ונתחשב בניקוד
- חשוב להסביר היטב את מה שעשיתם. אל תדביקו גרפים ותיתנו לנו לנחש מה התכוונתם להראות.
- תפתרו את השאלות לדוגמא, הם לקוחים ממבחני עבר
- תעברו על השיעורי בית ועל הנספחים שהיו בתרגולים
- אל תהססו לפנות אליי/ליואב/לבוריס במייל אם יש לכם שאלות.

בהצלחה במבחנים!!



תרגול 13 – חזרה 2

נושאים עיקריים

- שאלה בנושא LNP Cascade (מועד ב 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)
- שאלות מהפורום

נושאים עיקריים

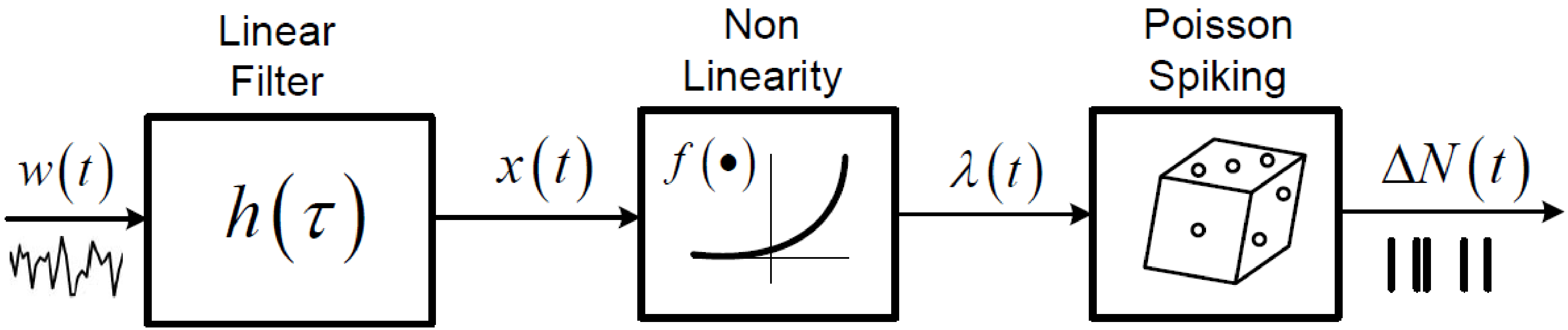
- שאלה בנושא LNP Cascade (מועד ב 2018)
- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)
- שאלות מהפורום

שאלה בנושא LNP Cascade

- חוקר מגרה חשמלית תא עצב בעזרת זוג אלקטרודות ומתעד את הפו"פ שיורה התא. הגירוי הינו רעש לבן עם שונות 1. הגירוי שהופעל על התא מופיע במשתנה w אשר נדגם בתדירות 100 הרץ, בעוד ששרשרת הפו"פ נקראת APtrain, שני אלה נמצאים בתוך IR_Q.mat .

א- (10 נק') שערכו את פרופיל הגירוי המועדף על התא כאשר נתון שהוא אינו מתאפס על 25 דגימות. יש לעשות זאת ע"י חיתוך מקטעי הכניסה סביב כל פו"פ ומיצוע.

ב- (10 נק') החוקר החליט למדל את פעילות תא העצב לפי מודל Linear-NonLinear-Poisson.



שאלה בנושא LNP Cascade

המשך ב- רשמו ביטוי אנליטי לשיערוך הפילטר הלינארי $\hat{h}$, חשבו אותו ונרמלו כך ש: $||h||_2 = 1$. ציירו גרף של $\hat{h}$ לעומת התוצאה מסעיף קודם, והסבירו את מה שהתקבל.

ג- (3 נק') חשבו את $x(t)$.

ד- (7 נק') לצערו של החוקר, דרייב הסמסונג עליו היה מאוחסן המידע על הכניסה וחישובי פונקציית התמסורת עלה באש באופן פתאומי! למזלו, המידע על המוצא $x(t)$ היה שמור על דרייב אחר. מאמרים בתחום גורסים כי פונקציית האימפולס **עבור החלק הלינארי** של מערכת מסוג זה נראית כך:

$$\boxed{0.7} * \sin\left(\frac{30\tau}{\tau_0} + \phi\right) e^{-\left(\frac{20\tau}{\tau_0}\right)^2}$$

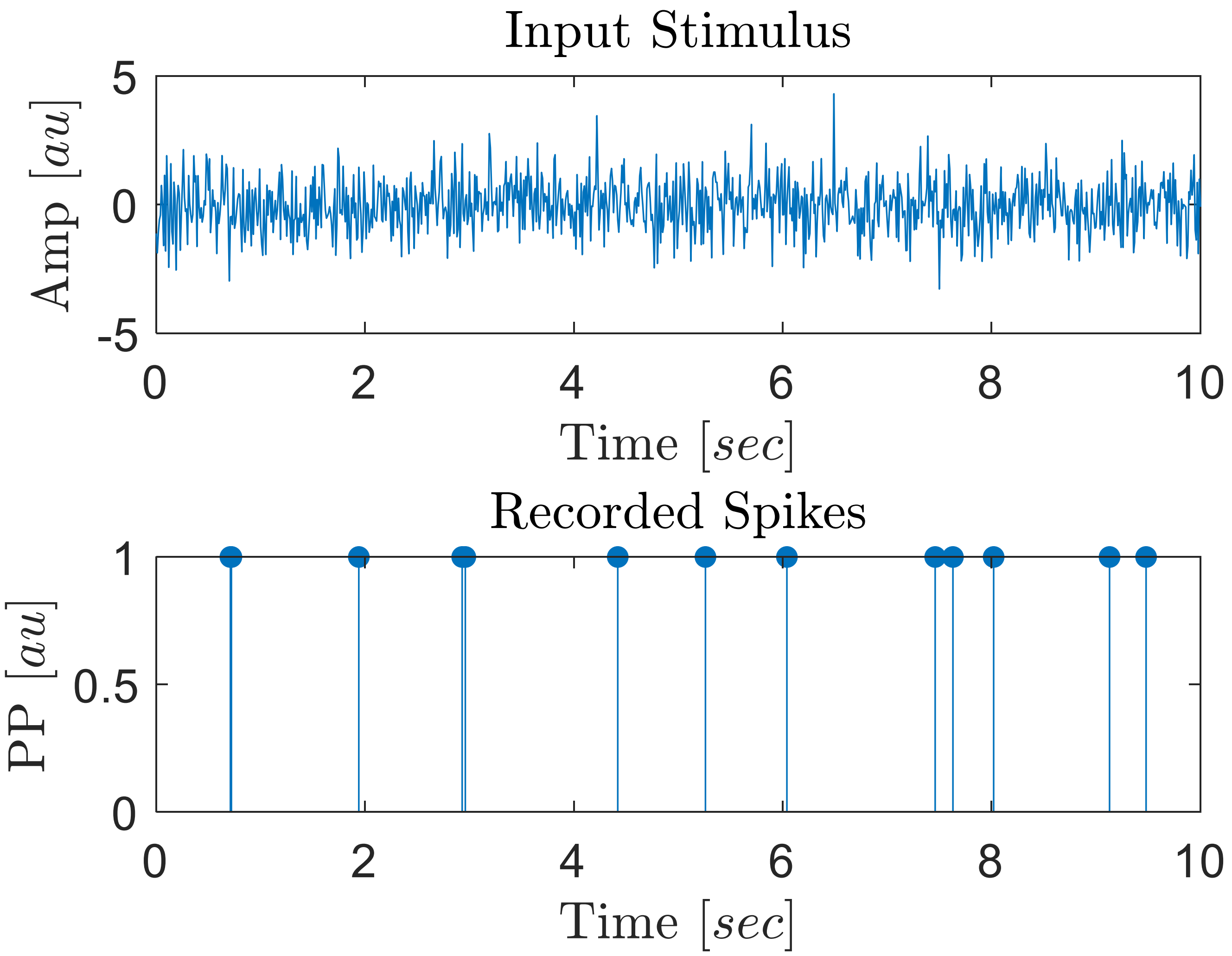
כאשר הפרמטר ϕ תלוי מערכת. מצאו את משערך מינימום שגיאה ריבועית (LS) לפרמטר בהינתן הנתונים שנשארו כאשר $\tau_0 = 1s$.

<u>הדרכה:</u>

1. את השגיאה הריבועית יש לחשב בין פונקציות אוטוקורלציה הרלוונטיות לבעיה.
2. ניתן לבצע חיפוש פשוט ע"י סריקה של הפרמטר, או להיעזר בfminsearch.

LNP Cascade שאלה בנושא

• נתון:



שאלה בנושא LNP Cascade

א- שערכו את פרופיל הגירוי המועדף על התא כאשר נתון שהוא אינו מתאפס על 25 דגימות. יש לעשות זאת ע"י חיתוך מקטעי הכניסה סביב כל פו"פ ומיצוע.

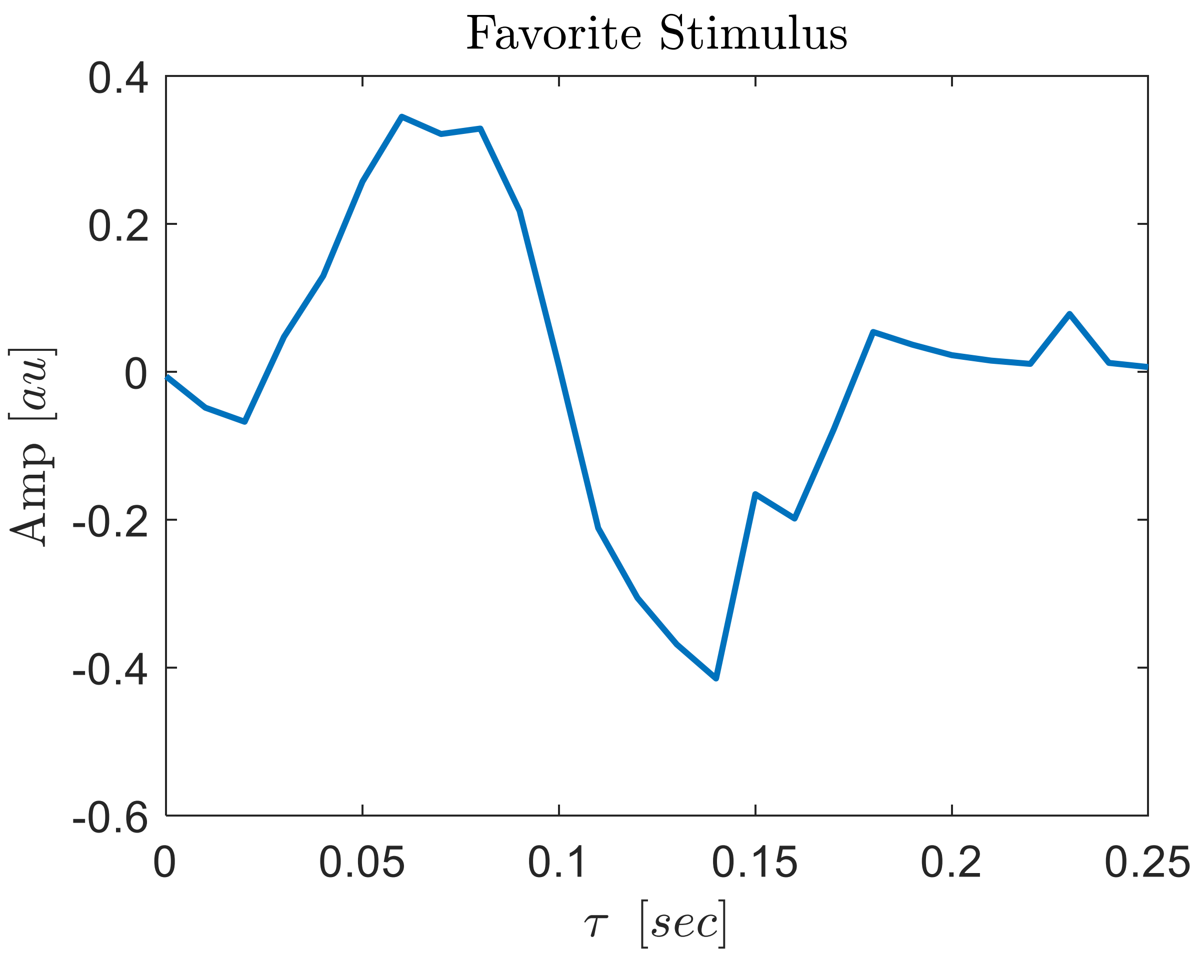
השהייה מקסימלית

חיתוך של 25 דגימות

```
%% Section A: STA

% find the index of the first spike
ind_first = find(APtrain==1,1);

% cross correlation between noise and spikes
[Rww,tauw] = xcorr(w);
[Rws,tau] = xcorr(w,APtrain,ind_first);

% crop result according to instructions
shape = fliplr(Rws(find(tau==-25):find(tau==0))./Rww(tauw==0));

% plot favorite stimulus
figure();
plot((0:25)./fs,shape./norm(shape),'LineWidth',2);
hx = xlabel('$\tau \ \left[sec\right]$');
hy = ylabel('Amp $\left[au\right]$');
ht = title('Favorite Stimulus');
set([hx,hy,ht],'interpreter','latex','FontSize',15);
set(gca,'FontSize',15);
```

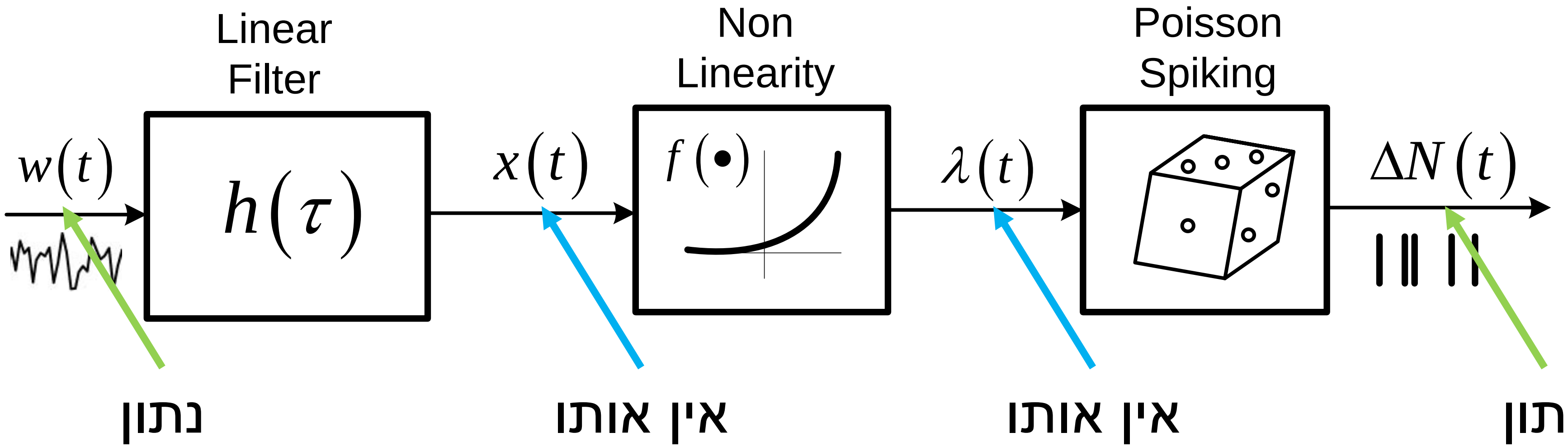
LNP Cascade שאלה בנושא

התוצאה:



שאלה בנושא LNP Cascade

ב- החוקר החליט למדל את פעילות תא העצב לפי מודל Linear-NonLinear-Poisson.

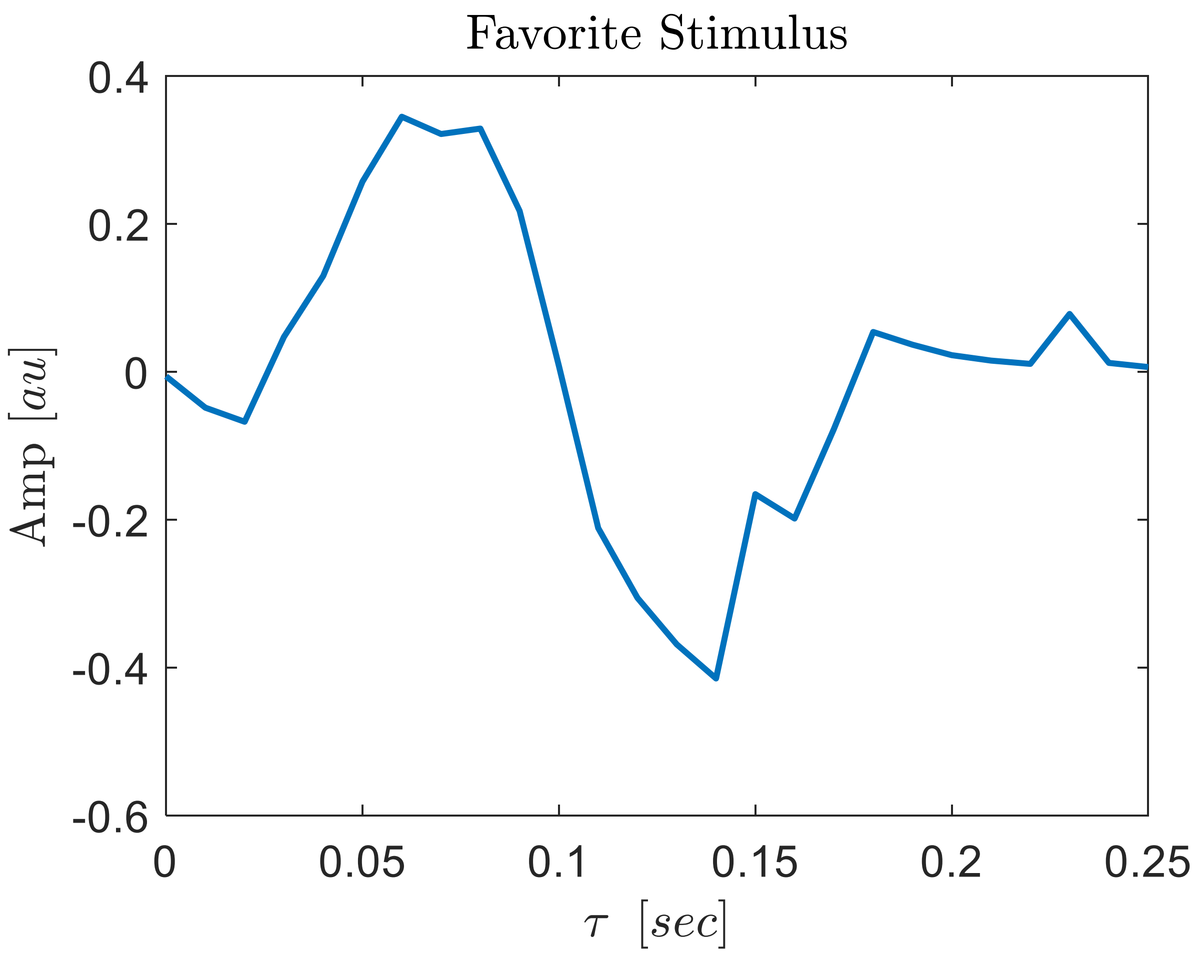


$$\rightarrow \boxed{\tilde{h}(\tau) = \frac{R_{w\lambda}(-\tau)}{\sigma_w^{\ 2}} = \frac{R_{w\Delta N}(-\tau)}{R_{ww}(0)}}$$

שאלה: איך תראה התוצאה?

LNP Cascade שאלה בנושא

:התוצאה



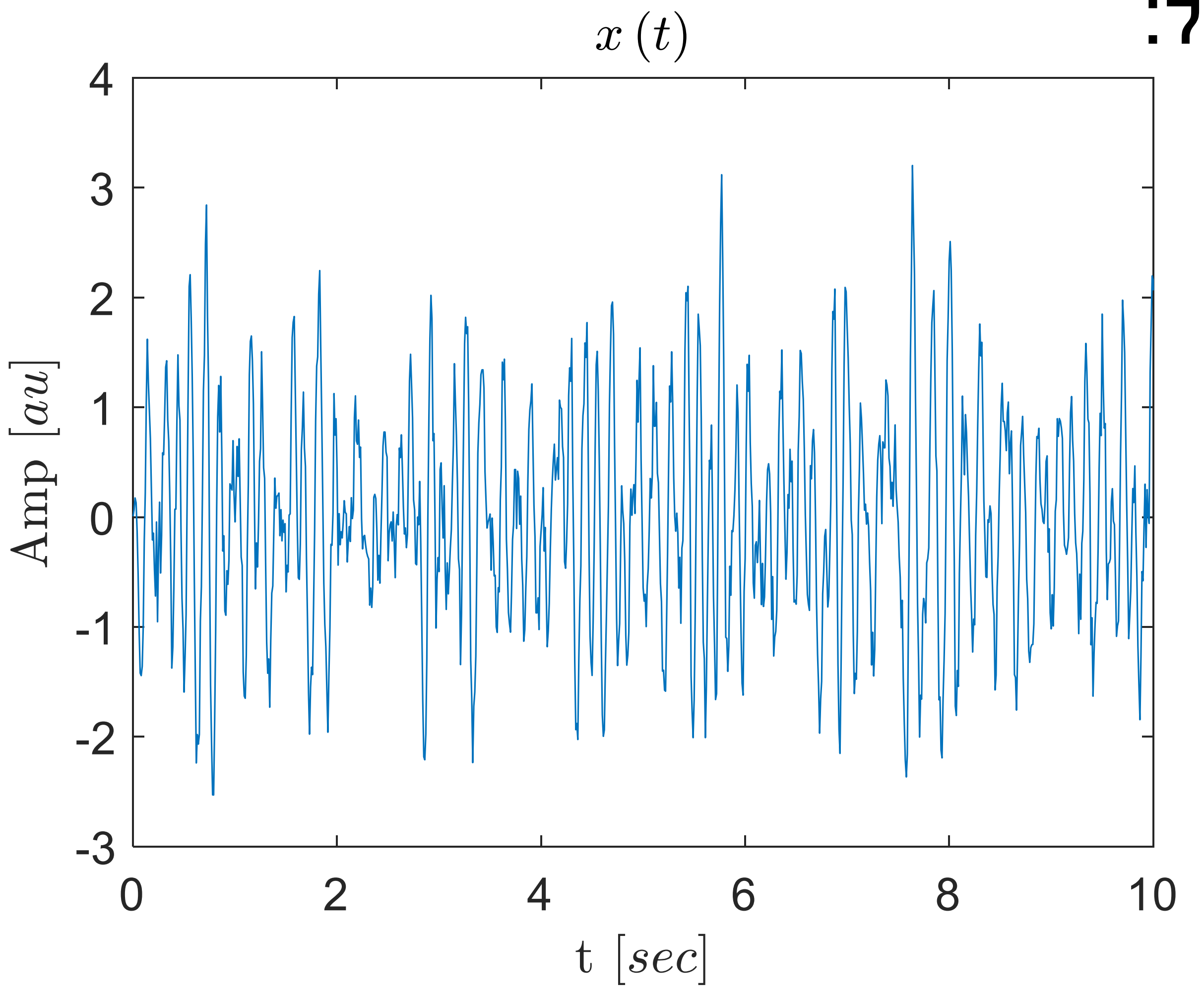
שאלה בנושא LNP Cascade

ג- חשבו את $x(t)$.

```
%% Section C: calculating x

% calculate x
hnorm = shape./norm(shape);
x = filter(hnorm, 1, w);

% plot it
figure();
plot(t,x);
hx = xlabel('t $\left[sec\right]$');
hy = ylabel('Amp $\left[au\right]$');
ht = title('$x\left(t\right)$');
set([hx,hy,ht],'interpreter','latex','FontSize',15);
set(gca,'FontSize',15);
xlim([0,10]);
```

שאלה בנושא LNP Cascade

ה- $x(t)$ המתקבל:



שאלה בנושא LNP Cascade

ד- (7 נק') לצערו של החוקר, דרייב הסמסונג עליו היה מאוחסן המידע על הכניסה וחישובי פונקציית התמסורת עלה באש באופן פתאומי! למזלו, המידע על המוצא $x(t)$ היה שמור על דרייב אחר. מאמרים בתחום גורסים כי פונקציית האימפולס **עבור החלק הלינארי** של מערכת מסוג זה נראית כך:

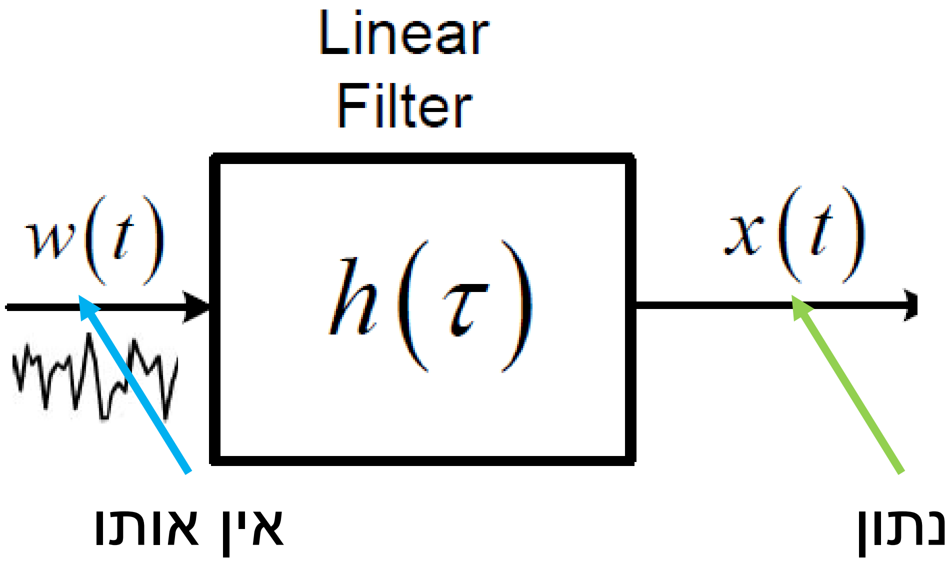
$$0.7 * \sin\left(\frac{30\tau}{\tau_0} + \phi\right) e^{-\left(\frac{20\tau}{\tau_0}\right)^2}$$

כאשר הפרמטר ϕ תלוי מערכת. מצאו את משערך מינימום שגיאה ריבועית (LS) לפרמטר בהינתן הנתונים שנשארו כאשר $\tau_0 = 1s$.

<u>הדרכה:</u>

1. את השגיאה הריבועית יש לחשב בין פונקציות אוטוקורלציה הרלוונטיות לבעיה.
2. ניתן לבצע חיפוש פשוט ע"י סריקה של הפרמטר, או להיעזר בfminsearch.

שאלה בנושא LNP Cascade



$$R_{xx}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_{ww}(\tau)$$

$$R_{ww}(\tau) = \sigma_w^2 \delta(\tau) = \delta(\tau)$$

$$\rightarrow \boxed{R_{xx}(\tau) = \boxed{h(\tau) * h(-\tau)}}$$

אפשר לשערך
את h במישור
האוטוקורלציה!

שאלה בנושא LNP Cascade

מימוש ד ע"י קונולוציה פרמטרית:

```
%% Section D: LS fitting

% expected maximal lag in the autocorrelation
maxlag = 50;

% auto-correlation and lag axis in samples
[Rxx, tau] = xcorr(x,maxlag,'biased');

% lag axis in [sec]
tau = tau./fs;

% parameteric h(tau) and h(-tau)
h = @(phi) 0.7*sin(30*tau + phi).*exp(-(20*tau).^2);
hgal = @(phi) fliplr(h(phi));

% parameteric convolution
hhgal = @(phi) conv(h(phi), hgal(phi), 'same');

% objective for LS fitting
f = @(phi) mean((Rxx - hhgal(phi)).^2);

% optimization routine
phi_opt = fminsearch(f, 2);
```

חישוב הקורלציה של x

פרמטריזציה של h ו- hgal

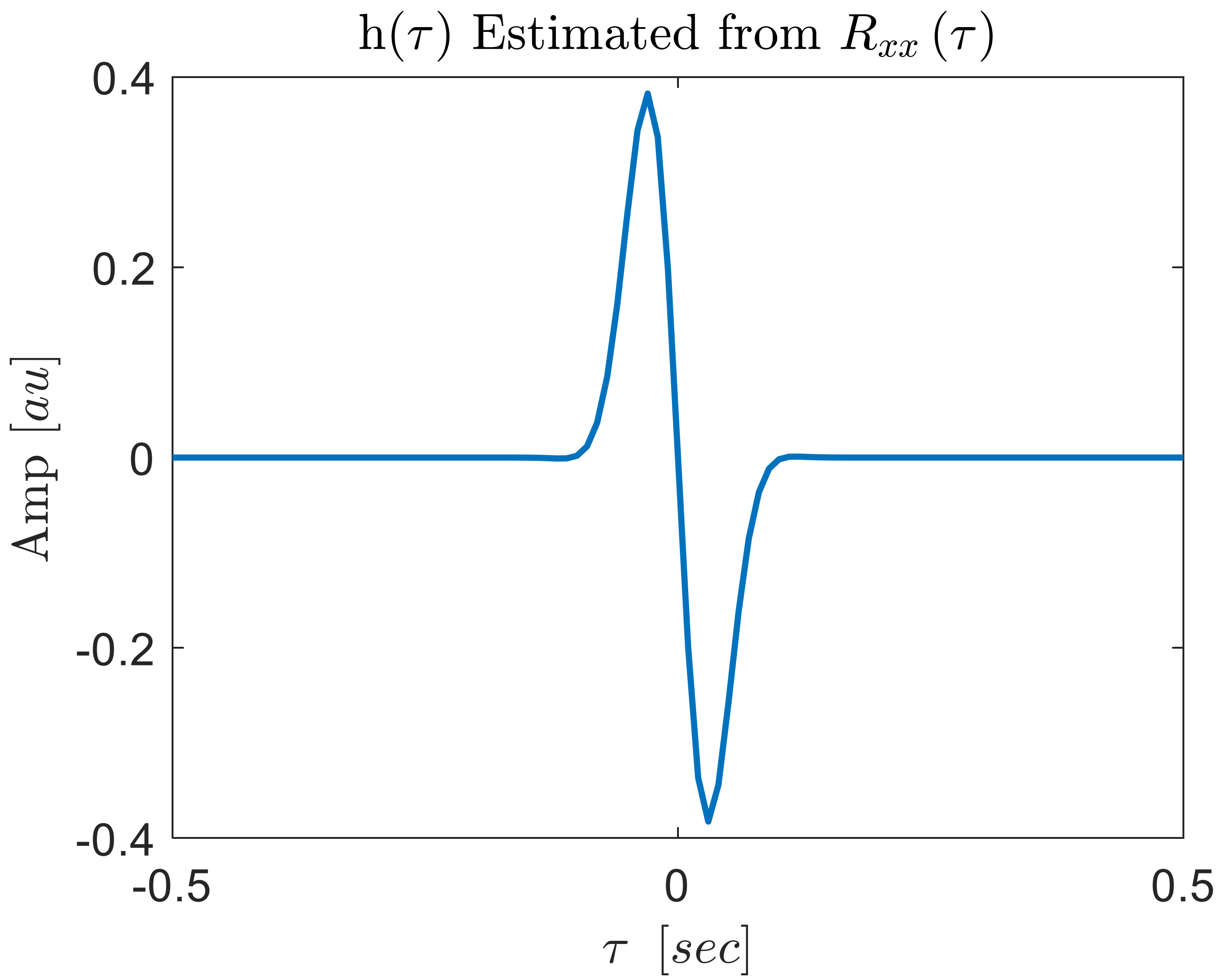
קונבולוציה פרמטרית

פונקציית מחיר של LS

הרצת אופטימיזציה עם אתחול של 2.

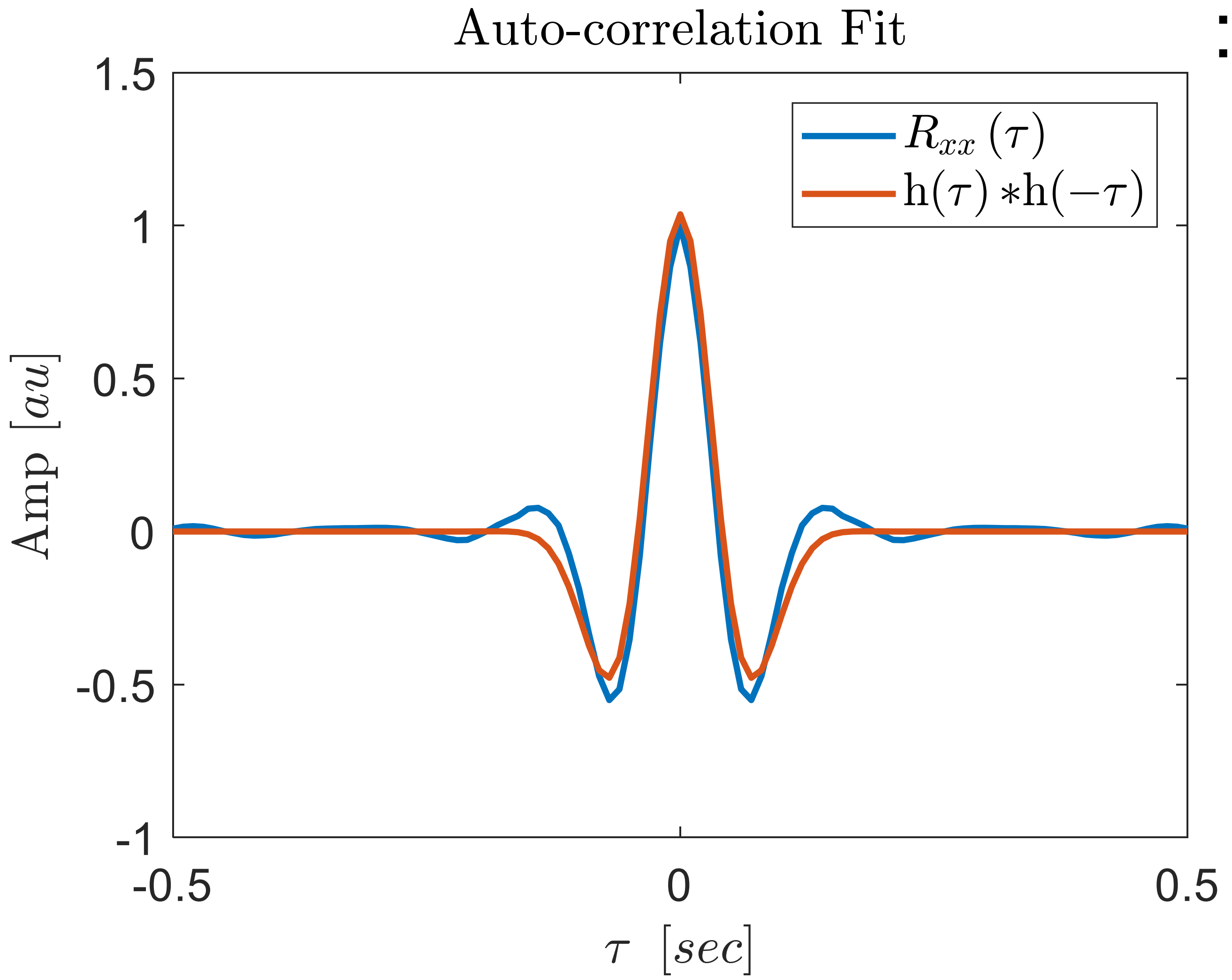
LNP Cascade שאלה בנושא

ה-$h(\tau)$ המתקבלת:



LNP Cascade שאלה בנושא

ההתאמה ל- $R_{xx}(\tau)$:



נושאים עיקריים

✓ שאלה בנושא LNP Cascade (מועד ב 2018)

- שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)
- שאלות מהפורום

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

מתוך מדידות של פוטנציאלי פעולה שהתבצעו בתא עצב מסוים במוח של תולעת, התקבל האות signal1, דגום בתדר 100Hz. האות מכיל 1 בכל זמן שבו התקבל אימפולס (הנובע מפוטנציאל פעולה), ו0 אחרת.

א- (11 נק') החוקר מעוניין בפונקציית צפיפות ההסתברות לקבלת אימפולס בהנתן שהתקבל אימפולס, כתלות בזמן (במילים אחרות – פונקציית Hazard, כפי שנלמד בהרצאות). הוא יודע שקיים זמן מסוים t1 שעד אליו לא יכול להתקבל אימפולס נוסף (תקופה רפרקטורית), וכמו כן שקיים זמן נוסף t2 שבו קבלת אימפולס נוסף היא הסבירה ביותר, כשכרגיל, הזמן t=0 מוגדר כזמן האימפולס הקודם. מהם t1, t2?

במהלך אותו יום נמדדו שני תאי עצב נוספים. האותות שלהם הם signal2 ו-signal3. אחד מהתאים היה באותה התולעת מסעיף 1, ונמדד ממש באותו הניסוי שבו נמדד signal1. התא השני היה שייך לתולעת שונה ונמדד בניסוי אחר. לצערו של החוקר שביצע את הניסוי, הוא שכח לתעד איזה אות נמדד מאיזה תולעת.

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

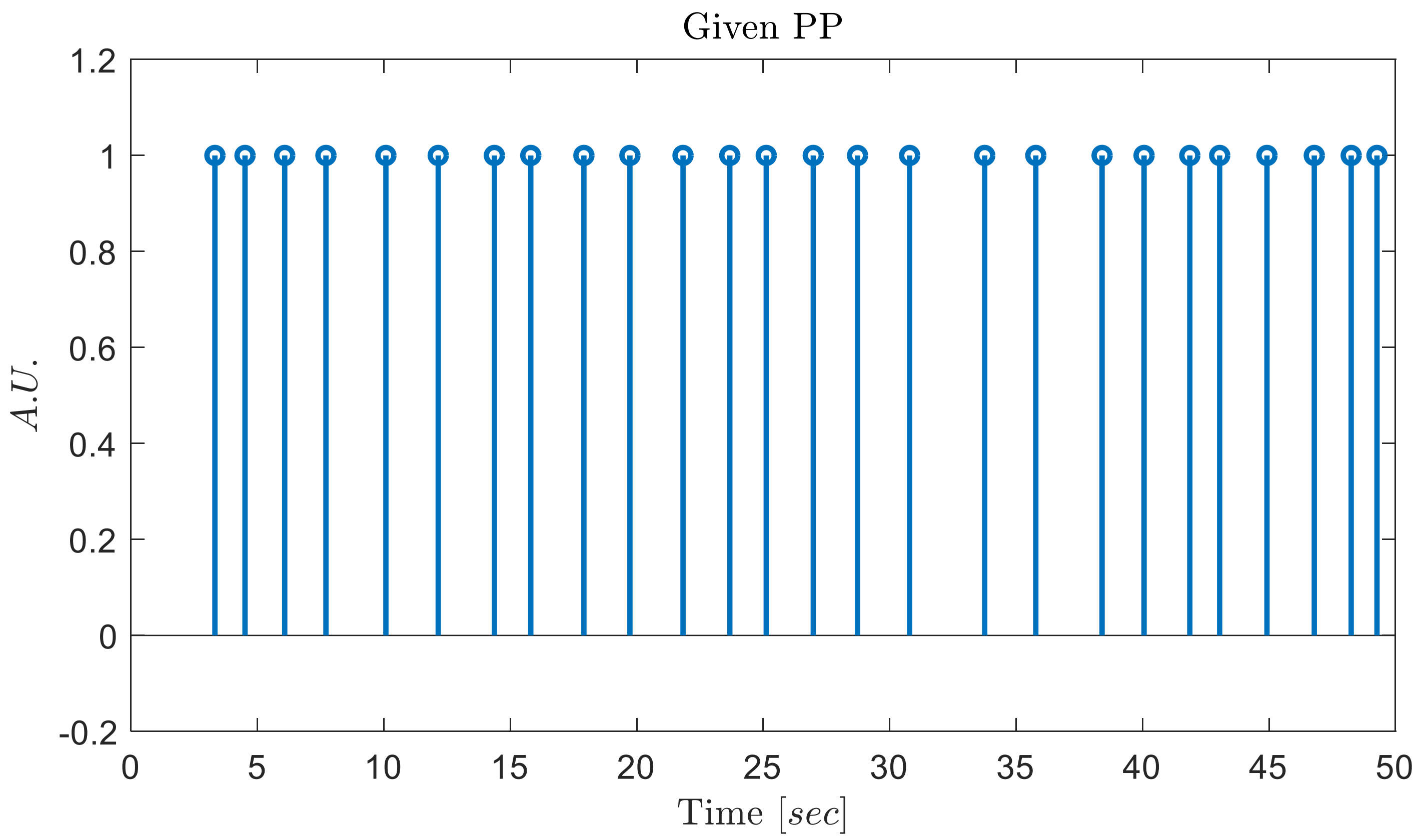
ב- (11 נק') איזה מהאותות לדעתכם נמדד מאותה התולעת כמו בסעיף 1? נמקו במשפט אחד ובגרף/ים רלוונטי/ם.

באותו היום נמדד אות נוסף מתא עצב, וגם אות אחר שמייצג רעש בינארי (Shot noise) במכשיר המדידה האלקטרוני ומשמש לכיול המערכת. שני האותות הם signal4 ו-signal5. שוב התיעוד לגבי הזהות של כל אות נשמט.

ג- (11 נק') איזה משני האותות מייצג את תא העצב? נמקו במשפט אחד ובגרף/ים רלוונטי/ם.

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

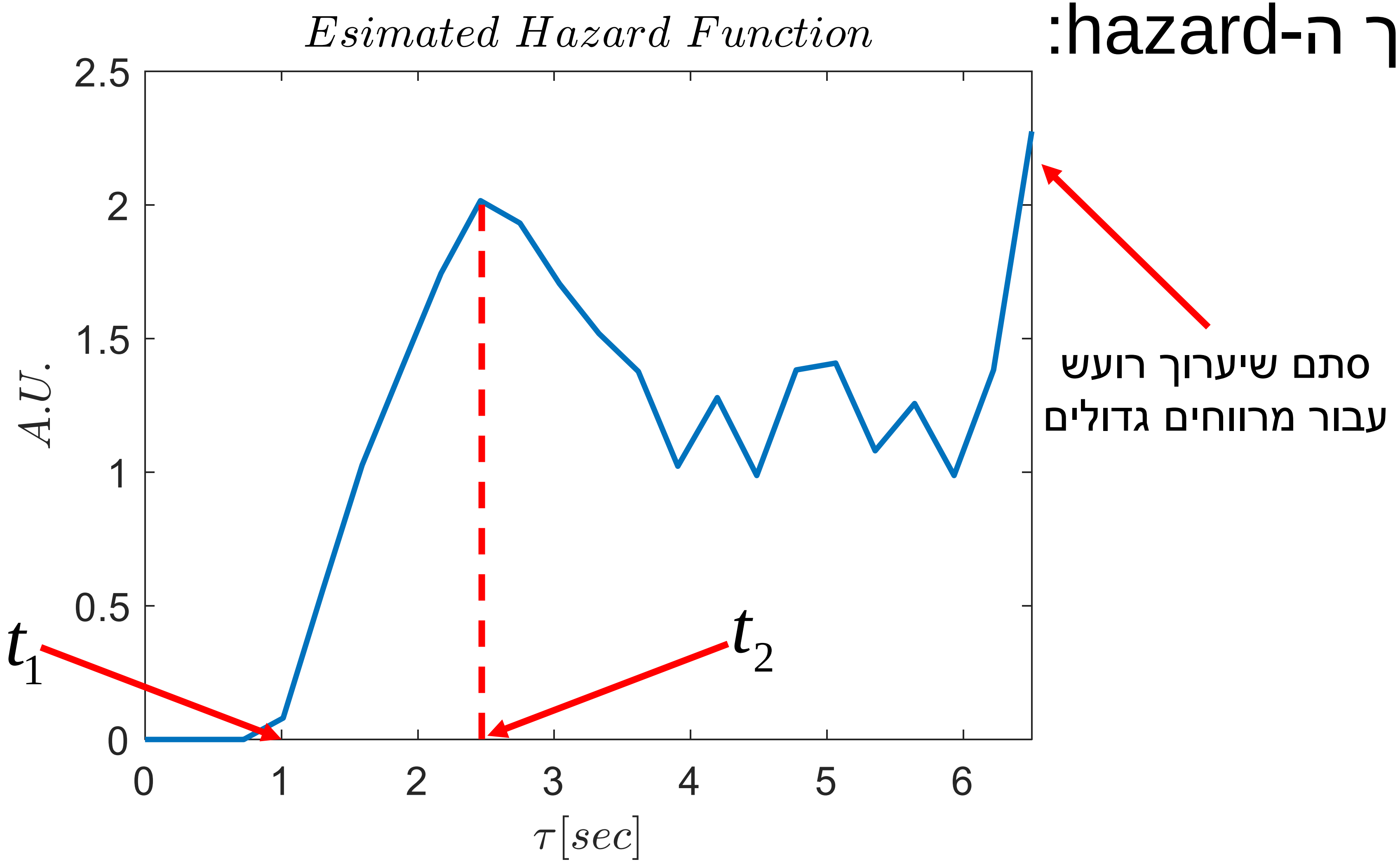
• נתון:



. . .

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

- שיערוך ה-hazard:



שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

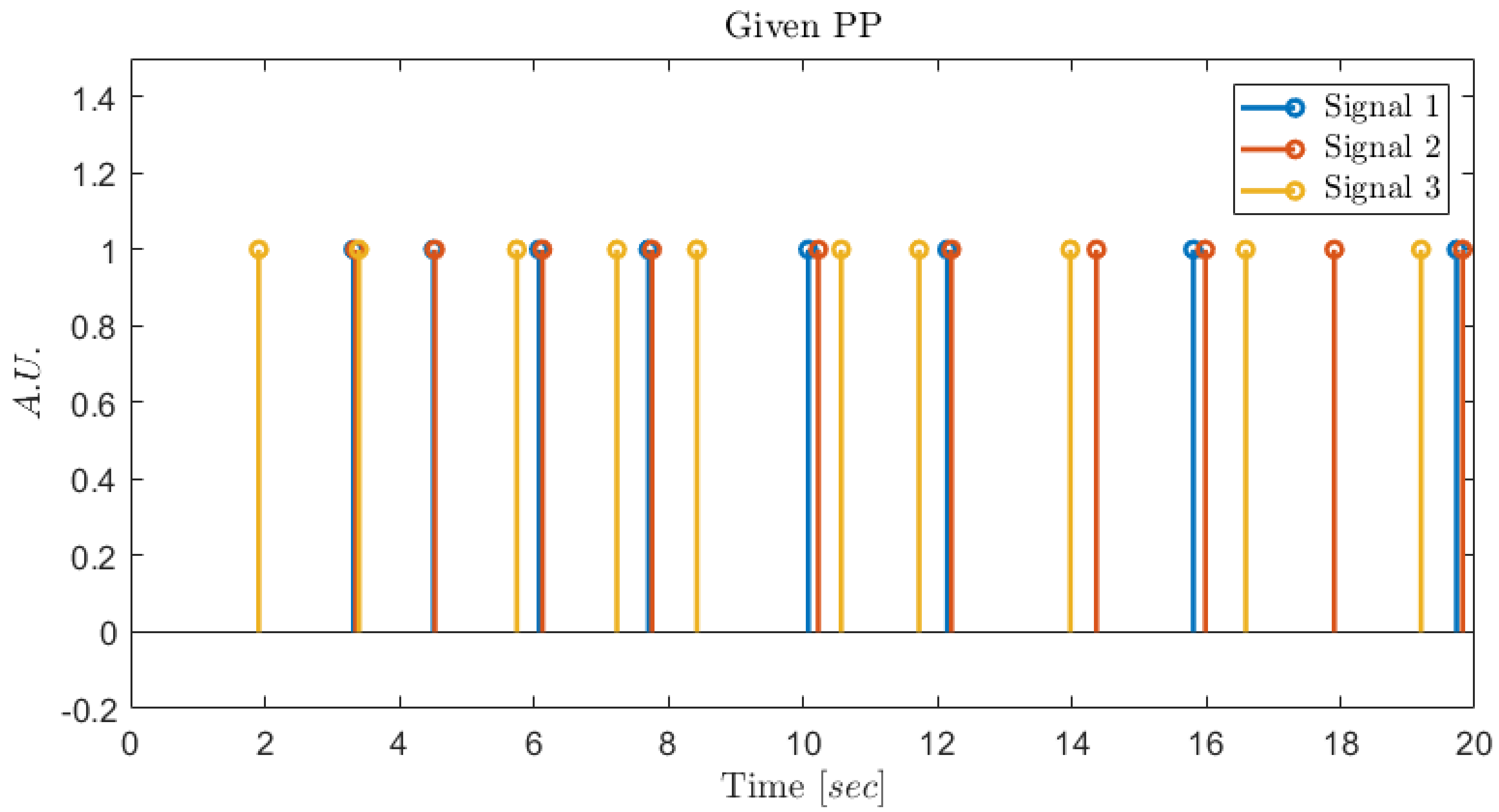
במהלך אותו יום נמדדו שני תאי עצב נוספים. האותות שלהם הם signal2 ו-signal3. אחד מהתאים היה באותה התולעת מסעיף 1, ונמדד ממש באותו הניסוי שבו נמדד signal1. התא השני היה שייך לתולעת שונה ונמדד בניסוי אחר. לצערו של החוקר שביצע את הניסוי, הוא שכח לתעד איזה אות נמדד מאיזה תולעת.

ב- (11 נק') איזה מהאותות לדעתכם נמדד מאותה התולעת כמו בסעיף 1? נמקו במשפט אחד ובגרף/ים רלוונטי/ם.

שאלה: איך נחליט?

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

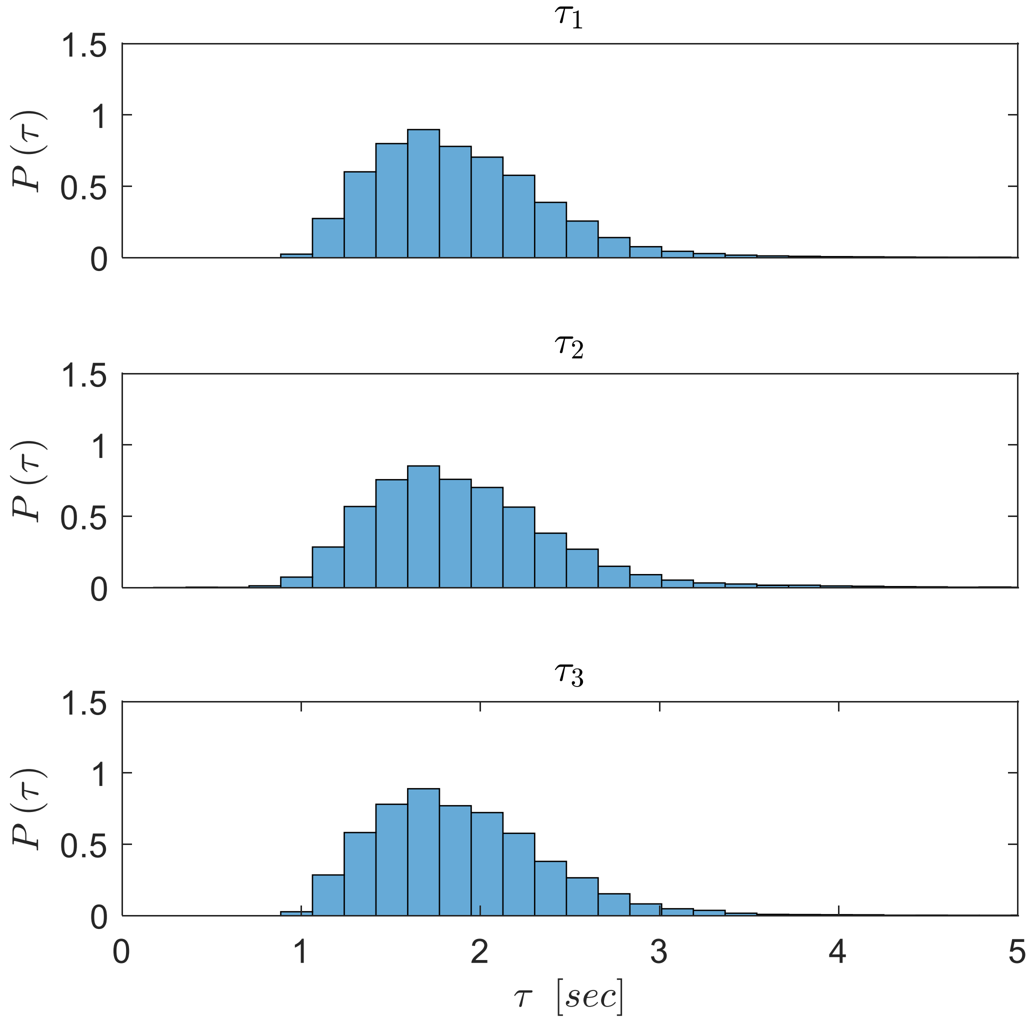
- מישור הזמן:



...

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

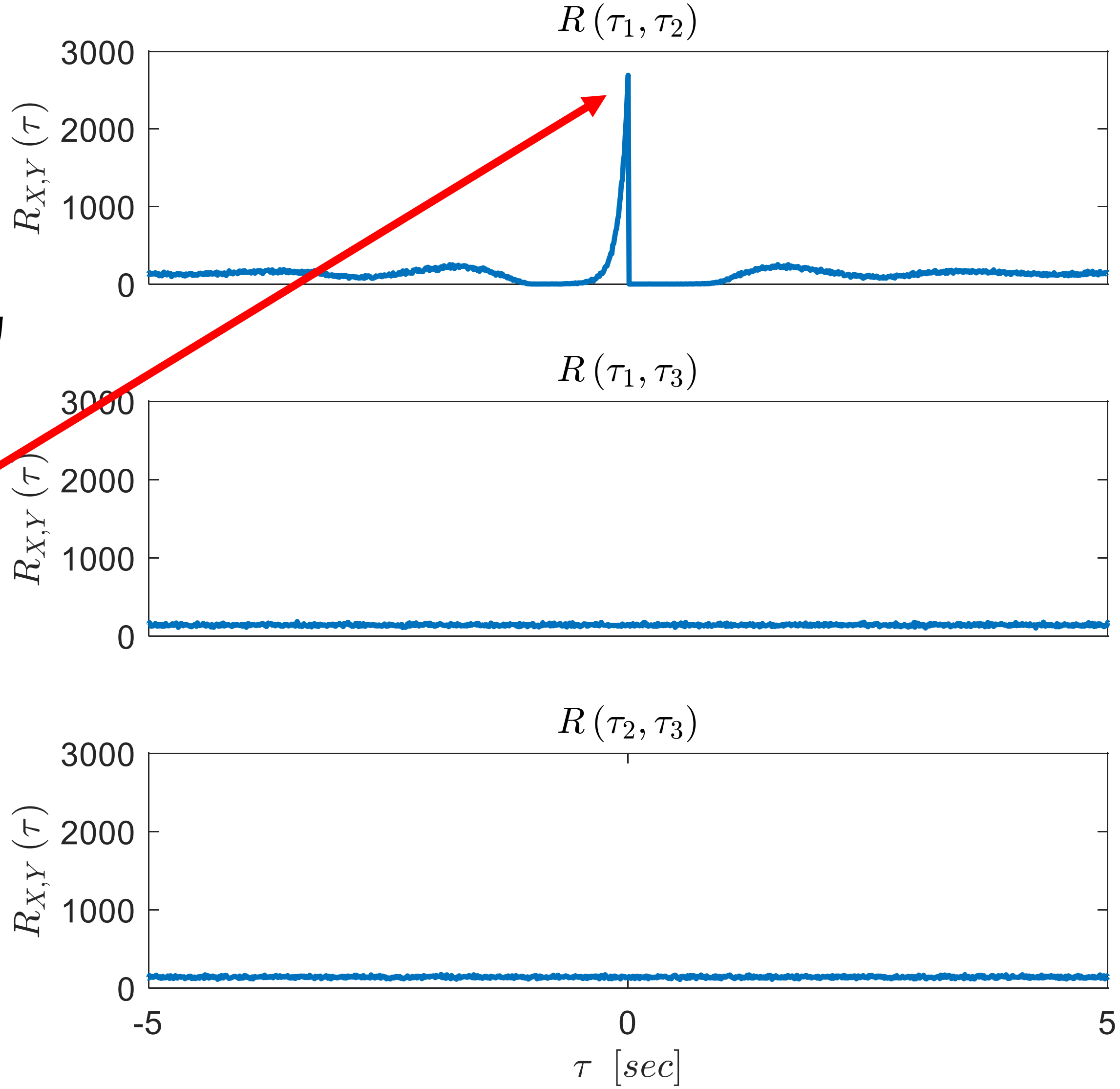
- מישור המרווחים:



שאלה: מה עושים?

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

- מישור הקורלציה:



שאלה: איזה סיגנל מאותו תא?

סיגנל 2!

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

באותו היום נמדד אות נוסף מתא עצב, וגם אות אחר שמייצג רעש בינארי (Shot noise) במכשיר המדידה האלקטרוני ומשמש לכיול המערכת. שני האותות הם signal4 ו-signal5. שוב התיעוד לגבי הזהות של כל אות נשמט.

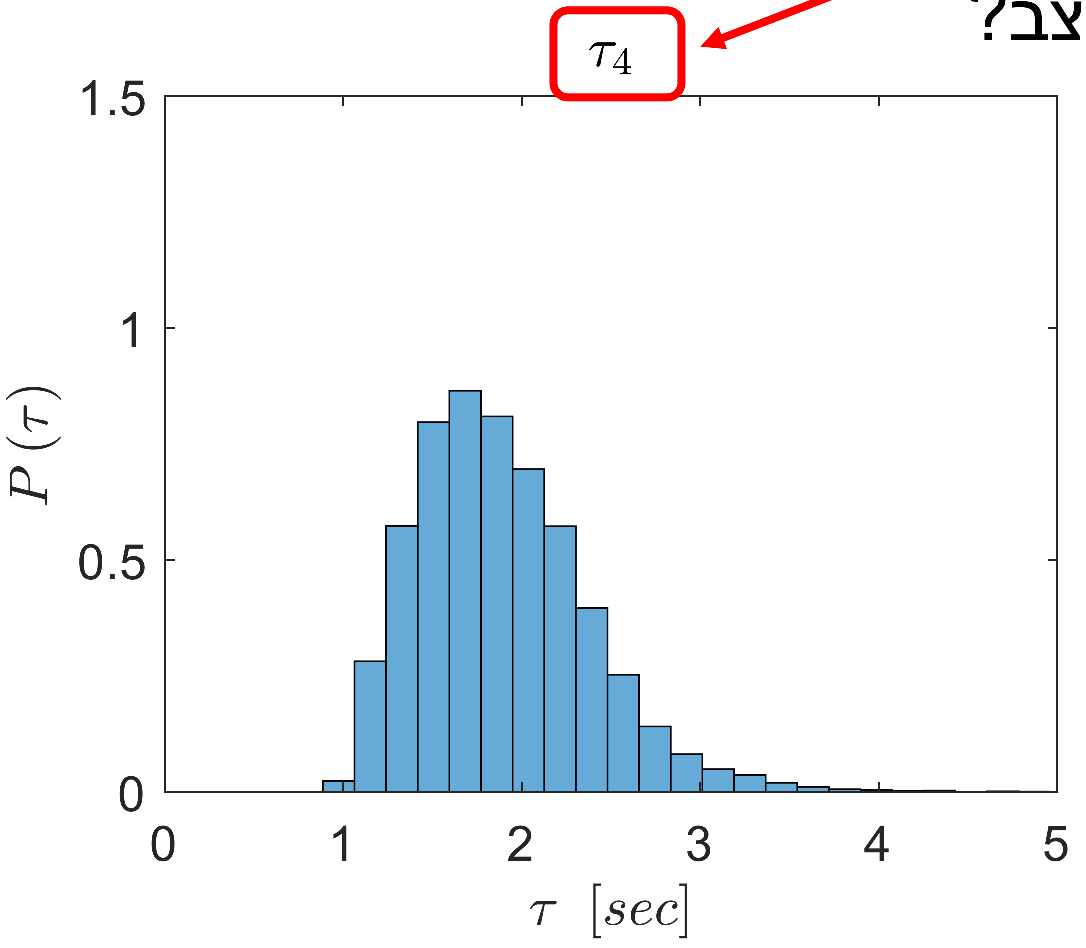
ג- (11 נק') איזה משני האותות מייצג את תא העצב? נמקו במשפט אחד ובגרף/ים רלוונטי/ם.

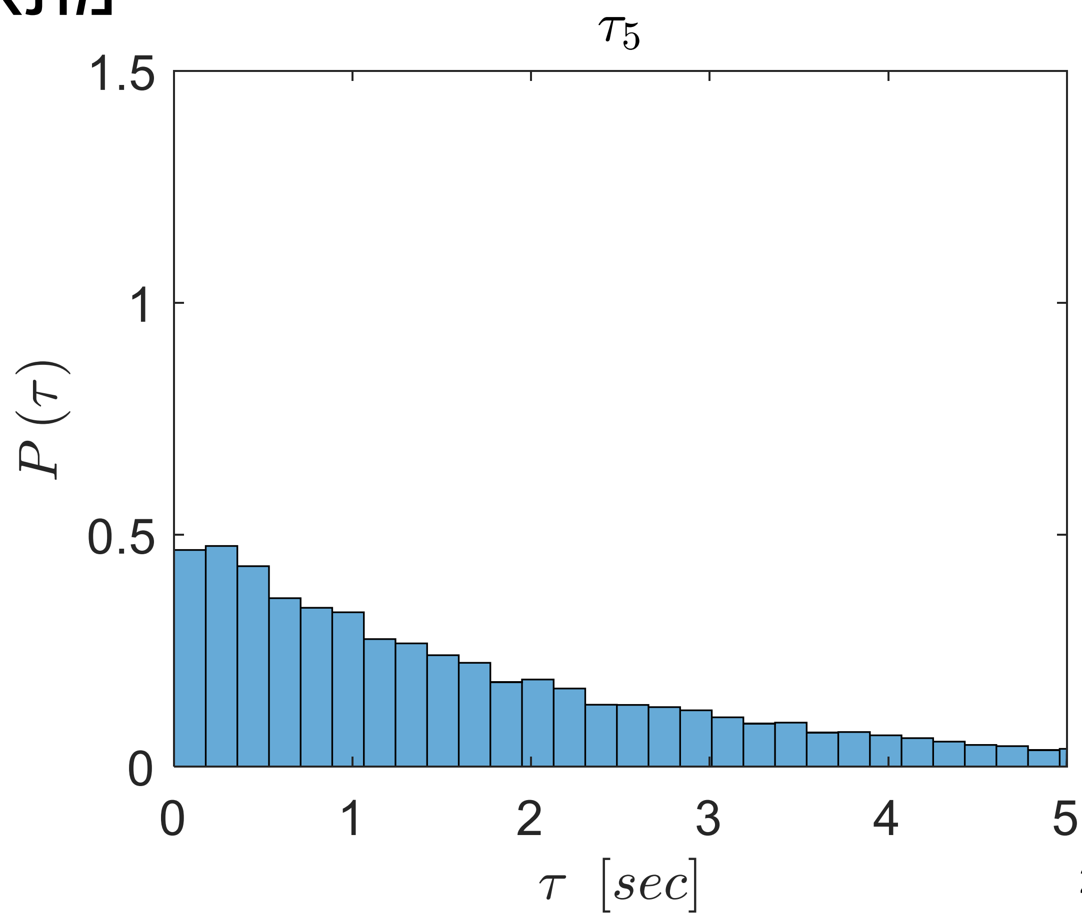
שאלה: איך נחליט?

שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)

- מישור המרווחים:

שאלה: איזה סיגנל
מתא עצב?





נושאים עיקריים

- ✓ שאלה בנושא LNP Cascade (מועד ב 2018)
- ✓ שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)
- שאלות מהפורום

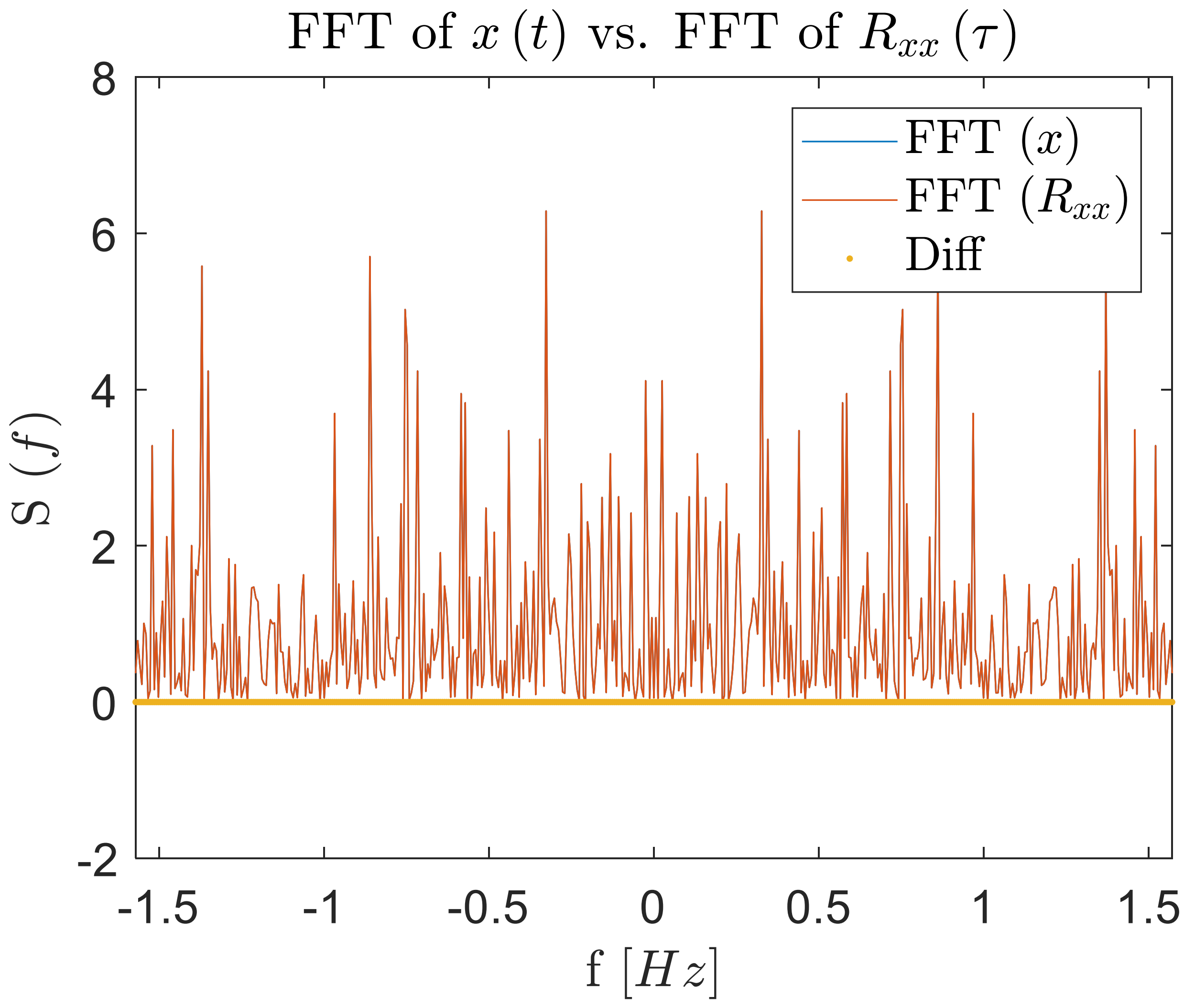
FFT על סמך הסיגנל/הקורלציה

```
%% Peridogram: FFT of signal vs Rxx

% length of signal
N = 1000 + 1;

% the test signal (either gaussian noise or cosine)
% x = randn(N,1);
x = cos(2*pi*100*linspace(0,1,N));

% the spectrum based on x itself
SX = 1/N*fftshift(abs(fft(ifftshift(x))).^2);

% biased autocorrelation full length
Rxx = xcorr(x, 'biased');

% the spectrum based on the autocorrelation
SR = fftshift(fft(ifftshift(Rxx),N));
SR = 2*real(SR) - mean(real(SR));
```

משערך מוטה!

ספקטרום באורך N

FFT על סמך הסיגנל/הקורלציה



שאלה 1 סעיף 3 (מועד א 2018)

חישוב אנליטי

חישוב נומרי

```
% length of the signal
N = length(v);

% estimate coeffs using LS
Phi = [ones(N,1), v, v.^3, -log(v+1)];
ahat_analytic = pinv(Phi)*(log(y));

% estimated noisy signal
yhat = exp(ahat_analytic(1))*exp(ahat_analytic(2)*v + ...
    ahat_analytic(3)*v.^3)./((v+1).^ahat_analytic(4));

% time axis
fs = 128;
t = (0:N-1)'./fs;

% compare the two
figure();plot(t,y); hold on; plot(t,yhat);xlim([0 5]);
hx = xlabel('$Time [sec]$');
hy = ylabel('$A.U.$');
hl = legend('$y$','$\hat{y}$');
ht = title('$Signal \ After \ Deterioration: \ y \ \& \ \hat{y}$');
set([hl, hx, hy, ht],'interpreter','latex','FontSize',13);

% numerical solution using fminsearch
f = @(a) sum((a(1)*exp(a(2)*v + a(3)*v.^3)./((v+1).^a(4))-y).^2);
ahat_numeric = fminsearch(f,[0, 0, 0, 0]');

% print both estimations
ahat_analytic_final = [exp(ahat_analytic(1)); ahat_analytic(2:end)];
disp('  Analytic vs. Numeric');
disp([ahat_analytic_final, ahat_numeric]);
```

נושאים עיקריים

- ✓שאלה בנושא LNP Cascade (מועד ב 2018)
- ✓שאלה בנושא אותות נקודה (מועד א 2019)
- ✓שאלות מהפורום

בהצלחה!!